RÉSISTANCE des MATÉRIAUX

APPLIQUÉE A L'AVIATION

PAR

Paul VALLAT

Ingénieur au Bureau d'Études S.N.C.A.S.E. Toulouse.



PRÉFACE DE

Paul DUMANOIS

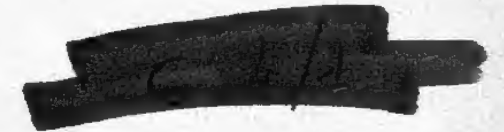
Ingénieur Général de l'Air (CR).

Directeur de l'École Nationale des moteurs à combustion et à explosion.

INTRODUCTION DE

Pierre SATRE

Ingénieur en chef des Bureaux d'Études S.N.C.A.S.E. Toulouse.



PARIS et LIÉGE

LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE CH. BÉRANGER

PARIS, 15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15

LIÉGE, 1, QUAI W. CHURCHILL, 1

1950

PRÉFACE

Il existe de nombreux formulaires de résistance des matériaux, dont certains fort bien faits. Leur emploi permet, sans d'ailleurs rien comprendre, par la substitution de nombres à des lettres dans les formules toutes faites, d'arriver aux résultats cherchés.

Les formulaires ont soin d'indiquer soigneusement en quelles unités doivent être exprimés les nombres, pour éviter tout effort intellectuel.

Le rôle du dessinateur d'études est ainsi ramené à celui de manœuvre spécialisé dans les calculs.

Si l'emploi systématique des formulaires conduit à l'utilisation d'un personnel de qualité médiocre, il ne permet pas d'attendre de ce personnel de faire acte d'initiative. Le Chef du bureau d'études ne peut compter sur lui pour redresser une erreur éventuelle ou lui apporter des suggestions.

Au surplus, dans le cas particulier de l'aviation et de ses problèmes spéciaux de résistance, où les coefficients de sécurité, c'est-à-dire d'ignorance, doivent être réduits au minimum, la plupart des formulaires usuels deviennent insuffisants.

On peut penser, au contraire, que dans un bureau d'études, cerveau qui matérialise les conceptions, réalisées ensuite à grands frais et dont dépend la valeur même de la production, l'esprit d'équipe est nécessaire, plus peut-être encore que dans les autres compartiments de l'usine. Etant donné la nature même du travail, cet esprit d'équipe ne peut avoir comme base que la coopération intellectuelle.

A un autre point de vue, le Français moyen, doué d'esprit critique, aime à connaître les motifs de son action. Il s'intéresse à un travail dont il comprend la raison beaucoup plus qu'à une besogne cherchée machinalement. Sans compter, que parmi le personnel dessinateur il en est que les conditions de l'existence : raison de santé, de fortune, ont empêché de recevoir une formation qu'ils sont aptes à acquérir et qu'ils ont l'ambition d'atteindre. Leur permettre d'arriver à ce but, c'est-à-dire de s'élever socialement, tout en effectuant leur travail quotidien, est un moyen efficace de lutter contre le mandarinat qui tend à fixer, pour la vie, les valeurs relatives des individus d'après les diplômes de scolarité n'ayant qu'un rapport lointain avec la carrière ultérieure.

L'ouvrage de M. Vallat, Ingénieur à la S.N.C.A.S.E: « *Résistance des Matériaux appliquée à l'aviation* » vient heureusement combler une lacune.

En fait, il s'agit du cours professé par M. Vallat aux praticiens de sa Société et que celle-ci avait fait imprimer pour ses besoins.

On a suffisamment critiqué les Sociétés nationales pour qu'il me soit permis ici de rendre hommage à l'effort persévérant qu'a fait la S.N.C.A.S.E. pour élever le niveau des connaissances techniques de son personnel.

Ce traité est donc bien plus une œuvre didactique qu'un simple formulaire.

Les relations entre les contraintes et les déformations, pour les cas élémentaires, sont établies au moyen de considérations simples, pour chaque cas particulier, sans recourir à un appareil mathématique compliqué.

Il est évidemment élégant de partir des théories générales de l'élasticité et de déduire chaque cas élémentaire d'une théorie générale ; mais, en dehors du

fait qu'une telle manière de procéder nécessite une formation mathématique supérieure, elle revêt une forme abstraite qui ne laisse pas dans l'esprit la même trace que l'étude concrète de chaque cas particulier.

Pour les cas plus compliqués, et qui sont la norme en matière d'aviation, l'auteur se trouvait en présence d'une difficulté : d'une part, il ne pouvait donner les démonstrations théoriques nécessitant une formation préalable que ne possèdent pas, en général, ceux auxquels l'ouvrage est destiné, car il s'agit essentiellement d'un manuel à l'usage des techniciens des industries aéronautiques ; d'autre part, l'esprit même de ce manuel conduit à éviter de donner des formules brutales sans commentaires.

M. Vallat a résolu cette difficulté en donnant sans démonstration, un certain nombre de résultats théoriques de base qu'il utilise pour établir les formules relatives à chaque cas particulier.

C'est ainsi qu'il admet la généralisation de la formule de la déformation en torsion simple aux prismes creux, les résultats de la théorie de Saint-Venant, le théorème de Castigliano, la valeur du potentiel interne. Moyennant ces quelques postulats, il peut ensuite raisonner sur chaque cas particulier et en déduire les formules correspondantes.

D'ailleurs de nombreux abaques et exemples d'applications numériques sont donnés, qui constituent le meilleur guide à la fois pour le raisonnement et l'ordonnancement des calculs.

En résumé, l'ouvrage de M. Vallat remplit pleinement le but proposé de réaliser un manuel à l'usage des techniciens et spécialement des techniciens des industries aéronautiques. Il mérite une large diffusion dans tous les bureaux d'études auxquels il permettra des gains de temps appréciables, une augmentation de rendement et une amélioration de la valeur individuelle du personnel.

Les ingénieurs de haute culture mathématique ne perdront pas leur temps en le lisant. L'examen des cas concrets, traités avec des calculs simples, leur fera peut-être percevoir des réalités que les notions symboliques et le calcul tensoriel dissimulent dans leurs abstractions généralisatrices.

Je ne saurais trop féliciter M. Vallat d'avoir rappelé au début de son ouvrage, la correspondance qui existe entre l'unité de force du système courant et celle du système légal, depuis 1919, qui n'est pas seulement la conséquence d'un acte administratif, mais qui forme avec les unités électriques un système cohérent se reliant au système C. G. S. employé internationalement par les savants.

Que penser d'ailleurs de ce « système courant » dans lequel l'unité fondamentale « force » est variable d'un point du globe à un autre, qui ne possède pas d'unité de puissance et en est réduit à employer une unité pratique biscornue : le cheval-vapeur n'ayant même pas l'excuse de s'exprimer par une puissance de 10 en fonction de l'unité de travail.

Je sais bien la force des habitudes et qu'il a fallu cent cinquante ans et le bouleversement de l'économie résultant de deux guerres mondiales pour que le terme « sou » disparût de la circulation. Mais, tout de même, l'aviation est suffisamment moderne pour donner l'exemple.

Ingénieur général de l'Air (C.R.).
Directeur de l'Ecole Nationale
des moteurs à combustion et à explosion.

INTRODUCTION

Le succès d'un avion en service tient à un ensemble de qualités qui convergent pratiquement toutes vers le même but : l'efficacité militaire ou commerciale dans les conditions réelles d'exploitation.

Suivant la tendance du moment, je dirai même suivant la mode, l'accent est donné en priorité sur l'une ou l'autre de ces qualités : la sécurité, les performances, les qualités de vol, la rotation, la capacité d'emport, les facilités d'entretien, etc...

Mais il est une qualité qui reste toujours impérative, c'est la légèreté. Quel que soit le programme de l'avion, elle arrive toujours en tête des conditions qui font qu'un avion est efficace ou ne l'est pas.

Or, le poids de la structure compte pour environ 30 % dans le poids total. Une économie sur ce chapitre important est donc particulièrement payante. La résistance des matériaux préside à la réalisation de cette économie.

Cette dernière est d'autant plus importante que la charge militaire ou commerciale est souvent limitée à 10 % du poids total, si bien qu'avec une économie de 10 % sur le poids de structure, on peut gagner 30 % sur la charge payante. Le bénéfice que peut espérer une compagnie de transport en exploitant un appareil, est exactement du même ordre.

On pourrait penser que les progrès faits dans les autres branches de l'Aéronautique pourraient dispenser d'une étude approfondie des poids de structure. Il en est malheureusement tout autrement ; les progrès aérodynamiques ou autres ne sont possibles que grâce à une étude approfondie des structures. Pour ne citer qu'un exemple, je rappellerai que pour augmenter les vitesses, on est conduit à réduire l'épaisseur relative des voitures. Si l'on ne veut pas arriver à des poids de structure prohibitifs, il faut parallèlement améliorer le rendement de la matière. Il est donc indispensable que la résistance des matériaux reste en tête des préoccupations des Bureaux d'Etudes d'aviation. Pour cela, il faut disposer d'un traité bien adapté.

L'avantage de l'ouvrage de M. Vallat est d'avoir été rédigé dans le but bien précis de l'utilisation journalière par le personnel des Bureaux d'Etudes. Il est particulièrement facile à assimiler, même par des dessinateurs dont la culture mathématique n'est pas très élevée. Il permet quand même de résoudre tous les problèmes que l'on rencontre dans les avions les plus modernes.

Il a été mis à l'épreuve pendant plusieurs années à notre B. E. et il est maintenant bien au point.

Il constitue donc, à nos yeux, une preuve vivante du niveau élevé de la Technique Française et un rayon d'espoir en un avenir prospère pour notre Industrie Aéronautique.

Ingénieur en Chef
des Bureaux d'Etudes S.N.C.A.S.E., Toulouse.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

CONNAISSANCES GÉNÉRALES DE MATHÉMATIQUES ET DE MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DE NOTIONS DE MATHÉMATIQUES

CHAPITRE II

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE

CHAPITRE III

ÉQUILIBRE STATIQUE DES SYSTÈMES

CHAPITRE IV

STATIQUE GRAPHIQUE

DEUXIÈME PARTIE

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX GÉNÉRALE

CHAPITRE V

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX ESSAIS MÉCANIQUES DES MATÉRIAUX

CHAPITRE VI

TRACTION ET COMPRESSION SIMPLES

CHAPITRE VII

SYSTÈMES ARTICULÉS

CHAPITRE VIII

CISAILLEMENT

THÉORIE ET APPLICATIONS

CHAPITRE IX

FLEXION PLANE

THÉORIE ET APPLICATIONS

CHAPITRE X

DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES DES POUTRES FLÉCHIES

PAGES

CHAPITRE XI

FLEXION GAUCHE

CHAPITRE XII

FLEXION DES POUTRES EN BOIS

CALCUL DES POUTRES HÉTÉROGÈNES

CHAPITRE XIII

TORSION

THÉORIE ET APPLICATIONS

CHAPITRE XIV

CALCUL DES RESSORTS

CHAPITRE XV

COMBINAISON DES CONTRAINTES

TROISIÈME PARTIE

COMPLÉMENT DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX GÉNÉRALE

CHAPITRE XVI

FLAMBAGE DES POUTRES PRISMATIQUES

CHAPITRE XVII

CALCUL DES PLAQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

CHAPITRE XVIII

CALCUL DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES

QUATRIÈME PARTIE

APPLICATIONS PARTICULIÈRES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX EN CONSTRUCTION AÉRONAUTIQUE

CHAPITRE XIX

PROCÉDÉS DE CALCULS PARTICULIERS AUX CONSTRUCTIONS EN TOLE MINCE

CHAPITRE XX

GÉNÉRALITÉS SUR LES STRUCTURES D'AVIONS
STRUCTURES SANS REVÊTEMENT TRAVAILLANT

CHAPITRE XXI

CALCUL DES STRUCTURES A AMES MINCES

CHAPITRE XXII

CALCUL DES STRUCTURES COQUES

PREMIÈRE PARTIE

CONNAISSANCES GÉNÉRALES DE MATHÉMATIQUES ET DE MÉCANIQUE

CHAPITRE PREMIER

RAPPEL DE NOTIONS DE MATHÉMATIQUES

Le lecteur trouvera dans ce premier chapitre un résumé succinct de connaissances élémentaires de mathématiques, dont le but essentiel est de faire apparaître la définition de quelques symboles classiques utilisés dans la suite de l'ouvrage.

1. TRIGONOMÉTRIE

1.1 MESURE DES ANGLES.

En plus des unités courantes qui sont le *degré* (360ème partie du cercle) ou le *grade* (400ème partie du cercle) nous utiliserons, au cours des démonstrations, le *radian.*

L'angle mesurant un radian est celui qui ayant son sommet au centre d'une circonférence, intercepte entre ses côtés un arc de cercle dont la *longueur curviligne* est égale au rayon de cette circonférence.

L'angle $\alpha = \widehat{AOB}$ de la figure 1 mesure 1 radian quand $\widehat{AB} = R$.

La longueur développée d'une circonférence de rayon R étant $2\pi R$, le cercle mesure donc 2π radians et un angle de 1 radian équivaut à

$$\frac{360}{2\pi} = 57{,}3 \text{ degrés}$$

ou

$$\frac{400}{2\pi} = 63{,}7 \text{ grades.}$$

FIG. 1.

Un angle droit (90°) vaut $\frac{\pi}{2}$ radian et un angle plat (180°) π radians. Cette unité de mesure présente l'avantage de définir directement la longueur de l'arc intercepté.

Exemple : Un angle de α radians intercepte un arc de cercle de longueur αR et inversement, si l'arc intercepté a une longueur connue égale à αR, l'angle mesure α radians.

1.2 LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES.

Considérons un triangle rectangle OPM où l'angle droit est situé au sommet P et désignons par α l'angle $\widehat{MOP}$ (fig. 2).

On désigne par :

sin α (sinus α) le rapport $\frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \frac{\text{côté de l'angle droit opposé à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$

cos α (cosinus α) le rapport $\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\text{côté de l'angle droit adjacent à } \alpha}{\text{hypoténuse}}$

tg α (tangente α) le rapport $\frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\text{côté de l'angle droit opposé à } \alpha}{\text{côté de l'angle droit adjacent à } \alpha}$

cotg α (cotangente α) le rapport $\frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} = \frac{\text{côté de l'angle droit adjacent à } \alpha}{\text{côté de l'angle droit opposé à } \alpha}$.

On voit que ces quatre grandeurs qui mesurent chacune des *rapports de longueurs* sont des grandeurs sans dimension, c'est-à-dire qu'elles ne varient pas, quels que soient les systèmes d'unités employés pour mesurer les longueurs des côtés (voir Définition des dimensions, chapitre II, paragraphe **0.1**).

Ces grandeurs sont appelées *lignes trigonométriques* de l'angle α ; on définirait d'une façon analogue les lignes trigonométriques relatives à l'autre angle aigu du triangle considéré.

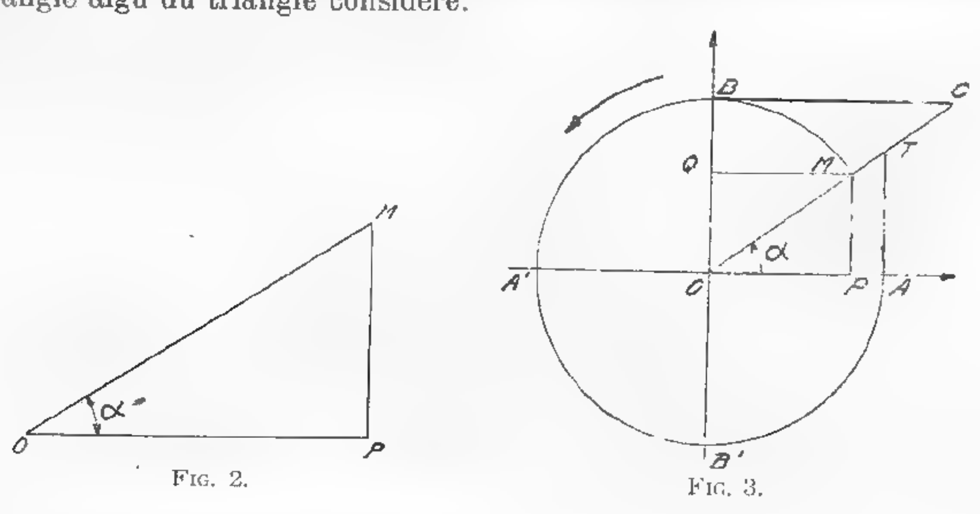


FIG. 2. FIG. 3.

1.3 CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE.

Une représentation géométrique très pratique des lignes trigonométriques est fournie par le *cercle trigonométrique.*

On désigne ainsi un cercle de centre O (fig. 3) dont le rayon R est supposé égal à l'unité de mesure des longueurs.

On envisage deux diamètres rectangulaires AA′ et BB′ de ce cercle et l'on suppose un mobile M se déplaçant sur la circonférence dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (*sens trigonométrique*). L'emplacement de M est repéré par l'angle $\alpha = \widehat{AOM}$ *compté positivement dans le sens trigonométrique.*

On obtient alors d'après les définitions précédentes :

$$\sin \alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OQ}}{R} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ}.$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OP}}{R} = \frac{\overline{OP}}{1} = \overline{OP}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}.$$

On voit donc que les rapports sans dimension constituant les lignes trigonométriques sont, grâce à l'hypothèse d'un rayon égal à 1, matérialisés par des longueurs sur le cercle trigonométrique.

— Le diamètre vertical BB′ est appelé *axe des sinus :* Le sinus d'un angle est positif quand son extrémité M se projette au-dessus de O sur cet axe.

— Le diamètre horizontal AA′ est appelé *axe des cosinus :* Le cosinus est positif quand M se projette à droite de O sur cet axe.

On définit de même :

— Deux *axes des tangentes* qui sont constitués par les tangentes en A et A′ au cercle trigonométrique. La tangente en A est positive vers le haut et la tangente en A′ positive vers le bas.

— Deux *axes des cotangentes :* Axes tangents en B et B′ au cercle trigonométrique. L'axe tangent en B est positif vers la droite et l'axe tangent en B′ positif vers la gauche.

Le point M se projette toujours sur les axes des tangentes ou cotangentes qui sont relatifs au quadrant auquel appartient ce point.

On voit que les sinus et les cosinus sont toujours (en valeurs absolues) plus petits que 1 ou au maximum égaux à 1 puisque leurs vecteurs représentatifs sont inférieurs ou égaux au rayon $R = 1$ du cercle trigonométrique.

Par contre, les tangentes et cotangentes varient de l'infini positif à l'infini négatif.

1.4 RELATIONS ESSENTIELLES.

D'après les relations ci-dessus, on a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{PM}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{OP}}$$

soit

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

De même

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OM}} \cdot \frac{\overline{OM}}{\overline{PM}}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \quad \text{et donc} \quad \boxed{\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}}$$

Dans le triangle rectangle OPM nous avons :

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM}^2$$

ce qui s'écrit :

$$\left(\frac{\overline{PM}}{\overline{OM}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{OP}}{\overline{OM}}\right)^2 = 1$$

d'où :

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

1.5 VALEURS USUELLES.

Le tableau ci-après donne les valeurs des lignes trigonométriques de quelques angles usuels inférieurs à $\frac{\pi}{2} = 90°$, dont la mesure s'exprime par une fraction exacte des π radians.

ANGLES α		LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES			
Degrés	Radians	sin α	cos α	tg α	cotg α
0	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$	$\sqrt{3} = 1{,}732$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\sqrt{3} = 1{,}732$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

1.6 RELATIONS COMPLÉMENTAIRES.

L'examen du cercle trigonométrique de la figure 4 permet de faire ressortir les relations suivantes :

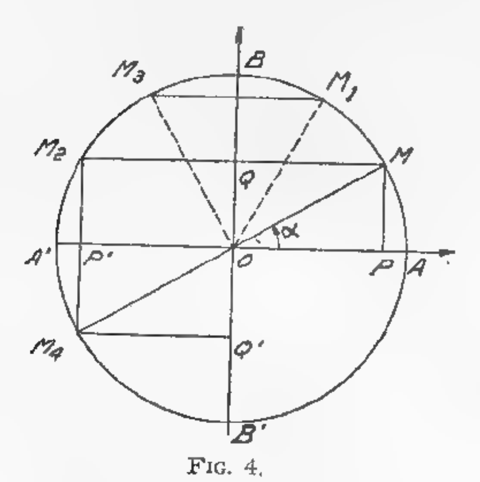


FIG. 4.

Angles complémentaires (somme égale à $90° - \frac{\pi}{2}$ rad.).

$$\widehat{AOM_1} = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cotg}\,\alpha$$

$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{tg}\,\alpha$$

Angles supplémentaires (somme égale à $180° = \pi$ rad.).

$$\widehat{AOM_2} = \pi - \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$$
$$\text{cotg}(\pi - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha.$$

Angles différant de $90° = \frac{\pi}{2}$ rad.

$$\widehat{AOM_3} = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)= \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Angles différant de 180° = π rad.

$$\widehat{AOM_4}=\pi+\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(\pi+\alpha)=\operatorname{cotg}\alpha.$$

On a de plus les relations suivantes entre deux angles dont la mesure de l'un est double de celle de l'autre :

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

d'où : $$\begin{cases}\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}\\[2mm] \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}\end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$
$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$$

et les relations suivantes concernant les sommes ou différences de deux angles α et β :

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\ ;\quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ ;\quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

1.7 REMARQUE CONCERNANT LES PETITS ANGLES.

Pour de petits angles α (inférieurs à 5° par exemple), les longueurs PM ($\sin\alpha$), AT ($\operatorname{tg}\alpha$) et l'arc $\widehat{AM}$ sont très peu différents (fig. 3). On confond alors l'arc $\widehat{AM}$, c'est-à-dire *l'angle α exprimé en radians*, avec les valeurs du sinus et de la tangente de cet angle.

Nous utiliserons fréquemment cette approximation dans les démonstrations où nous aurons à envisager des angles très petits.

2. LOGARITHMES

2.1 DEFINITION.

Un nombre positif quelconque A est toujours égal à une certaine puissance N^{eme} d'un autre nombre B, ce qui s'écrit :

$$A=B^N$$

On dit alors que N est le *logarithme* de A selon la *base* B.

2.2 LOGARITHMES VULGAIRES.

Ce sont les logarithmes ayant pour base B = 10.

Considérons la suite des nombres inscrits ci-dessous dans la première rangée, elle peut s'écrire selon les expressions correspondantes de la deuxième rangée.

...	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000	...
...	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	...

Les puissances affectant la base 10 sont donc les logarithmes vulgaires des nombres auxquels elles correspondent. Ce sont des nombres entiers.

Exemple : Logarithme vulgaire de 100 = 2, ce qui s'écrit

$$\log.\ 100 = 2$$

De même :

$$\log.\ 1000 = 3 \qquad \text{etc...}$$

On conçoit qu'un nombre compris entre 100 et 1.000 aura pour logarithme vulgaire un nombre compris entre 2 et 3 qui est donné par les *tables*.

Exemple :

$$\log\ 421 = 2{,}62428.$$

De même un nombre compris entre 0,01 et 0,1 aura un log. compris entre — 2 et — 1.

Exemple :

$$\log.\ 0{,}0421 = \overline{2}{,}62428\ [1].$$

2.3 LOGARITHMES NATURELS OU NÉPERIENS.

Ces logarithmes ont pour base le nombre

$$e = 2{,}71828...$$

qui jouit de propriétés mathématiques remarquables et entre en jeu dans certaines formules relatives à des phénomènes où la variable est elle-même *entretenue* par la grandeur de la fonction. Les logarithmes correspondants se représentent par la lettre L. La *relation* suivante relie les *logarithmes néperiens* aux *logarithmes vulgaires :*

$$\mathrm{L}\ a = 2{,}30259\ \log.\ a$$

et inversement :

$$\log.\ a = 0{,}43429\ \mathrm{L}\ a$$

2.4 PROPRIÉTÉS DES LOGARITHMES.

Leurs principales propriétés sont définies par les relations suivantes [2] qui se déduisent immédiatement de la définition générale des logarithmes.

$$\log a \, . \, b = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log a^n = n \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a$$

L'usage des logarithmes permet donc de substituer aux multiplications ou divisions de simples additions ou soustractions et aux puissances ou racines des multiplications ou divisions.

---

1. — Notation équivalente à — 2 + 0,62428.

2. — Les expressions ci-dessus sont données avec les notations correspondant aux logarithmes vulgaires qui sont les plus utilisés. Elles sont générales pour tous les systèmes. (Pour le système néperien remplacer log par L.)

2.5 RÈGLE A CALCULS.

La règle à calculs constitue une application des propriétés des logarithmes. Les graduations inscrites sur la règle et la réglette étant *logarithmiques*, ceci explique qu'en les additionnant ou en les soustrayant (ce qui s'opère par déplacement de la réglette), on réalise des multiplications ou des divisions.

Les puissances 2 et 3 (ou les racines carrées et cubiques) y sont lues directement grâce aux échelles supérieures deux fois et trois fois plus faibles que les échelles inférieures.

Nous n'entrerons pas dans le détail du maniement des diverses règles à calculs qui est suffisamment expliqué dans les notices jointes à ces instruments.

2.6 DIAGRAMMES EN COORDONNÉES LOGARITHMIQUES.

L'emploi d'*échelles logarithmiques* permet pour certains diagrammes (ou *abaques*) de substituer des droites à des lignes représentatives curvilignes, ce qui améliore grandement la précision.

Il permet, en outre, d'effectuer par des figures polygonales simples des séries d'opérations ou de tracés qui seraient très ardus en coordonnées ordinaires.

Nous trouverons de nombreuses applications de ces diagrammes.

2.7 REMARQUE CONCERNANT LES PUISSANCES DE 10.

Nous avons été conduits au paragraphe **2.2** ci-dessus à remplacer par des puissances de 10 les nombres présentant une suite de zéros.

Exemples : $10.000 = 10^4$; $0{,}001 = 10^{-3}$

Nous rencontrerons fréquemment, au cours des calculs, des grandeurs intermédiaires exprimées par des nombres très élevés ou très faibles. Il est alors recommandé d'utiliser des multiplicateurs où figurent des puissances de 10 afin de faciliter les calculs numériques.

Exemples : 61232000 s'écrira $61{,}232 \cdot 10^6$ et 0,00000121 s'écrira $1{,}21 \cdot 10^{-6}$.

On aurait ainsi directement, dans cet exemple, l'ordre de grandeur du produit de ces deux nombres qui est :

$$61{,}232 \cdot 10^6 \cdot 1{,}21 \cdot 10^{-6} = 61{,}232 \cdot 1{,}21 \cdot 10^{(6-6)} = 61{,}232 \cdot 1{,}21 = 74{,}1$$

ou encore une expression facile de leur quotient :

$$\frac{61{,}232 \cdot 10^6}{1{,}21 \cdot 10^{-6}} = \frac{61{,}232}{1{,}21} \cdot 10^{(6+6)} = 50{,}6 \cdot 10^{12}.$$

Dans une suite d'opérations de ce genre effectuées dans un tableau, la puissance de 10 multiplicatrice sera indiquée en tête de chaque colonne.

3. FONCTIONS. REPRÉSENTATION. NOTATIONS

3.1 DEFINITION.

Si deux quantités y et x sont telles que toute variation de l'une entraîne une variation de l'autre, on dit que *ces deux quantités sont fonction l'une de l'autre.*

On appelle *fonction* la grandeur que l'on étudie, et *variable* celle qui joue le rôle accessoire.

Pour les fonctions simples, il est d'usage de réserver la lettre y à la fonction et la lettre x à la variable et l'on écrit $y = f(x)$, ce qui se prononce $y = f$ de x et signifie que y est fonction de x [1].

Degré d'une fonction. — La fonction y précédente est du 1er degré en x si $f(x)$ est du 1er degré en x.

La fonction y précédente est du 2e degré en x si $f(x)$ est du 2e degré en x.

. . . .

y est du ne degré en x si $f(x)$ est du ne degré en x.

Une fonction du premier degré s'appelle encore *fonction linéaire*, car sa *courbe représentative* est une droite (voir ci-après).

3.2 EXEMPLES PHYSIQUES DE FONCTIONS.

L'espace parcouru par un mobile se déplaçant à vitesse constante est fonction du temps pendant lequel il se déplace (fonction linéaire).

Le rendement dans l'exécution d'un travail est fonction de la rapidité avec laquelle on l'accomplit.

La rapidité pouvant elle-même être fonction d'autres variables telles que l'habitude, on arrive ainsi à la notion de *fonction de fonction*.

Une telle fonction s'écrirait par exemple

$y = f[u(x)]$ et se lit : f de u de x [2]

3.3 REPRESENTATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS.

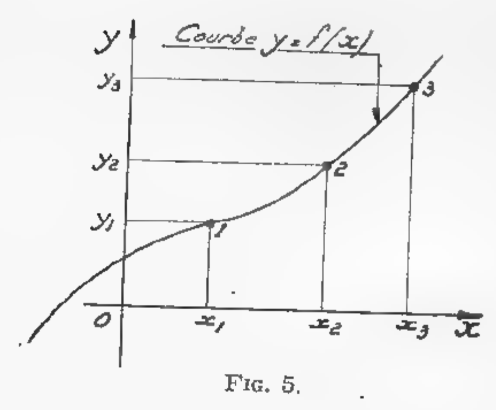


Fig. 5.

Toute fonction simple peut se représenter dans le plan par rapport à deux axes rectangulaires.

L'axe horizontal est l'axe des *abscisses* généralement réservé à la variable (axe Ox, fig. 5).

L'axe vertical est l'axe des *ordonnées* généralement réservé à la fonction (axe Oy, fig. 5).

Le sens positif du parcours de ces axes s'indique par des flèches.

La courbe représentative $y = f(x)$ se construit par points en connaissant (ou en calculant) les valeurs de y correspondant à chaque valeur de x.

Exemple (fig. 5) : pour $x = x_1$ on a $y = y_1$ d'où point 1.

Le lieu de ces points constitue la *courbe représentative* de la fonction étudiée $y = f(x)$.

1. — Les lettres utilisées, en général, pour toutes les fonctions ou variables, c'est-à-dire pour les quantités soumises à des variations, sont les dernières de l'alphabet, soit : t, u, v, w, x, y, z. On réserve les premières lettres pour les quantités ou facteurs invariables.

2. — Ici la variable u est elle-même fonction d'une variable auxiliaire x. Il existe des fonctions de plusieurs variables *indépendantes* entre elles. On les écrit alors : $y = f(x_1, x_2, x_3 ...)$, soit f de $x_1, x_2, x_3 ...$

3.4 ACCROISSEMENT DES FONCTIONS. NOTATIONS.

Considérons les points 1 et 2 appartenant à la fonction $y=f(x)$ représentée par la figure 5 ci-dessus.

Entre ces points, la variable x a subi un *accroissement* mesuré par la distance $x_1 x_2$ et la fonction y a subi corrélativement un *accroissement* mesuré par $y_1 y_2$.

On convient, d'une façon générale, de désigner ces accroissements en faisant précéder le symbole de la grandeur étudiée, de la lettre grecque Δ.

Les accroissements de x se désignent par Δx et ceux de y par Δy.

Remarquons, de plus, que l'on réserve habituellement ces notations à des accroissements suffisamment petits pour qu'on puisse admettre que la fonction a elle-même une variation linéaire dans l'intervalle, c'est-à-dire pour que l'on puisse remplacer la courbe représentative par une ligne polygonale très voisine.

Nous utiliserons fréquemment ces notations dans les formules ou démonstrations qui vont suivre.

En analyse, on envisage des accroissements appelés *infiniment petits* c'est-à-dire aussi petits que l'on voudra, et on les représente alors d'une façon analogue en remplaçant Δ par d.

On obtient ainsi des infiniments petits dx et dy.

4. DÉRIVÉES DES FONCTIONS

4.1 DÉFINITION IMAGÉE.

Considérons la fonction $y=f(x)$ représentée par la courbe 1 de la figure 6 et supposons, pour fixer les idées, qu'elle représente la coupe verticale d'une colline.

Pour l'établir, on a effectué des cheminements se projetant sur le plan horizontal par des accroissements Δx et l'on a déterminé (par nivellement) les différentes altitudes c'est-à-dire les accroissements Δy de la *fonction altitude y* étudiée (fonction de la variable espaces horizontaux). On a ainsi obtenu par points la courbe 1 A chaque accroissement Δx correspond un accroissement bien défini Δy et la *relation entre ces accroissements caractérise l'allure de la fonction dans l'intervalle considéré.*

Cette *allure* peut se définir par le *rapport des accroissements*, soit : $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, qui figurera ici la *pente moyenne* de la colline dans l'intervalle considéré.

Entre les points A et B, par exemple, la pente moyenne est celle de la droite AB, c'est-à-dire la tangente de l'angle α formé par AB avec l'horizontale Ox :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Supposons que B *se rapproche indéfiniment de* A, la droite AB sera alors confondue avec la *tangente en* A *à la courbe :* $y=f(x)$ et la *pente de cette tan-*

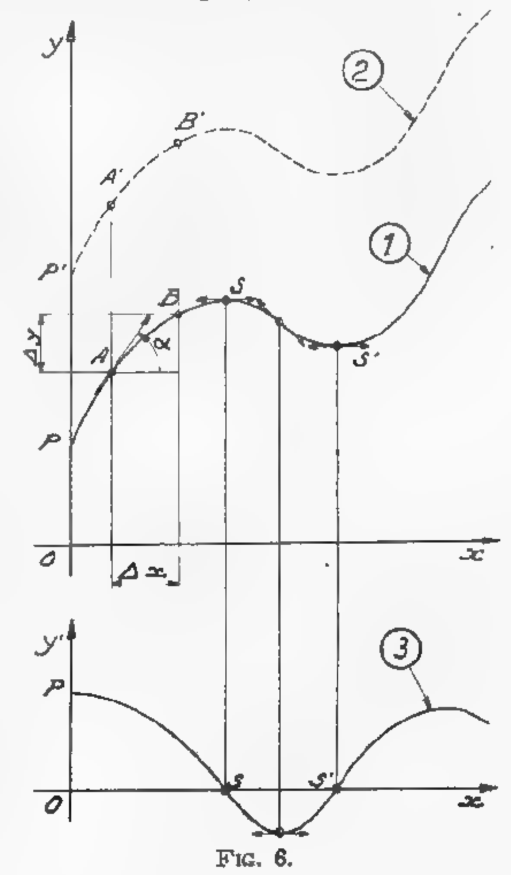


FIG. 6.

gente (pente de la colline en A) sera mesurée par la *limite du rapport* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *quand la variable* Δx *tend vers zéro.*

On désigne cette limite par la *dérivée de la fonction y au point considéré.* Avec les notations indiquées ci-dessus, elle se représente par le rapport $\frac{dy}{dx}$.

On utilise encore plus simplement l'indice ' (prime) affectant la lettre représentative de cette fonction : c'est-à-dire ici y'.

Dérivée de la fonction $y=f(x)$: $y'=\frac{dy}{dx}$.

La dérivée d'une fonction en un point donné (c'est-à-dire pour une valeur donnée de la variable) *est donc mesurée par la pente de la tangente en ce point à la courbe représentative de cette fonction.*

4.2 PROPRIÉTÉS DE LA DÉRIVÉE.

L'exemple envisagé ci-dessus permet de dégager les *propriétés principales des dérivées des fonctions* (voir fig. 6).

a) Dans la partie PS où l'altitude croît, la pente est *positive* (montée) tandis que dans la partie SS' elle est *négative* (descente).

Règle : *La dérivée d'une fonction croissante est positive. La dérivée d'une fonction décroissante est négative.*

b) Au sommet S ou au col S' *la pente est nulle* [1]. Ces deux points correspondent respectivement à un maximum et à un minimum de la fonction altitude.

Règle : *Quand une fonction passe par un maximum ou un minimum, sa dérivée s'annule.*

La réciproque de cette règle est utilisée pour la recherche des maxima ou des minima des fonctions.

c) Supposons que l'on ait tracé le profil de la colline en partant d'un point P' au lieu de P (décalage de l'échelle *y*), on aurait obtenu la courbe 2 *parallèle en tous points* à la courbe 1.

Pour une même valeur de la variable *x* (points A et A' ou B et B' par exemple) les pentes de ces courbes sont identiques.

Règle : *Deux fonctions différant entre elles d'une quantité constante ont même dérivée.*

On en déduit immédiatement que *la dérivée d'une constante est nulle.*

4.3 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION.

Si l'on représente sur un diagramme les dérivées y' de la fonction $y=f(x)$ étudiée figure 6, on obtient la courbe 3 qui donne en chaque point la pente de la colline représentée par la courbe 1 c'est-à dire la *courbe représentative des pentes.*

La dérivée d'une fonction constitue donc également une fonction de la variable : fonction $y'=f'(x)$.

La fonction d'origine $y=f(x)$ s'appelle *fonction primitive.*

La fonction $y'=f'(x)$ s'appelle *fonction dérivée.*

---

1. — La pente cesse, en effet, de croître pour décroître ou inversement.

4.4 EXPRESSIONS DES DÉRIVÉES DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES.

Le tableau ci-après fait apparaître les dérivées y' de quelques fonctions simples $y=f(x)$ et de quelques fonctions de fonctions $y=f(u, v)$ où u et v sont elles-mêmes des fonctions de x.

Dans ce tableau, les lettres a et b désignent des quantités constantes.

FONCTIONS SIMPLES		FONCTIONS DE FONCTIONS	
Fonctions primitives	Fonctions dérivées	Fonctions primitives	Fonctions dérivées
$y = a$	$y' = 0$	$y = au$	$y' = au'$
$y = x$	$y' = 1$	$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = ax$	$y' = a$	$y = uv$	$y' = u'v + uv'$
$y = ax + b$	$y' = a$	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$y = x^2$	$y' = 2x$		
$y = ax^2$	$y' = 2ax$	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = ax^3$	$y' = 3ax^2$		
$y = ax^m$	$y' = amx^{m-1}$	$y = u^n$	$y' = nu^{n-1}u'$
$y = \frac{a}{x}$	$y' = -\frac{a}{x^2}$		
$y = a\sqrt{x}$	$y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$		
$y = e^x$ [1]	$y' = e^x$		
$y = e^{ax}$	$y' = ae^{ax}$		
$y = \sin x$	$y' = \cos x$		
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$		
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$		

4.5 DÉRIVÉES SUCCESSIVES.

Supposons que l'on dérive de nouveau la fonction $y'=f'(x)$.

On obtiendra une nouvelle fonction $y''=f''(x)$ représentant en chaque point la *rapidité d'accroissement de la pente.*

Cette fonction est appelée *dérivée seconde* de la fonction y dont la fonction y' (courbe 3) était la *dérivée première.* On passe donc de la dérivée première à la dérivée seconde de la même façon que de la primitive à la dérivée première et l'on retrouve entre y'' et y' les mêmes relations ou propriétés qu'entre y' et y.

Notation différentielle. — De même que la dérivée première y' s'exprime par la notation $\frac{dy}{dx}$ la dérivée seconde y'' s'exprime par $\frac{d^2y}{dx^2}$, la troisième y''' par $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc...

Exemple : L'exemple le plus classique de fonction à dérivées multiples

1. — Le nombre $e = 2,71828$ est la base des logarithmes néperiens (§ 2.3)

ayant un sens physique bien déterminé, est celui de la fonction « *espace parcouru par un mobile en fonction de la variable temps* » ; soit

$$y = L = f(t).$$

La dérivée première de cette fonction figure en chaque point de l'évolution la *vitesse* du mobile (accroissement de l'espace pendant l'unité de temps) :

$$V = y' = \frac{dL}{dt}.$$

Unité : m/sec par exemple ; dimension ; $\frac{\text{longueur}}{\text{temps}} = \frac{L}{t} = Lt^{-1}$ (voir chapitre II, § 0.1).

La dérivée seconde représente l'*accélération* du mouvement c'est-à-dire la vitesse d'accroissement de la vitesse du mobile ou accroissement de la vitesse pendant l'unité de temps :

$$\gamma = y'' = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2L}{dt^2}.$$

Unité : m/sec ² par exemple ; dimension : $\frac{\text{longueur}}{\text{temps}^2} = \frac{L}{t^2} = Lt^{-2}$.

5. NOTIONS SUR L'INTÉGRATION DES FONCTIONS

5.1 DÉFINITION.

Passer de la fonction primitive y à la fonction dérivée y' est l'opération de *dérivation*.

Inversement, passer de y' à y est l'opération dite *d'intégration*.

5.2 UTILITÉ DE L'INTÉGRATION.

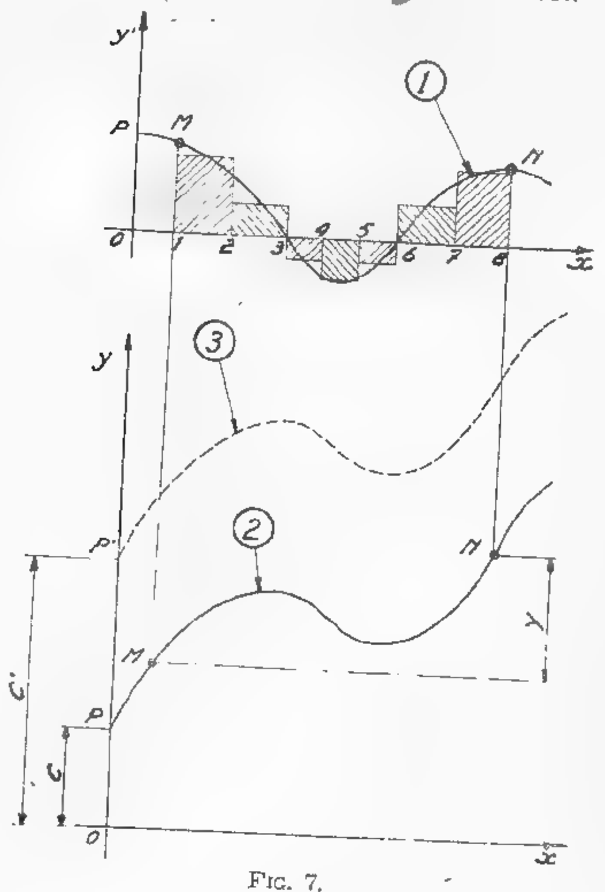


Fig. 7.

L'étude de nombreux phénomènes se conduit en partant d'*accroissements élémentaires* qui se déduisent la plupart du temps de considérations physiques. Nous en verrons de nombreux exemples, par la suite.

On obtient ainsi des accroissements Δy en fonction d'accroissements Δx de la variable et le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ figure donc, en chaque point la « pente » c'est-à-dire la dérivée y' de la fonction y devant traduire le phénomène étudié.

Pour rester fidèles à l'exemple du paragraphe 4, supposons que pour étudier la forme de la colline on ait utilisé à la place d'un instrument de mesure des hauteurs, un niveau gradué permettant de connaître en chaque point la pente du profil étudié. On aurait ainsi obtenu par points la courbe $y' = f'(x)$ reproduite figure 7 (courbe 1).

Le problème d'intégration consiste à restituer le profil (fonction $y=f(x)$) en partant de cette courbe de pentes.

5.3 OPÉRATION D'INTÉGRATION. SYMBOLES.

Supposons que dans chaque intervalle Δx entre les points de mesure (intervalles 0-1, 1-2, 2-3, etc...), suffisamment rapprochés, on puisse admettre la pente constante et égale à sa valeur moyenne dans l'intervalle considéré. On substitue ainsi à la courbe y' une *courbe en escalier* aussi voisine que l'on voudra de y'.

L'accroissement d'altitude dans chaque intervalle est alors égal au produit de la pente par la longueur de l'intervalle, soit

$$\Delta y = y' \cdot \Delta x$$

relation qui se déduisait mathématiquement d'une façon directe de la définition

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

L'expression de Δy ci-dessus représente pour chaque intervalle l'*aire du rectangle hachuré correspondant* (produit de la largeur Δx par la hauteur y', voir fig. 7).

Si on connaît l'altitude $y=C$ du point de départ P, on connaîtra donc en tous points l'altitude de la colline en ajoutant, à cette *constante* C, les accroissements Δy rencontrés depuis le départ. On aura donc à effectuer une *somme d'accroissements élémentaires* ce qui s'exprime par la lettre grecque Σ (sigma) précédant le symbole de l'accroissement et l'on obtiendra :

$$y = \Sigma\ \Delta y + C$$

soit :

$$y = \Sigma\ y' \Delta x + C.$$

C'est l'expression d'une *intégration* qui est dite *indéfinie* quand la valeur de C est posée algébriquement et que les limites de la somme ne sont pas précisées.

Elle permet d'obtenir par points la courbe y (somme de *surfaces partielles* ajoutées à une constante C) figurée par la courbe 2.

Notation différentielle. — Avec les notations différentielles utilisées au paragraphe 4 on aurait obtenu

$$y = \int y' dx + C$$

le signe $\int$ se prononçant « somme de ».

Elle définit l'équation de la courbe $y=f(x)$.

5.4 CONSTANTE D'INTÉGRATION.

Pour construire y, il nous a fallu connaître une valeur C que nous avons d'ailleurs arbitrairement choisie au point de départ de la courbe, car les sommes algébriques auraient pu s'effectuer de part et d'autre d'un point de passage quelconque connu.

Cette valeur C est appelée *constante d'intégration.*

Si on était parti d'une valeur C' au lieu de C on aurait obtenu la courbe 3 différant avec 2 d'une *quantité constante* C'—C et ayant donc bien même dérivée (voir § **4.2**).

5.5 INTÉGRALES DÉFINIES.

5.51 **Définition. Signification géométrique.** — Supposons que l'on ait eu à rechercher seulement la *variation* Y d'altitude *entre deux points bien définis* M et N d'abscisses 1 et 8 (fig. 7). Nous aurions eu seulement à effectuer de M à N la somme de tous les Δy, ce qui s'écrit :

$$Y = \sum_M^N \Delta y = \sum_M^N y' \Delta x$$

Cette somme représente le *total algébrique des aires hachurées* (les aires situées en dessous de l'axe Ox étant prises avec un signe négatif). Avec la *notation différentielle* nous aurions

$$Y = \int_1^8 y' dx$$

ce qui figure la *somme (algébrique) des aires limitées par la courbe* y' *et l'axe* Ox *entre les abscisses* 1 *et* 8.

5.52 **Opérations graphiques.** — On se rend donc compte qu'une intégrale définie équivaut graphiquement à une *mesure de surface* c'est-à-dire à un *planimétrage*. C'est pratiquement le procédé industriel de calcul de ces intégrales. Nous en trouverons de nombreuses applications par la suite.

Nota. — Le calcul d'une intégrale indéfinie, c'est-à-dire la recherche de la courbe figurative d'une fonction peut se faire en calculant une suite d'intégrales définies (sommes partielles) ce qui donne une suite de points de la courbe compte tenu de la constante C. C'est le procédé que nous avons décrit au paragraphe 5.3 [1].

5.53 **Opérations numériques.** — Au lieu de tracer la courbe y' et de la planimétrer entre deux limites données pour obtenir la valeur de l'intégrale définie Y, nous aurions pu nous contenter de disposer les calculs dans un tableau du genre de celui ci-dessous

Repère des intervalles	Δx	y'	$y' \Delta x$
1 - 2	—	—	—
2 - 3	—	—	—
3 - 4	—	—	—
4 - 5	—	—	—
5 - 6	—	—	—
6 - 7	—	—	—
7 - 8	—	—	—
			$Y = \Sigma_1^8 y' \Delta x$

Le résultat cherché $Y = \Sigma_1^8 y' \Delta x$ serait obtenu par simple *addition* des termes (surfaces partielles) de la dernière colonne et serait d'autant plus précis que les accroissements Δx envisagés sont plus petits.

Nous utiliserons souvent cette méthode.

1. — Nous donnerons au chapitre IV (§ 8) un procédé entièrement graphique plus direct.

5.54 Opérations algébriques. — Connaissant l'expression :

$$y = \int y' dx + C$$

d'une intégrale indéfinie (voir ci-après), on obtient la valeur d'une intégrale définie :

$$Y = \int_{x_1}^{x_2} y' dx$$

en remplaçant successivement dans l'expression de y la variable x par les limites x_2 et x_1 et en effectuant la *différence* des termes correspondants, soit :

$$Y = (y \text{ avec } x = x_2) - (y \text{ avec } x = x_1).$$

5.6 EXPRESSION DES INTÉGRALES INDÉFINIES DE QUELQUES FONCTIONS USUELLES.

Voir tableau ci-dessous. Mêmes conventions qu'au paragraphe 4.5. Rappelons que C désigne la *constante d'intégration* (point de passage connu). Remarquons que ces expressions se déduisent directement de celles des dérivées.

$\int dx = x + C$	$\int \frac{a}{\sqrt{x}} dx = 2a\sqrt{x} + C$
$\int a dx = ax + C$	$\int e^x dx = e^x + C \quad (e = 2{,}71828)$
$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$\int ax dx = \frac{ax^2}{2} + C$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int ax^2 dx = \frac{ax^3}{3} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \mathrm{tg}^2 x) dx = \mathrm{tg}\, x + C$
$\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C$	$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C$
$\int \frac{a}{x^2} dx = -\frac{a}{x} + C$	$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C$

$$\int x \sin nx \, dx = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin nx}{n} - x \cos nx\right) + C$$

$$\int x \cos nx \, dx = \frac{1}{n}\left(\frac{\cos nx}{n} + x \sin nx\right) + C$$

$$\int \sin nx \cos n'x \, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos (n+n')x}{n+n'} + \frac{\cos (n-n')x}{n-n'}\right] + C$$

$$\int \sin nx \cdot \sin n'x \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (n-n')x}{n-n'} - \frac{\sin (n+n')x}{n+n'}\right] + C$$

$$\int \cos nx \cdot \cos n'x \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (n+n')x}{n+n'} + \frac{\sin (n-n')x}{n-n'}\right] + C$$

CHAPITRE II

ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE

Nous avons groupé dans ce chapitre quelques notions de Mécanique générale et en particulier de Mécanique statique, nécessaires pour une compréhension rationnelle de la suite de l'ouvrage.

Il est à signaler que les deux chapitres suivants compléteront ces notions en ce qui concerne les problèmes particuliers d'équilibrages et les opérations graphiques permettant la résolution directe de nombreux exercices.

0. REMARQUES PRÉLIMINAIRES

0.1 ÉQUATIONS AUX DIMENSIONS.

Pour préciser la nature des grandeurs étudiées en Mécanique, il est très utile de faire appel à la notion *d'équations aux dimensions* [1]. Ces équations sont constituées par un groupe de lettres représentant les symboles des différents facteurs qui entrent dans la grandeur étudiée. Ces symboles sont affectés d'exposants qui indiquent leur « degré particulier d'utilisation » (voir ci-après).

Les équations aux dimensions permettent toujours de définir exactement la *désignation des unités* à utiliser pour mesurer les grandeurs auxquelles elles se rapportent. Elles constituent également un *moyen de vérification rapide de l'homogénéité* des résultats obtenus au cours de démonstrations algébriques. Elles servent également parfois de *guide pour l'étude de certains phénomènes* régis par plusieurs variables.

Les *trois symboles* pouvant entrer dans les équations aux dimensions sont :

la *masse* (voir § **1.1** ci-dessous) : symbole M,
l'*espace* (ou longueur) : symbole L,
le *temps :* symbole T.

Remarques. — a) Nous avons déjà été conduits, au chapitre I (§ **4.5**), à définir les dimensions de :

la vitesse V ; équation aux dimensions : $V = LT^{-1}$;
l'accélération γ ; équation aux dimensions : $\gamma = LT^{-2}$.

Cet exemple suffit déjà pour préciser le mécanisme d'établissement des équations aux dimensions et pour permettre de juger de leur utilité vis-à-vis de la désignation des unités à utiliser [2].

1. — Ces équations sont souvent désignées, plus simplement, par *dimensions* de ces grandeurs.

2. — Voir également les nombreux exemples donnés par la suite.

b) En *Résistance des matériaux*, nous utiliserons (dans un but de simplification) un autre symbole qui est celui des forces : symbole F. Nous verrons ci-après qu'il ne constitue lui-même, en réalité, qu'une combinaison des trois symboles fondamentaux M, L et T.

c) L'étude des phénomènes physiques se fait généralement en faisant ressortir des « *paramètres sans dimensions* ». Ce sont des *coefficients absolus* indépendants du système d'unités utilisé. Ils ont pour dimension 1.

Exemple. — Un rapport de longueurs : $c = \frac{l}{l'}$ constitue un coefficient sans dimension.

Equation aux dimensions : $c = \frac{L}{L} = 1$.

0.2 SYSTÈMES D'UNITÉS UTILISÉS.

Il existe en Physique des systèmes d'unités dits « *systèmes légaux* » (Système M. T. S., C. G. S.) qui présentent un avantage théorique incontestable et doivent être appelés à supplanter le *système d'unités transitoires* courant (système dit « *industriel* »).

Nous continuerons malgré tout, dans cet ouvrage, à utiliser exclusivement le système *industriel* qui présente l'avantage de faire appel aux ordres de grandeur connus d'une façon courante.

Nous donnons néanmoins, en *Annexe* au présent chapitre (§ **10**) une étude succincte des différents systèmes d'unités, suivie d'un tableau fixant les correspondances qui existent entre ces systèmes.

1. DÉFINITIONS PRINCIPALES

1.1 NOTION DE MASSE.

La *masse d'un corps* est une des notions les plus délicates à définir physiquement.

On désigne par le terme *masse* la *constante caractéristique d'un corps, invariable dans le temps et dans l'espace, qui vérifie la « Relation fondamentale de la Mécanique »* (voir ci-dessous) [1].

Masse spécifique. — On désigne par « *masse spécifique* » ou « *densité de masse* » d'un corps, la masse de l'unité de volume de ce corps.

Elle s'exprime par la relation :

$$\rho = \frac{m}{v}$$

dans laquelle m = masse du corps et v = volume de ce corps. Son équation aux dimensions est :

$$\rho = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}.$$

1.2 FORCES : DÉFINITION, UNITÉS, EXEMPLES.

1.21 **Définition.** — On désigne par *force* toute action capable d'engendrer, de modifier ou d'arrêter le mouvement d'un corps, c'est-à-dire de vaincre « l'*inertie* de ce corps » en imprimant à sa masse une *accélération*.

---

1. — Cette définition sera donnée sous une forme plus concrète au § 1.22 ci-après.

Cette définition s'exprime par la *Relation fondamentale de la Mécanique* :

Force = masse × accélération.

soit :

$$F = m\gamma$$

On voit qu'une force a pour équation aux dimensions :

$$F = MLT^{-2}$$ (Voir remarque b), § 0.1).

1.22 Poids des corps. — L'exemple le plus courant de forces est le *poids des corps* qui est la force due à l'action de la ***pesanteur*** (ou attraction terrestre) sur la masse de ces corps.

L'*accélération de la pesanteur* désignée par la lettre g a pour valeur à l'altitude zéro et à la latitude de Paris :

$$g = 9{,}81 \text{ m/sec}^2.$$

Elle varie faiblement avec le lieu et avec l'altitude.

Le poids P est donc défini par la relation :

$$P = m \cdot g.$$

soit $P = 9{,}81\ m$ avec les unités d'accélérations définies ci-dessus. La notion de poids étant une notion commune, ceci nous permet de définir plus concrètement la masse m d'un corps en inversant la relation ci-dessus, ce qui donne :

$$m = \frac{P}{g} = \frac{\text{Poids du corps}}{\text{Accélération de la pesanteur}}$$

1.23 Unités de forces. — Les unités dites « unités industrielles » de forces que nous utiliserons découlent directement de la notion du poids des corps.

Ce sont :

- le *kilogramme* (kg) : poids d'un décimètre cube d'eau distillée à 4° centigrades,

et ses multiples ou sous-multiples :

— la *tonne* (1000 kg) ;

— le *gramme* $\left(\frac{1}{1000} \text{ kg}\right)$ etc.

Nota. — La masse m d'un corps pesant 410 kg par exemple, sera donc représentée, dans ce système, par la valeur

$$m = \frac{P}{g} = \frac{410}{9{,}81} = 41{,}8$$

(en unités mètre, kilogramme-poids, seconde. Voir annexe § 10.)

1.24 Eléments d'une force. — Une force est entièrement déterminée par les quatre éléments suivants :

son *point d'application* ;
sa *ligne d'action* (ou support) ;
son *sens* (sur sa ligne d'action) ;
son *intensité* (ou grandeur).

Exemple. — Force verticale dirigée de bas en haut appliquée au point A et ayant pour valeur 410 kg ce que nous énoncerons plus simplement par

$$F = 410 \text{ kg} \uparrow \text{ en A.}$$

1.25 Représentation graphique des forces. — Une force se représente graphiquement par un *vecteur (vecteur-force)* ayant pour origine son point d'application et dont l'orientation et la position de la flèche indiquent la direction et le sens de la force. La longueur du vecteur représente l'intensité de la force à une certaine échelle appelée *échelle des forces.*

Exemple d'échelle des forces (fig. 1)

1 mm représente 10 kg, ce que nous désignerons par :

$$1 \text{ mm} = 10 \text{ kg}.$$

Il est préférable, pour les opérations à suivre, d'utiliser cette notation plutôt que la notation équivalente :

$$1 \text{ kg} = 0{,}1 \text{ mm}.$$

(Voir Statique graphique, chap. IV)

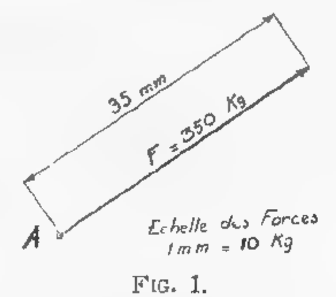


Fig. 1.

1.26 Forces d'inertie. Coefficients de charge. — Une accélération γ imprimée à un corps de masse $m = \frac{P}{g}$ donne naissance, d'après la définition du paragraphe 1.21, à une force :

$$F = m\gamma = \frac{P}{g}\gamma.$$

Cette force est appelée *force d'inertie* et elle est dirigée en *sens inverse de l'accélération* [1].

Si l'on exprime cette accélération en fonction de g soit

$$\gamma = ng$$

on obtient donc une force d'inertie

$$F = \frac{P}{g} ng$$

soit

$$F = nP$$

Force d'inertie $=$ n *fois le poids du corps.*

Le coefficient n est sans dimension (rapport d'accélérations) et s'appelle « *coefficient d'accélération* » ou « *coefficient de charge* » ou encore « *facteur de charge* ». On voit qu'il joue simplement le rôle d'un multiplicateur des poids.

Exemple. — Supposons qu'au cours d'une évolution acrobatique un avion atteigne une accélération totale $\gamma = 3\,g$, on a donc $n = 3$. Le moteur qui pèse, par exemple, 500 kg réagira sur son support avec une force

$$F = 3 \times 500 = 1500 \text{ kg}.$$

1. — Pour la compréhension des différentes lois de la mécanique, il est très utile de bien se rendre compte que le poids d'un corps n'est autre que le *cas particulier d'une force d'inertie* due à une accélération $\gamma = -g$, appliquée à la masse de ce corps pour l'empêcher de tomber sous l'action de la pesanteur.

1.27 Force centrifuge.

1.271 *Définition.* — C'est un *cas particulier de force d'inertie* qui prend naissance lors d'un *mouvement de rotation.* Elle est dirigée radialement et vers l'extérieur d'où son nom de *centrifuge.*

L'accélération qui lui donne naissance est dirigée vers l'intérieur (*accélération centripète*). Elle résulte du fait que le corps est à chaque instant rappelé vers le centre O au lieu de poursuivre une trajectoire linéaire.

C'est la force centrifuge F_c qui maintient tendu un fil souple OA quand le corps A atteint une vitesse suffisante autour de O (fig. 2).

1.272 *Vitesse angulaire.* — On désigne ainsi l'angle, exprimé en radians, dont tourne le corps considéré en une seconde. On la représente généralement par la lettre ω (oméga).

Dimension : $\omega = \frac{\text{angle}}{\text{temps}} = \frac{1}{T} = T^{-1}$;

Unité : radians par seconde (rad/sec).

Elle est reliée aux nombres n de tours par seconde (n t/sec) ou N de tours par minute (N t/min) par les relations :

$$\omega = 2\pi\, n = 6{,}28\ n,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60}\,N = \frac{\pi}{30}\,N = 0{,}1047\ N.$$

Exemple. — Une hélice tournant à N = 1600 t/min a pour vitesse angulaire

$$\omega = 0{,}1047 \cdot 1600 = 167{,}5 \text{ rad/sec.}$$

1.273 *Vitesse tangentielle.* — La vitesse angulaire est reliée à la *vitesse tangentielle* V exprimée en m/sec existant à l'extrémité d'un bras de levier R, par la relation :

$$\boxed{V = \omega\ R.}$$

Dans l'exemple ci-dessus si R = rayon hélice = 1,5 mètre, la vitesse tangentielle à l'extrémité des pales vaut

$$V = 167{,}5 \cdot 1{,}5 = 251 \text{ m/sec.}$$

soit $$V = 251 \cdot 3{,}6 = 904 \text{ km/h.}$$

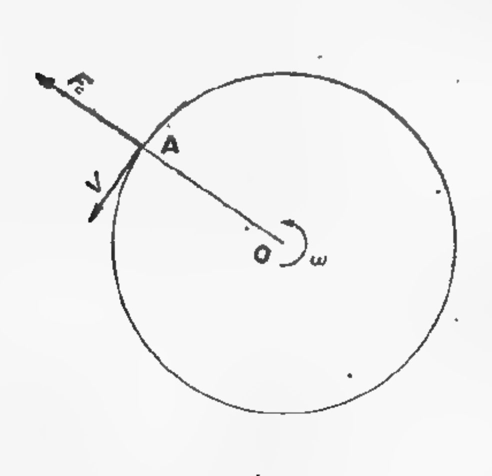


Fig. 2

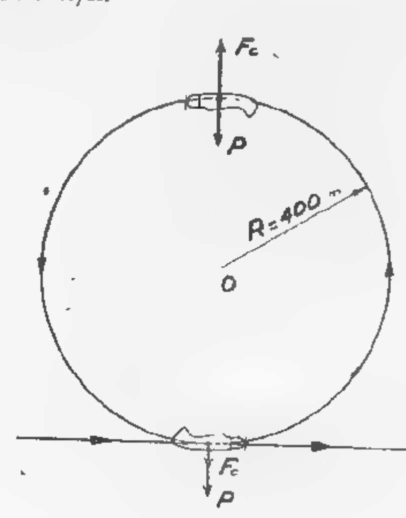


Fig. 3.

1.274 *Intensité de la force centrifuge.* — La force centrifuge F_c développée par une masse de poids P est donnée directement en fonction de ω ou de V par les relations :

$$F_c = \frac{P}{g} \omega^2 R$$

ou :

$$F_c = \frac{P}{g} \frac{V^2}{R}.$$

Dans ces expressions, si P est en kg, R en mètres, V en m/sec, ω en rad/sec et $g = 9{,}81$, la force F est alors donnée en kg.

Nota. — Les équations aux dimensions de ces deux expressions sont :

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{re} \text{ expr. :} & F_c = MT^{-2} \cdot L = MLT^{-2} \\ 2^e \text{ expr. :} & F_c = M \dfrac{L^2T^{-2}}{L} = MLT^{-2} \end{array}\right\} = \text{force}$$

1.275 *Application n° 1.* — A l'extrémité de la pale d'hélice envisagée ci-dessus, un poids P donne une force centrifuge :

$$F_c = \frac{P}{g} \omega^2 R = \frac{P}{9{,}81} \overline{167{,}5}^2 \cdot 1{,}5 = 4290 \text{ P}.$$

Un poids de 1 kg tendrait donc à s'échapper radialement avec une force de 4290 kg. On se rend compte ainsi de l'importance que peut prendre la force centrifuge en résistance des matériaux.

1.276 *Application n° 2.* — Un avion volant à une vitesse V = 360 km/h = 100 m/sec effectue un « looping » supposé circulaire, à vitesse constante d'un rayon de 400 mètres. Un poids P appartenant à l'avion développe une force centrifuge

$$F_c = \frac{P}{g} \frac{V^2}{R} = \frac{P}{9{,}81} \frac{100^2}{400} = 2{,}5 \text{ P}.$$

Au sommet de la boucle, le pilote sera donc encore appliqué sur son siège avec une force égale à

$$2{,}5 - 1 = 1{,}5 \text{ fois son poids (fig. 3).}$$

A la base de l'évolution, la force résultante serait :

$$2{,}5 \text{ P} + \text{P} = 3{,}5 \text{ P}$$

soit un coefficient de charge :

$$n = 3{,}5.$$

1.28 **Forces aérodynamiques.** — En plus des exemples de forces étudiés ci-dessus, nous aurons dans les calculs, à envisager des forces provenant de l'action de l'air sur les éléments étudiés. Ce sont ces *forces aérodynamiques* qui équilibrent les forces d'inertie d'un avion en vol.

1.3 MOMENTS DES FORCES.

1.31 Définitions. Notations.

1.311 *Cas particulier.* — *Dans un plan*, on désigne par *moment d'une force* F *par rapport à un point* A, le produit de l'intensité de cette force par

sa distance au point A (longueur de la perpendiculaire AH abaissée de A sur la ligne d'action de la force). Voir figure 4.

Nous désignerons cette grandeur par la notation M_A.

On a donc la relation

$$M_A = Fd.$$

1.312 *Cas général.* — *Dans l'espace* les moments des forces sont évalués *par rapport à des axes.*

Le moment d'une force par rapport à un axe est le produit de la projection de cette force sur un plan perpendiculaire à l'axe, par la distance du pied de l'axe à cette projection.

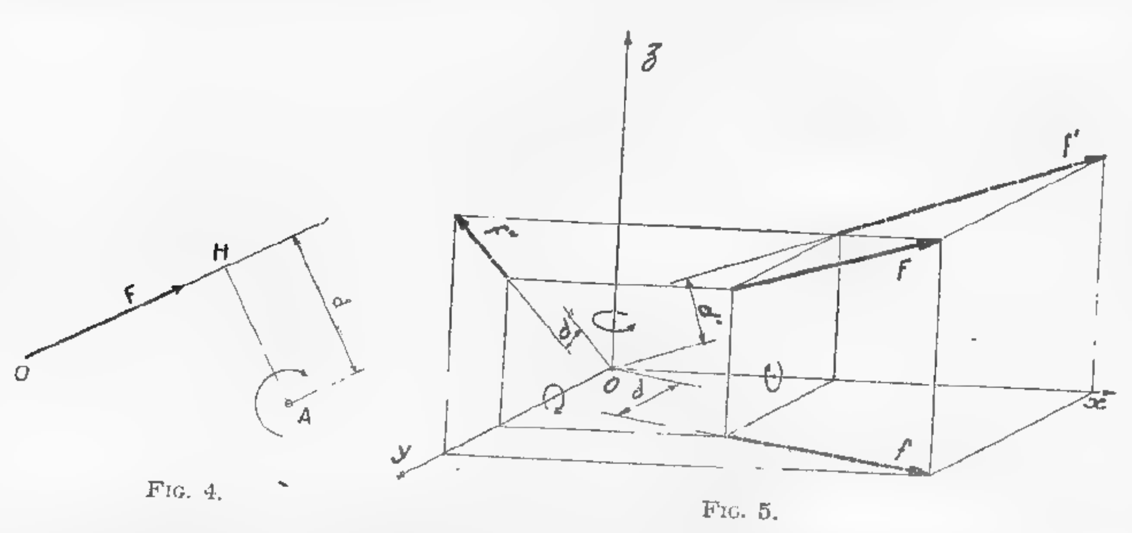


Fig. 4. Fig. 5.

Exemple (fig. 3). — Considérons le système de trois axes rectangulaires Ox, Oy et Oz (trièdre trirectangle) et une force F dont les projections sur les trois plans xOy, xOz et yOz sont respectivement : f, f' et f''.

Le moment par rapport à Oz est égal au produit de la projection f par le bras de levier d mesurant la distance de O à f. Nous écrirons cette relation

$$M_z = f \cdot d.$$

On a de même : $\begin{cases} M_y = f' d'. \\ M_x = f'' d''. \end{cases}$

Remarque. — Si la force F était perpendiculaire à l'un des axes, elle serait elle-même égale à sa projection sur un plan normal à cet axe et son moment serait égal au produit de son intensité par sa distance à l'axe.

On retombe ainsi sur la définition du *moment par rapport à un point* qui n'est, en réalité, que le *cas particulier d'un axe de référence des moments perpendiculaire au plan considéré.*

1.32 Unités. — Le moment d'une force a pour dimensions :

$$\text{Force} \times \text{Longueur} = F \cdot L.$$

Les unités de mesure doivent donc représenter ce produit.
Ces unités les plus courantes sont :

le *kilogrammètre* (kgm) ou *mètre-kilogr.* (mkg),
le *kilogramme-millimètre* (kgmm) ou *millimètre-kilogr.* (mmkg).

$$1 \text{ mkg} = 1000 \text{ mmkg}.$$

On emploie moins couramment :

la *tonne-mètre* (tm) qui vaut 1000 mkg.

Exemple (fig. 6) : Force F = 400 kg ; distance $d = 50$ mm.

Moment M = 400 · 50 = 20000 mmkg = 20 mkg = 0,020 tm.

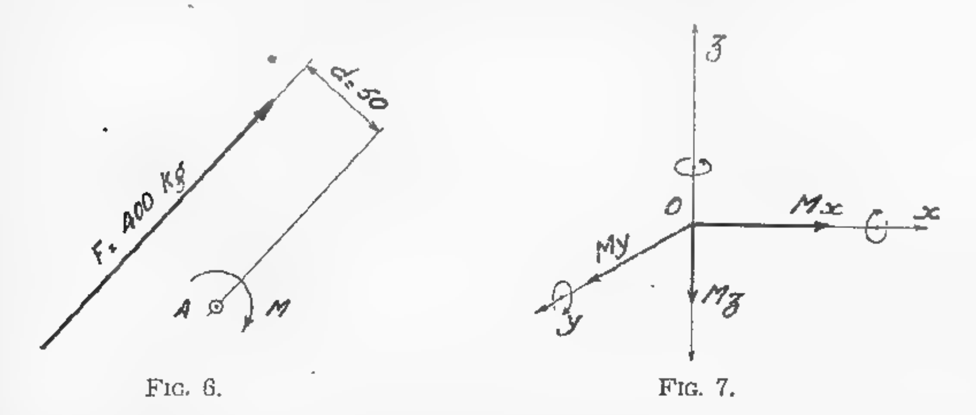


Fig. 6. Fig. 7.

1.33 Représentation graphique des moments. — Le moment autour d'un point (système plan) peut se représenter simplement par une flèche tournant dans le sens voulu autour de ce point (fig. 4).

Le moment autour d'un axe peut se représenter d'une façon imagée de la même manière (voir fig. 5), mais la représentation la plus correcte consiste à utiliser des vecteurs appelés *vecteurs-moments*. Un vecteur-moment est un segment de droite *tracé sur l'axe de mesure* du moment auquel il correspond, et dont la longueur représente, à une échelle près, l'intensité de ce moment. (Cette échelle s'exprimera par : 1 mm = 10 mkg par exemple.)

Sens positif : On adopte généralement, comme sens positif des vecteurs-moments, un sens tel qu'un observateur couché sur ce vecteur les pieds à l'origine et la tête vers la flèche, voit la force tendre à entraîner son bras de levier dans le sens des aiguilles d'une montre.

Dans l'exemple de la figure 5 on obtiendrait les vecteurs représentés sur la figure 7. Par rapport aux directions des trois axes Ox, Oy et Oz

M_x est positif (car f'' tourne dans le sens positif par rapport à Ox).
M_y est également positif (sens de f' par rapport à Oy).
M_z est négatif (sens de f par rapport à Oz).

1.34 Remarques. — *a*) Ce sens positif constitue une simple *convention purement arbitraire*. Au cours des applications à venir, nous spécifierons dans chaque cas le sens positif utilisé.

b) Il existe une autre règle pratique pour déterminer le sens d'un moment d'après son vecteur, c'est celle dite du « *tire-bouchon* » : Le sens de rotation du moment est celui dans lequel doit tourner un tire-bouchon pour s'enfoncer dans la direction du vecteur-moment. Notons que cette règle conduit aux sens opposés à ceux de la règle ci-dessus (qui correspond aux sens directs analytiques).

c) Une force impliquait la notion d'un déplacement en *translation*. Un moment implique celle d'un déplacement en *rotation*.

1.4 TRAVAIL OU ÉNERGIE.

1.41 Sens physique. — La notion vulgaire du travail comporte l'idée d'un « *effort exercé sur un corps qui cède sous l'effort* ».

On conçoit donc que dans son expression mécanique, il entre les facteurs *force et déplacement*.

Contentons-nous ici de dire que le travail est égal au produit : intensité de la force × déplacement de cette force suivant sa ligne d'action

soit $$\mathcal{E} = FL.$$

Nous reviendrons sur cette question au paragraphe 6 ci-après.
En Mécanique, les mots : *travail* ou *énergie* sont synonymes.

1.42 Unités. — Les dimensions du travail étant identiques à celles des moments, les unités dans le système courant que nous employons sont semblables.

Ce sont (voir § **1.32**) :

le kilogrammètre : kgm,
le kilogramme-millimètre : kgmm,
la tonne-mètre : tm [1].

1.43 Energie cinétique (ou force vive). —On désigne ainsi le travail *emmagasiné par un corps de masse* $m = \frac{P}{g}$ *en mouvement avec une vitesse* V.

Son expression est :

$$T = \frac{1}{2} m V^2.$$

Son équation aux dimensions est bien celle d'un travail; on a, en effet :

$$m = \frac{P}{g} = \frac{\text{force}}{\text{accélération}} = \frac{F}{\frac{L}{T^2}} = FL^{-1}\ T^2$$

$$V^2 = \left(\frac{\text{longueur}}{\text{temps}}\right)^2 = \frac{L^2}{T^2} = L^2\ T^{-2}$$

d'où

$$T = FL^{-1}\ T^2 \cdot L^2\ T^{-2} = F \cdot L.$$

Ce travail existe sous une forme *potentielle* c'est-à-dire « *capable d'être restituée à tout instant* » si l'on arrête le mouvement du corps [2].

Applications. — *a*) L'énergie cinétique d'un avion pesant 7500 kg et « tombant » verticalement à l'atterrissage avec une vitesse verticale finale égale à 6 m/sec a pour valeur

$$T = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 = \frac{7500}{2 \cdot 9{,}81} \cdot 36 = 13760 \text{ kgm.}$$

C'est cette énergie qui doit être absorbée par les *systèmes amortisseurs* du train d'atterrissage.

b) Un *volant* est un organe dont le but est d'*emmagasiner par rotation une énergie cinétique* restituable à tout moment par freinage (voir ci-après § **8.121**).

---

1. — On réserve généralement les expressions inverses *mkg, mmkg* ou *mt* pour la seule désignation des moments.

2. — Il est bon de remarquer que l'expression de « *force vive* » (appelée ainsi par opposition à la « *force morte* » ou poids d'un corps immobile) est une désignation impropre de par les dimensions qu'elle semble comporter.

1.5 PUISSANCE.

1.51 Définition. — On désigne par *puissance* d'une machine le *travail* qu'elle produit *pendant l'unité de temps.*

Nous la désignerons par la lettre W.

Dans le cas d'un travail d'intensité constante, elle s'exprime par la relation

$$W = \frac{\mathcal{T}}{t}$$

d'où dimensions :

$$W = \frac{F \cdot L}{T} = F{\cdot}L{\cdot}T^{-1}.$$

Dans le cas général, la puissance est la *dérivée* par rapport au temps de la *fonction travail* (pente de la courbe travail-temps).

$$W = \frac{d\,\mathcal{E}}{dt} \quad \text{(Chap. I, § 4.).}$$

1.52 Unités. — Dans le système industriel, les unités de puissance sont :

le *kilogrammètre par seconde* (kgm/sec) ;

le *cheval-vapeur* (ch) qui vaut 75 kgm/sec (unité industrielle qui correspond à la puissance d'un moteur développant un travail de 75 kgm en une seconde).

2. COMPOSITION DES FORCES. RÉSULTANTES

2.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Nous donnons ci-dessous les principes généraux et les opérations algébriques du problème de composition des forces. L'étude de la *statique graphique* (chapitre IV) nous donnera des solutions entièrement graphiques de ces problèmes.

2.1 DÉFINITION.

2.11 Cas général. — Considérons un corps soumis à un certain *système de forces* quelconques F_1, F_2, F_3, F_4... (fig. 8), non situées dans un même plan. Il est évident que l'action combinée de ces forces ne peut engendrer autre chose qu'une *translation* de ce corps suivant une certaine direction, et une rotation autour d'un certain axe. L'ensemble de ce *système de forces* pourra donc être ramené à :

une force *unique* R agissant selon la direction de la translation produite ;

un *moment* M produisant la rotation voulue.

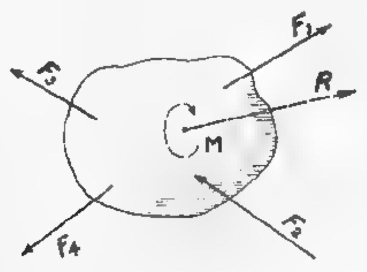


Fig. 8.

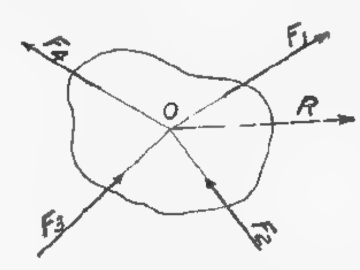


Fig. 9.

2.12 Cas particulier de forces concourantes (fig. 9). — Supposons que les forces appliquées F_1 F_2 F_3 F_4... concourent en un même point O. On établit alors que leur action se réduit simplement à celle d'une force R concourant également au point O. Cette force est appelée *résultante* du système de *composantes* F_1 F_2 F_3 F_4...

Le problème de recherche de cette résultante s'appelle : « *Composition des forces* ».

2.2 PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DE LA RÉSULTANTE.

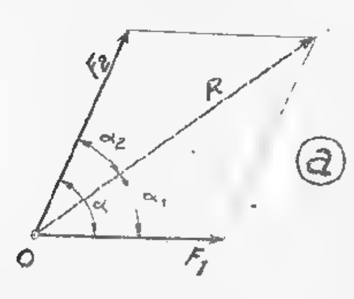
La résultante d'un système de forces est la *somme géométrique* [1] des forces composantes. Elle jouit des propriétés suivantes :

a) Elle est égale à la somme des projections des composantes sur sa propre direction.

b) La projection de la résultante sur un axe quelconque est égale à la somme des projections, sur ce même axe, des composantes.

c) Le moment de la résultante par rapport à un axe quelconque est égal à la somme des moments des composantes.

2.3 COMPOSITION DES FORCES CONCOURANTES.



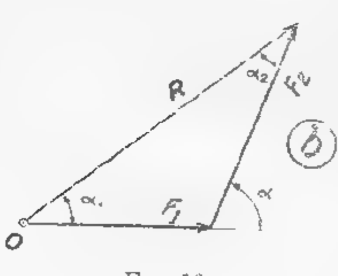


Fig. 10.

2.31 Composition de deux forces. — Deux forces concourantes F_1 et F_2 (on dit encore *forces angulaires*) définissent un plan. Leur résultante est donc située dans ce plan.

Cette résultante R est donnée en *direction et en grandeur* (à l'échelle des forces) par la diagonale du parallélogramme construit sur les deux forces (fig. 10 *a*).

Cette construction classique s'appelle le *parallélogramme des forces*. On peut, plus simplement, se contenter de mener par l'extrémité de l'une des forces (F_1 par exemple), un vecteur *équipollent* à l'autre force. On obtient ainsi la construction de la figure 10 *b* appelée *triangle des forces*.

Il est aisé de voir que ces deux constructions sont équivalentes.

Les relations suivantes unissent la résultante à ses composantes :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1F_2\cos\alpha \qquad (a)$$

$$\frac{F_1}{\sin\alpha_2} = \frac{F_2}{\sin\alpha_1} = \frac{R}{\sin\alpha}. \qquad (b)$$

De la relation (b) on tire :

$$F_1 = R\,\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha} = F_2\,\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

$$F_2 = R\,\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} = F_1\,\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}.$$

---

1. — La définition de « *somme géométrique* », c'est-à-dire « composition de vecteur » se trouvera précisée par les opérations qui vont suivre. Les termes « sommes » (sans autre spécification) utilisés ci-dessous en a), b), c), désignent évidemment des sommes algébriques, c'est-à-dire des additions ou soustractions, selon les signes ou sens respectifs.

Cas particuliers.

1° Si l'angle α entre les composantes est égal à 90° on a $\cos \alpha = 0$ d'où, d'après la relation (a) :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2$$
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

2° Si $\alpha = 0$ (forces de même direction et même sens), $\cos \alpha = 1$, d'où :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2\,F_1F_2 = (F_1 + F_2)^2$$
$$R = F_1 + F_2 \qquad \text{(somme des forces).}$$

3° Si $\alpha = 180°$ (forces de même direction et de sens inverse), $\cos \alpha = -1$:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2\,F_1F_2 = (F_1 - F_2)^2$$
$$R = F_1 - F_2 \qquad \text{(différence des forces).}$$

2.32 Composition de plusieurs forces concourantes situées dans un même plan. — Soit, par exemple, le système de forces F_1 F_2 F_3 F_4 (fig. 11 *a*), appliqué au point O. En groupant successivement deux à deux ces forces, on obtient par parallélogrammes des forces les ***résultantes partielles*** :

R_{1-2} = résultante de F_1 et F_2
R_{3-4} = résultante de F_3 et F_4.

La résultante R de R_{1-2} et R_{3-4} est la résultante cherchée. On peut plus simplement opérer selon la figure 11 *b* en portant bout à bout les vecteurs-forces. On obtient ainsi un *polygone des forces* donnant plus rapidement et donc avec plus de précision le résultat cherché.

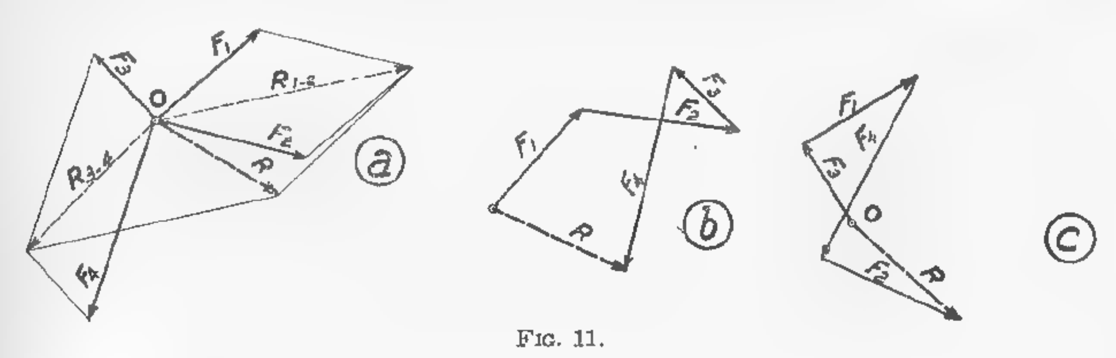


FIG. 11.

Il est aisé de voir que l'ordre de position des composantes sur le polygone des forces peut être quelconque. La figure 11 *c* construite avec le cheminement F_3 - F_1 - F_4 - F_2 donne le même résultat que la figure 11 *b* construite dans l'ordre F_1 - F_2 - F_3 - F_4.

2.33 Composition de plusieurs forces concourantes non situées dans un même plan.

2.331 *Cas de trois forces.* — Le principe de construction est donné en perspective par la figure 12. On construit le parallélipipède ayant F_1 F_2 et F_3 comme arêtes. La diagonale issue de O donne la résultante R cherchée.

2.332 *Nombre quelconque de forces.* — Même principe de formation de résultantes partielles (parallélipipèdes partiels) qu'au paragraphe **2.32.** La composition de ces résultantes donne le résultat cherché. On peut également procéder par figures polygonales dans l'espace (vecteurs équipollents aux forces ajoutées bout à bout).

2.333 *Procédés pratiques.* — *a*) Industriellement le problème sera traité en opérant les tracés sur *deux projections c'est-à-dire* deux vues du système de forces, analogues aux « vues de face » et « vues en plan » utilisées pour le dessin.

Le problème revient alors à des compositions de forces dans chaque plan de projection et à une recherche de « *vraie grandeur* » de la résultante.

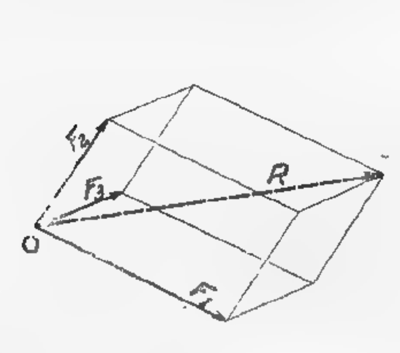


FIG. 12.

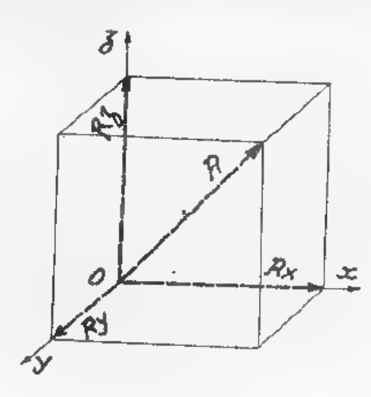


FIG. 13.

Nous en trouverons des applications au chapitre VII, paragraphe **4.**, lors de l'étude des systèmes triangulés.

b) Le problème peut également se traiter *algébriquement* en projetant chacune des composantes sur un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (trièdre de référence) issu par exemple du point de concours des forces, et en utilisant, vis-à-vis de chaque axe, la propriété *b* du paragraphe **2.2** qui permet de connaître la valeur de la projection de la résultante sur chaque axe.

Les valeurs de R_x, R_y, R_z : projections de R sur les trois axes Ox, Oy, Oz, sont données respectivement par les expressions (fig. 13) :

$R_x = \Sigma F_x$ = somme des projections sur Ox.
$R_y = \Sigma F_y$ = somme des projections sur Oy,
$R_z = \Sigma F_z$ = somme des projections sur Oz.

et la valeur de la résultante R s'obtient par la relation simple :

$$R = \sqrt{R^2_x + R^2_y + R^2_z}.$$

2.4 COMPOSITION DES FORCES PARALLÈLES.

2.41 Propriétés. — Des forces parallèles constituent un *cas particulier de forces concourantes dont le point de concours est rejeté à l'infini.*

On applique, pour les composer, les propriétés données au paragraphe **2.2** qui s'énoncent ici, dans ce cas particulier :

a) *La résultante est parallèle aux composantes et égale à leur somme algébrique*, soit

$$R = \Sigma F. \qquad (a)$$

b) *Le moment de la résultante par rapport à un axe quelconque* (normal à la direction des composantes par exemple) *est égal à la somme algébrique des moments des composantes*, soit

$$M_R = \Sigma M_F. \qquad (b)$$

2.42 Forces parallèles contenues dans un même plan. — Il suffit alors d'évaluer les *moments par rapport à un point du plan* (ce qui revient à les évaluer par rapport à un axe normal au plan). Ce point sera choisi, pour

faciliter les calculs, sur l'une des forces, ce qui éliminera son moment et donnera une référence commode.

EXEMPLE 1. — *Forces de même sens* (fig. 14) [1].

$$R = \Sigma F = 100 + 200 + 80 = 380 \text{ kg.} \quad \uparrow$$

Prenons les moments par rapport au point A situé sur la force de gauche, on a

$$\Sigma M_F = 200 \cdot 200 + 80 \cdot 350 = 10^4 (4 + 2,8)$$
$$= 6,8 \cdot 10^4 \text{ mmkg.}$$

Désignons par x la distance en mm de R à A ; ce qui revient à poser

$$M_R = R \cdot x = 380\, x$$

la relation (b) donne directement

$$x = \frac{6,8 \cdot 10^4}{380} = \frac{680}{3,8} = 179 \text{ mm.}$$

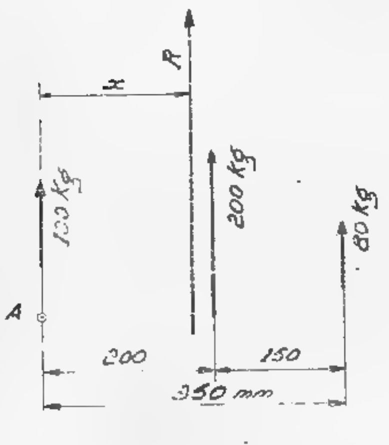


FIG. 14.

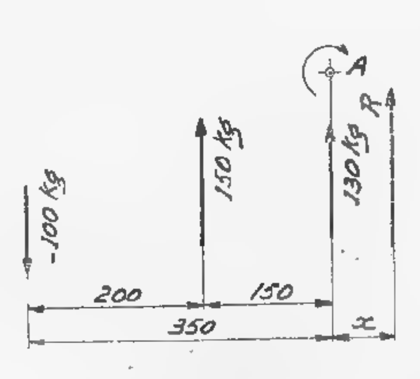


FIG. 15.

EXEMPLE 2. — *Forces de sens quelconques* (fig. 15).

$$R = \Sigma F = 150 + 130 - 100 = 180 \text{ kg.} \quad \uparrow$$

Evaluons les moments par rapport au point A situé sur la ligne d'action de la force de droite en choisissant le sens positif indiqué par la flèche :

$$\Sigma M_F = 150 \cdot 150 - 100 \cdot 350 = 10^4 (2,25 - 3,5)$$
$$= -1,25 \cdot 10^4 \text{ mmkg.}$$

En désignant par x la distance de R à A comptée positivement vers la gauche, comme pour les composantes, on doit avoir

$$R \cdot x = -1,25 \cdot 10^4$$

d'où

$$x = -\frac{1,25 \cdot 10^4}{180} = -69,5 \text{ mm}$$

La résultante est donc à droite de A, c'est-à-dire *à l'extérieur du système de forces.*

---

1. — Dans le cas particulier de deux forces, il est facile de voir que les distances de R à ces deux forces sont *inversement proportionnelles* aux intensités de ces forces.

2.43 Forces parallèles non contenues dans un même plan. Le moyen le plus simple pour situer R consiste à évaluer les moments par rapport à deux axes de référence normaux entre eux et normaux à la direction des forces, ces axes étant judicieusement choisis pour faciliter les calculs.

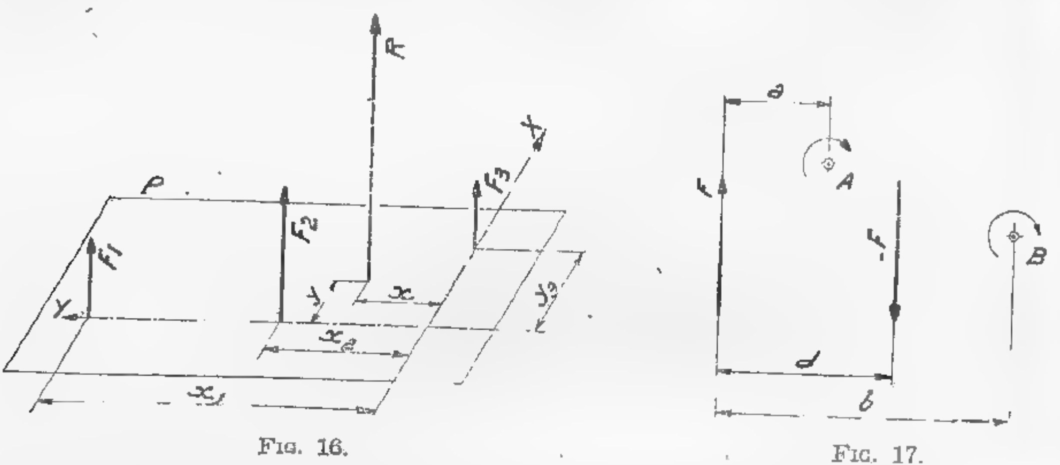


FIG. 16. FIG. 17.

Dans l'exemple de la figure 16 on choisira, par exemple, les deux axes OX et OY contenus dans le plan P normal aux forces et l'on évaluera les cotes de position x_1 x_2... y des forces par rapport à ces axes.

Moments des composantes :

$$M_X = F_1 x_1 + F_2 x_2 \cdots = \Sigma F.x$$

$$M_Y = F_3 \cdot y_3 \cdots = \Sigma \ F \cdot y$$

d'où les cotes x et y de position de la résultante R :

$$x = \frac{M_X}{R} = \frac{\Sigma \ F \cdot y}{R}$$

$$y = \frac{M_Y}{R} = \frac{\Sigma \ F \cdot x}{R}$$

avec

$$R = \Sigma \ F = F_1 + F_2 + F_3 \cdots$$

2.44 Cas particulier du couple. — On désigne par *couple* un système composé de deux forces parallèles de sens contraire et de même intensité (fig. 17).

La résultante d'un tel système est nulle, en effet,

$$R = \Sigma \ F = F - F = 0.$$

Le moment des forces (et donc celui de la résultante) possède, par contre, une valeur bien définie *qui est constante par rapport à tous les axes de mesure.*

En effet, envisageons par exemple, deux points A et B du plan des composantes, définis par leurs distances a ou b à F. On a

$$M_A = Fa + F \ (d - a) = Fa + Fd - Fa = Fd$$

et

$$M_B = Fb - F \ (b - d) = Fb - Fb + Fd = Fd.$$

On désigne le produit

$$C = Fd$$

par « *moment du couple* » et les forces F et — F par « *composantes de couple* ».

Règle : Moment d'un couple = intensité des composantes × distance entre ces composantes.

Remarques. — *a*) Le fait que R soit nul et ait un moment de valeur finie fait dire qu' « *un couple est un système de forces ayant une résultante nulle rejetée à l'infini* ».

b) Un couple implique donc uniquement une notion de moment c'est-à-dire de *rotation*. C'est pourquoi on utilise fréquemment comme synonymes les mots couple ou moment.

Exemples : Couple ou moment de flexion, couple-moteur ou moment-moteur, etc...

Couples égaux. — Deux couples sont dits égaux quand ils ont même moment

Un couple de composantes F′ et — F′ égales à $\frac{F}{2}$ et distantes de $d'=2d$ est égal au couple représenté figure 17 [1].

En effet, son moment serait

$$C'=F'd'=\frac{F}{2}2\ d=Fd=C.$$

3. COMPOSITION DES MOMENTS

Les moments se représentant par des *vecteurs dirigés* (voir § 1.33), on compose ces vecteurs-moments de la même façon que les vecteurs-forces.

On obtient ainsi un « *vecteur-moment-résultant* ». Dans l'exemple de la figure 7 reproduit sur la figure 18 ci-contre, on obtiendrait un vecteur résultant M_R dont la grandeur est donnée par

$$M_R=\sqrt{M^2_x+M^2_y+M^2_z}$$

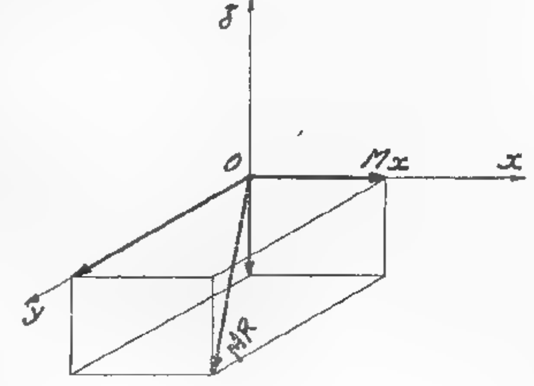


FIG. 18.

NOTA. — La notion de couple aide beaucoup à la figuration physique des vecteurs-moments.

Le vecteur-moment est dirigé perpendiculairement au plan formé par des composantes de couple qui produiraient le même effet que lui.

Ainsi, la rotation autour de Ox (moment M_x) implique l'idée de composantes de couple parallèles au plan yOz (composantes verticales par exemple). Le vecteur représentatif sera donc normal au plan yOz.

4. DÉCOMPOSITION DES FORCES ET DES MOMENTS

4.0 DÉFINITION.

Composer des forces ou moments c'est rechercher leur résultante, c'est-à-dire les grouper en une seule force ou un seul moment équivalents. Inver-

1. — Il est à remarquer que la direction des composantes peut être quelconque pourvu que leur bras de levier soit respecté.

sement *décomposer* des forces ou moments suivant des directions données consiste à partir de résultantes pour trouver des composantes suivant ces directions.

Il suffit donc de reprendre chaque exemple des paragraphes précédents en construisant les figures à l'envers.

4.1 CONDITIONS DE DÉTERMINATION.

Les opérations de décompositions de forces ne sont *déterminées*, c'est-à-dire possibles à effectuer d'une seule façon que dans les conditions suivantes :

a) *Pour un système plan :*

Si l'on n'a que *deux directions* de décomposition d'une résultante donnée (parallélogramme des forces).

b) *Pour un système dans l'espace.*

Si l'on n'a que *trois directions* de décomposition d'une résultante donnée (parallélipipède des forces).

On se rend compte, en effet, d'après la figure 19 qu'il y a une infinité de façons de décomposer la force F suivant les trois directions 1, 2 et 3 contenues dans le plan de la figure.

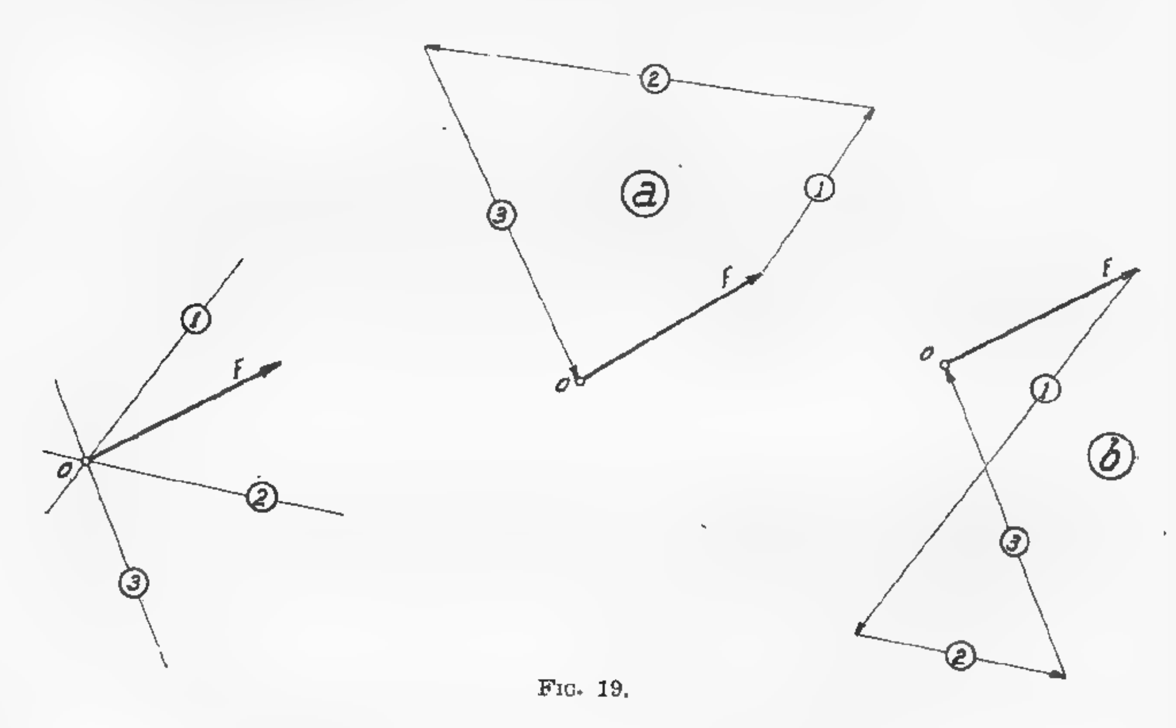


FIG. 19.

On obtiendrait aussi bien le polygone *a* que le polygone *b*, par exemple, qui sont tous deux des figures de composition de forces admettant R pour résultante (voir § 2.32). Le problème est donc *indéterminé*.

Les mêmes restrictions sont valables pour les décompositions suivant des directions parallèles.

De nombreux exemples de décomposition de forces seront donnés dans le chapitre suivant (équilibrage des systèmes) et au chapitre VII (systèmes articulés).

Nous verrons également au chapitre III la signification Mécanique de l'indétermination d'une décomposition.

5. TRANSPORT DES FORCES ET DES MOMENTS

5.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Nous ferons appel, dans ce paragraphe, à la notion de « *système en équilibre* » qui ne sera définie mécaniquement qu'au chapitre III, mais cette notion découle directement d'un sens physique acquis.

Exemple : Un corps au repos (sans mouvement) constitue un système en équilibre.

5.1 TRANSPORT DES FORCES.

5.11 **Principes.** — On peut *sans modifier l'équilibre extérieur d'un système :*

a) lui ajouter un système de forces en équilibre (par exemple deux forces égales et opposées), c'est-à-dire de résultante nulle (évident) ;

b) transporter une force en un point quelconque de sa ligne d'action ;

c) transporter une force en un point extérieur à sa ligne d'action, mais à condition d'ajouter en ce point un *moment de transport* égal au moment de la force considérée par rapport à ce nouveau point d'application (proposition démontrée ci-dessous).

5.12 **Démonstration** (fig. 20). — Soit un corps en équilibre soumis à une force F appliquée en A (fig. 20 *a*). Appliquons-lui en un point B deux

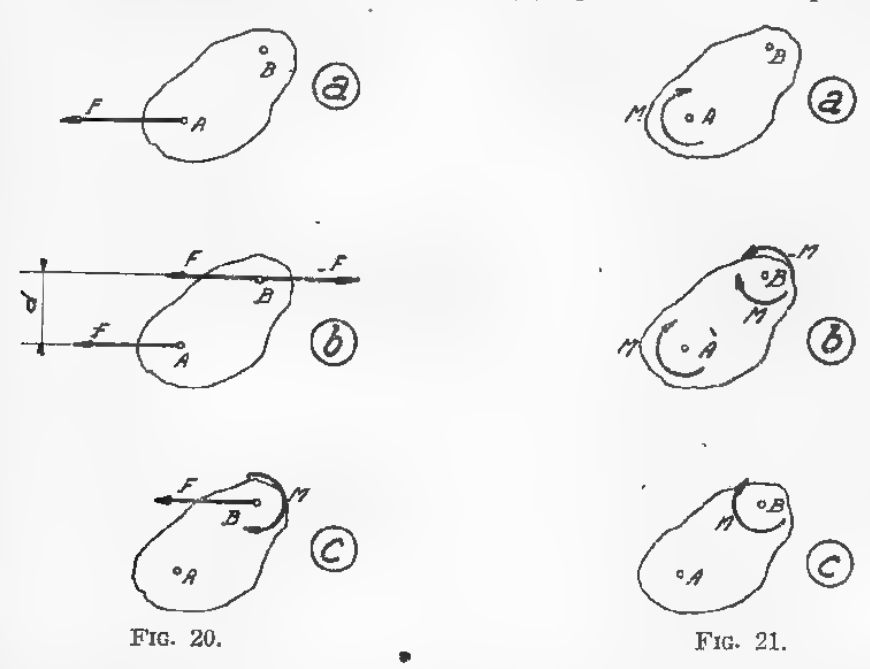


Fig. 20. Fig. 21.

forces égales et opposées (fig. 20 *b*) ce qui ne change rien à son équilibre d'après la proposition *a*) ci-dessus. Les forces **F** et — **F** en A et B forment un couple de moment

$$M = Fd.$$

Remplaçons donc ce système par le moment M. Il reste (fig. 20 *c*) la force F en B et un *moment de transport* égal au moment de F par rapport à B.

5.2 TRANSPORT DES MOMENTS.

5.21 **Principe.** — On peut, sans modifier l'équilibre extérieur d'un système, transporter un moment en n'importe quel point de ce système, pourvu que le vecteur représentatif de ce moment reste parallèle à lui-même.

5.22 **Démonstration** (fig. 21). — Soit un corps soumis à un moment M agissant en A (fig. 21 *a*). On peut, sans changer l équilibre, appliquer en un point B quelconque un système de deux moments M et — M (système nul) (fig. 21 *b*).

Les deux moments M en A et — M en B tendent à faire tourner le corps en sens inverse. Leurs effets s'annulent. Il reste finalement le moment M en B (fig. 21 *c*).

5.3 APPLICATION NUMÉRIQUE.

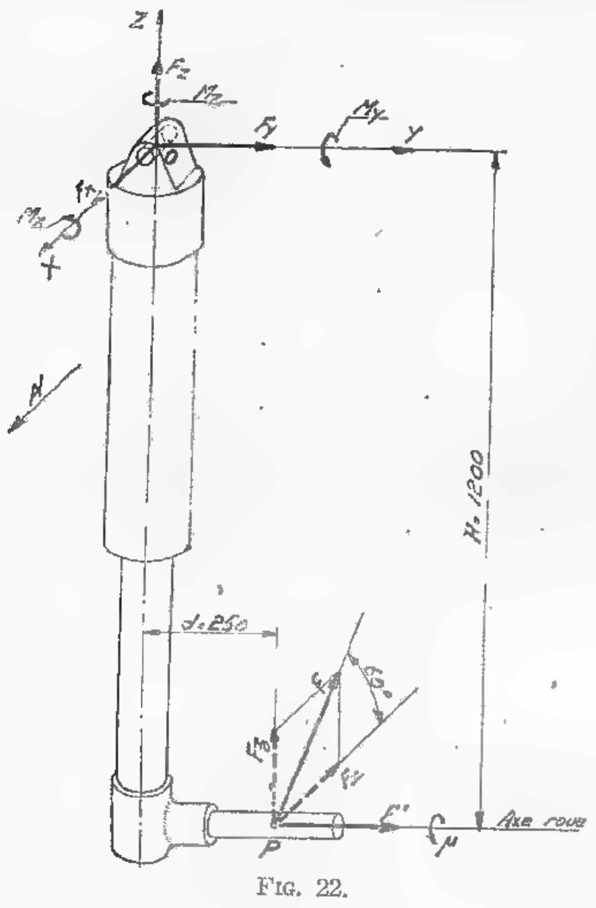


FIG. 22.

5.31 **Données.**

Une jambe d'atterrisseur rentrant reçoit au point P (centre de la roue) les efforts suivants (fig. 22) :

une force F=5000 kg contenue dans le plan médian de la roue et inclinée de 60° sur l'horizontale ;

une force F'=1000 kg dirigée suivant l'axe de la roue (composante de ripage) ;

un moment μ=500 mkg dû au freinage de la roue.

Evaluons les *efforts au centre* O *du palier d'articulation du train, selon le système d'axes* OX, OY, OZ, défini par la figure (OY parallèle à l'axe de la roue).

Ces efforts comprendront :

- trois composantes de forces F_X F_Y F_Z (sens positifs arbitraires dirigés selon les axes correspondants) ;
- trois moments M_X M_Y M_Z (sens positifs adoptés selon les flèches représentées sur la figure).

Les cotes H et *d* sont données sur la figure (en mm).

5.32 **Solution.**

Décomposons la force F en deux composantes parallèles aux axes OX et OZ nous obtenons :

$$F_x = F \cos 60° = \frac{F}{2} = 2500 \text{ kg (vers l'arrière)}$$

$$F_z = F \sin 60° = \frac{F\sqrt{3}}{2} = 4330 \text{ kg (vers le haut)}.$$

Transport de F_x

F_x tend à faire reculer O et à produire des rotations autour de OY (décalage H) et de OZ (décalage *d*).

Il donne donc :

force : $F_X = -F_x = -2500$ kg.

Moments $\begin{cases} M_{Y_1} = F_x \cdot H = 2500 \cdot 1{,}2 = 3000 \text{ mkg,} \\ M_Z = F_x \cdot d = 2500 \cdot 0{,}25 = 625 \text{ mkg.} \end{cases}$

Transport de F'

F' donne en O :

$$F_Y = F' = 1000 \text{ kg.}$$
$$M_{X_1} = F'H = 1000 \cdot 1{,}2 = 1200 \text{ mkg.}$$

Transport de F_z

F_z donne en O :

$$F_Z = F_z = 4330 \text{ kg.}$$
$$M_{X_2} = F_Z \cdot d = 4330 \cdot 0.25 = 1082{,}5 \text{ mkg.}$$

Transport de μ

μ se transporte directement en 0 en donnant un moment :

$$M_{Y_2} = \mu = 500 \text{ mkg.}$$

Efforts totaux en O :

Forces $\begin{cases} F_X = 2500 \text{ kg} \\ F_Y = 1000 \text{ kg} \\ F_Z = 4330 \text{ kg.} \end{cases}$ Résultante : $F_O = \sqrt{F_X^2 + F_Y^2 + F_Z^2} = \sqrt{10^4 (625 + 100 + 1875)} = 5090$ kg

Moments $\begin{cases} M_X = M_{X_1} + M_{X_2} = 2282{,}5 \text{ mkg} \\ M_Y = M_{Y_1} + M_{Y_2} = 3500 \text{ mkg} \\ M_Z = 625 \text{ mkg} \end{cases}$ Moment résultant : $M_o = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = 4220$ mkg

6. TRAVAIL ET PUISSANCE ENGENDRÉS PAR LES FORCES ET LES MOMENTS

Nous avons défini aux paragraphes **1.4** et **1.5** les dimensions et unités du travail et de la puissance. Nous en donnons ci-dessous quelques *cas particuliers* de calcul avec interprétations graphiques.

6.1 TRAVAIL DES FORCES.

Nous considérerons, pour l'étude, deux catégories de cas, selon que les forces envisagées se déplacent, ou non, suivant leurs lignes d'action.

6.11 Travail des forces se déplaçant suivant leurs lignes d'action. — Ce cas concerne, par exemple, une force F se déplaçant suivant le prolongement de son vecteur figuratif (fig. 23 *a*) ou plus généralement une force assujettie à rester constamment *tangente à la trajectoire de son mouvement* (fig. 23 *b*).

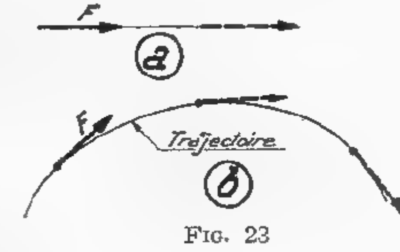


Fig. 23

6.111 *Cas d'une force* F *d'intensité constante* (fig. 24 *a*). — Par définition, le travail développé est égal au produit : force × déplacement, soit :

$$\mathcal{E} = FL.$$

Si l'on porte sur un diagramme, en abscisses, les déplacements à l'échelle : 1 mm = *n* mm et en ordonnées les forces à l'échelle 1 mm = *n* kg, on obtient une droite figurant la fonction F = constante (fig. 24 *a*).

Le travail entre deux points A et B du déplacement est représenté par l'*aire du rectangle* hachuré, à l'échelle

$$1 \text{ mm}^2 = nn' \text{ kgmm.}$$

Cette aire est bien, en effet, équivalente au produit FL.

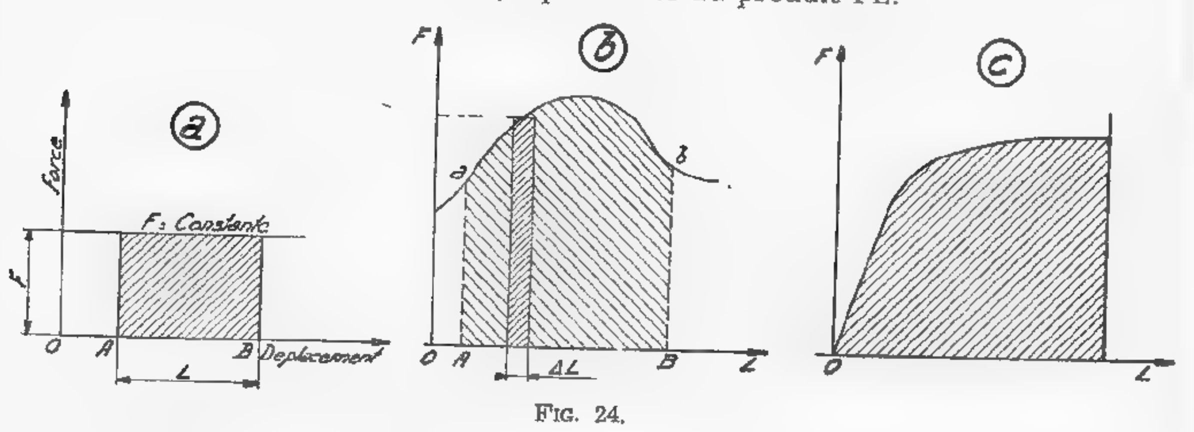


Fig. 24.

6.112 *Cas d'une force d'intensité variable.* — Soit une force se déplaçant suivant sa ligne d'action et dont l'intensité F se représente en fonction de son déplacement L (longueur de la trajectoire) par la courbe de la figure 24 *b*. Dans un intervalle très petit Δ L où la force peut être considérée comme constante et égale à l'ordonnée moyenne de la courbe F dans cet intervalle, le *travail élémentaire* sera représenté par l'aire du rectangle correspondant, soit :

$$\Delta \mathscr{E} = F\Delta L.$$

Le travail entre deux points A et B du déplacement vaudra donc :

$$\mathscr{E} = \sum_A^B F \Delta L.$$

On voit ainsi que le travail est donné par l'*intégration définie* de la fonction force-déplacements (voir chap. I, § 5.5). Ce travail sera représenté par l'aire curviligne A*ab*B (à la même échelle que ci-dessus).

Applications. — 1° Pour connaître l'énergie absorbée par un *amortisseur de train d'atterrissage*, on trace, d'après essais, la courbe des déplacements en fonction de la charge appliquée. On obtient un diagramme selon figure 24 *c* dans lequel l'aire hachurée représente l'énergie cherchée.

2° Pour l'étude du fonctionnement de toutes les *machines thermiques*, on établit des *diagrammes des pressions* dans le cylindre en fonction de la course du piston. On obtient ainsi des courbes selon figure 25 *a* (machine à vapeur). Les pressions représentent, à une échelle près, les efforts appliqués au piston.

L'aire hachurée figure le *travail moteur* dans un cycle, à l'échelle

$$1 \text{ mm}^2 = nn'S \text{ kgmm.}$$

en posant :

échelle des courses : 1 mm $= n$ mm $\left(\text{échelle } \frac{1}{n}\right)$,

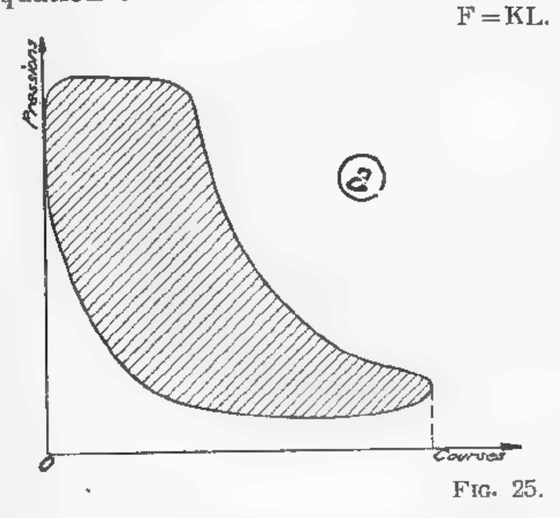
échelle des pressions : 1 mm $= n'$kg/mm²,

S = surface du piston en mm².

3° *Supposons une force dont l'intensité* F *croît linéairement en fonction de son déplacement* L.

Elle se représente alors graphiquement selon figure 25 *b*, par une droite d'équation :

$$F = KL.$$



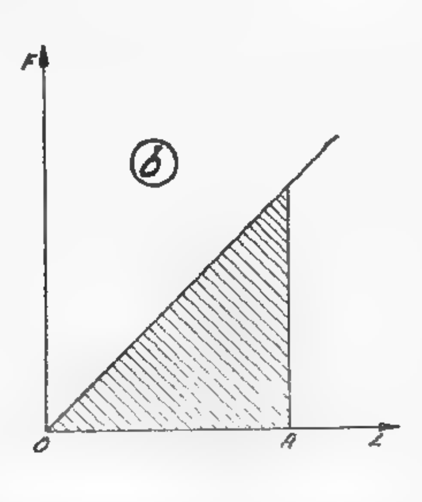


Fig. 25.

Le travail développé entre l'origine O et un point A du déplacement est représenté par l'aire du triangle hachuré, soit :

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} FL = \frac{1}{2} KL^2.$$

Nous retrouverons cette propriété en Résistance des matériaux pour tous les phénomènes dits *élastiques* qui sont à la base de cette science.

6.12 Travail des forces se déplaçant obliquement par rapport à leurs lignes d'action. — Ce cas concerne, en général, celui représenté par la figure 26 où la force considérée F' est dirigée de façon quelconque par rapport à sa trajectoire.

Si l'on désigne par F la *projection de F' sur la tangente à la trajectoire* au point considéré, le *travail élémentaire* au cours d'un déplacement ΔL compté sur la trajectoire est encore donné par :

$$\Delta \mathscr{E} = F \Delta L.$$

On retrouve ainsi les mêmes formules qu'au paragraphe précédent en ayant soin de remplacer la force par sa projection sur la tangente à la trajectoire.

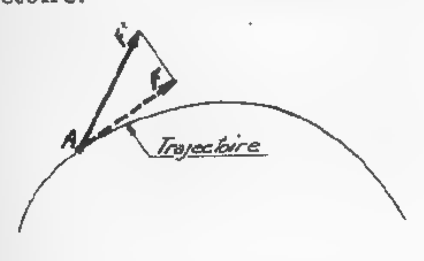


Fig. 26.

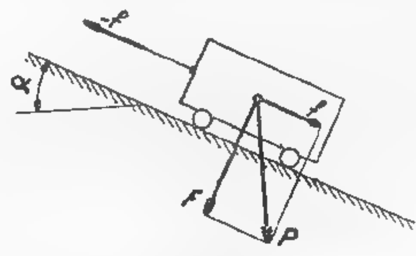


Fig. 27.

Explication physique. — Considérons un chariot remorqué sur un plan incliné (fig. 27). L'effort à fournir (en négligeant les frottements) n'est égal qu'à la composante *f* du poids P, parallèle au plan incliné, la composante normale F étant équilibrée par des *actions de contact*.

Le travail à fournir sera donc donné par :

$$\mathscr{E} = fL = PL \sin \alpha.$$

6.13 Puissance engendrée par une force F constante se déplaçant en mouvement uniforme suivant sa ligne d'action. — Soit V la vitesse constante du mouvement, c'est-à-dire l'espace parcouru pendant l'unité de temps. D'après la définition du paragraphe **1.51**, la puissance W développée sera donc donnée par la relation :

$$W = FV = \text{travail pendant l'unité de temps.}$$

On en déduit la relation

$$\boxed{F = \frac{W}{V}.}$$

Application numérique. — Un avion volant horizontalement à une vitesse $V = 500$ km/h $= 139$ m/sec est propulsé par une hélice à laquelle est appliquée une « *puissance utile* » : $W_u = 1700$ ch. La force de propulsion engendrée par l'hélice (projection de la *traction d'hélice* sur la trajectoire), vaut

$$F = \frac{W_u}{V} = \frac{1700 \cdot 75}{139} = 916 \text{ kg.}$$

6.2 TRAVAIL DES MOMENTS.

6.21 Travail d'un moment tournant autour de son axe de mesure. — Un moment M tournant autour de son axe O est assimilable à un couple de composantes F et — F ayant un bras de levier R tel que (fig. 28).

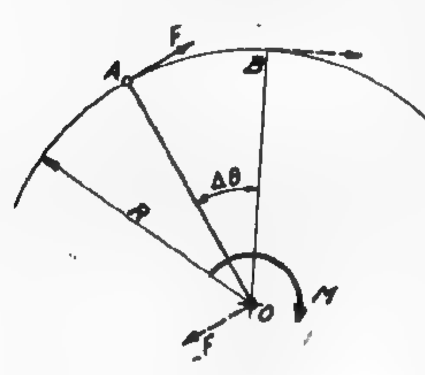


Fig. 28.

$$M = FR \quad \text{soit} \quad F = \frac{M}{R}$$

On ramène ainsi l'étude du mouvement de M à celle d'une force F se déplaçant suivant sa ligne d'action. En effet : F reste en tout point tangent à sa trajectoire (arc de cercle de centre O et de rayon R) et la composante —F dont le point d'application reste fixe, n'engendre aucun travail.

Au cours d'une rotation élémentaire $\Delta\theta$ de M autour de son axe, F parcourt une distance

$$AB = \Delta L = R\Delta\theta$$

(avec $\Delta\theta$ exprimé en radians) et le travail élémentaire vaut :

$$\Delta \mathcal{E} = F\,\Delta L = \frac{M}{R} R\,\Delta\theta = M\,\Delta\theta.$$

a) Si M *est constant*, on a donc au bout d'une rotation θ,

$$\mathcal{E} = M\theta,$$

d'où :

Travail d'un moment constant = intensité de ce moment × angle de rotation exprimé en radians.

b) *Si* M *est variable*, le travail se calcule en intégrant la fonction $M = f(\theta)$, ce qui revient graphiquement à planimétrer l'aire limitée par la

courbe représentative du moment tracée en fonction des angles de rotation θ problème analogue à ceux étudiés au paragraphe **6.1** pour les forces.

6.22 Travail d'un moment tournant autour d'un axe différent de son axe de mesure. — Comme pour les forces, le problème se ramène au cas précédent en considérant seulement la *projection du vecteur-moment sur l'axe de rotation.*

6.23 Puissance engendrée par un moment constant en rotation uniforme autour de son axe. — L'angle de rotation du moment M pendant l'unité de temps est mesuré par la *vitesse angulaire* ω du mouvement (définie ci-dessus au § **1.272**).

Le travail correspondant, c'est-à-dire la *puissance* développée W a donc pour expression :

$$W = M \cdot \omega$$

relation d'où l'on tire :

$$M = \frac{W}{\omega}.$$

Application numérique. — Soit un moteur d'avion fournissant une puissance utile $W_u = 1700$ ch et entraînant (par l'intermédiaire d'un réducteur), une hélice qui tourne à un nombre de *tours* :

$$N = 1200 \text{ tours/minute.}$$

Le moment (ou couple) transmis à l'hélice vaut :

$$M = \frac{W_u}{\omega} = \frac{1700 \cdot 75}{\frac{1200}{60} \cdot 2\pi} = 1018 \text{ kgm.}$$

Ce moment sera équilibré sur les attaches du moteur par un couple équivalent et de sens inverse.

Si ces attaches sont distantes de **0,7** m par exemple (fig. **29**), elles supporteront des composantes de couple :

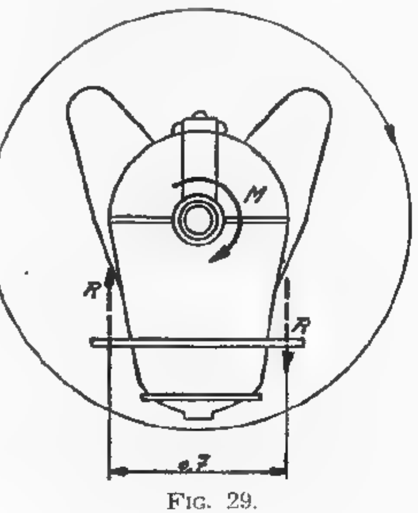


Fig. 29.

$$R = \frac{M}{0,7} = \frac{1018}{0,7} = 1450 \text{ kg.}$$

7. CENTRES DE GRAVITÉ

7.1 DÉFINITION.

7.11 Centre de gravité d'un corps. — Si l'on soumet un corps pesant à une accélération quelconque, on démontre que les forces d'inertie engendrées passent toujours par un point caractéristique appelé *centre de gravité de ce corps*, quelles que soient l'orientation et la grandeur de cette accélération [1].

---

1. — Nous utiliserons l'abréviation c. de g. pour désigner le centre de gravité qui sera en général indiqué sur les figures par la lettre G.

Le centre de gravité d'un corps est donc, en particulier, le *point d'application du poids de ce corps.*



Fig. 30.

Tous les poids p_1 p_2 p_3... des éléments de volume de ce corps constituent un système de forces parallèles dont la résultante, égale en grandeur au poids P, définit par sa position un lieu du centre de gravité. En faisant tourner le corps on obtient d'autres lieux dont le point de concours commun définit la position de G. Cette définition permet de voir que le *problème de la recherche du centre de gravité d'un corps revient à celui d'une composition de forces parallèles et de même sens.*

7.12 **Centre de gravité d'une surface.** — Par analogie avec la définition précédente, on définit par *centre de gravité d'une surface* S le point d'application du poids de cette surface supposée découpée dans un corps homogène d'épaisseur constante.

On peut dire également que le centre de gravité d'une surface est le point d'application d'un système de forces fictives parallèles et de même sens ayant des intensités proportionnelles aux surfaces partielles de chaque élément constituant la surface considérée.

7.2 PROPRIETES PRINCIPALES DES CENTRES DE GRAVITE.

Ces propriétés découlent de celles des résultantes des systèmes de forces parallèles (voir § 2.41 ci-dessus).

a) Si l'on considère un axe quelconque passant par le centre de gravité d'un corps, la somme des moments des masses (ou des poids) des éléments de volume de ce corps par rapport à cet axe, est nulle, ce qui s'exprime par *l'égalité* (fig. 31 *a*) :

$$m_1d_1 + m_2d_2 + m_3d \cdots = 0$$

soit :

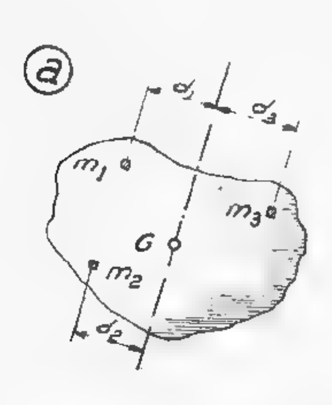
$$\Sigma\, md = 0$$

(les distances d étant comptées positivement d'un côté de l'axe et négativement de l'autre).

Pour une surface, on arrive de même à

$$\Sigma\, sd = 0$$

s désignant la surface de chaque élément.



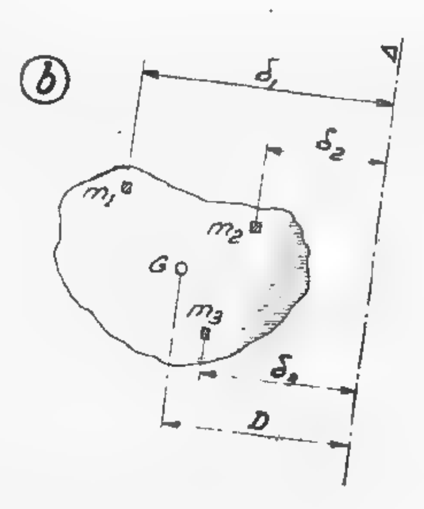


Fig. 31.

Le produit sd s'appelle *moment statique* de chaque élément de surface. On peut donc dire que : *Le moment statique d'une surface par rapport à un axe quelconque passant par son centre de gravité est nul.*

b) Le moment de la masse totale (ou du poids total) d'un corps par rapport à un axe quelconque est égal à la somme des moments élémentaires par rapport à ce même axe des masses (ou des poids des éléments de volume constituant ce corps (fig. 31 *b*)

$$m_1\delta_1+m_2\delta_2+m_3\delta_3\ ...=\mathrm{MD}$$

soit

$$\Sigma\ m\delta=\mathrm{MD}$$

ou

$$\Sigma\ p\delta=\mathrm{PD}.$$

Pour une surface, on a de même :

$$\Sigma\ s\delta=\mathrm{SD}.$$

c) *Le centre de gravité d'un corps symétrique est situé dans le plan de symétrie*, de même celui d'une surface symétrique est situé sur l'axe de symétrie (corollaire de la propriété *a*). En particulier si le corps ou la surface possèdent un *centre de symétrie*, le centre de gravité est confondu avec ce centre.

Exemples : Le centre de gravité d'une sphère ou d'un cercle est au centre.

Le centre de gravité d'un parallélipipède rectangle ou d'un rectangle ou d'un losange est au point de concours des diagonales, etc...

7.3 RECHERCHE DES CENTRES DE GRAVITÉ.

7.31 **Méthodes algébriques.** — On utilise, pour la recherche des centres de gravité, la propriété *b* ci-dessus qui peut s'écrire :

$$\mathrm{D}=\frac{\Sigma p\delta}{\mathrm{P}}\ \text{pour les corps}$$

ou

$$\mathrm{D}=\frac{\Sigma s\delta}{\mathrm{S}}\ \text{pour les surfaces.}$$

On commencera par décomposer le corps (ou la surface) en éléments de volume (ou de surface) dont on connaît la position du centre de gravité : (parallélipipèdes, sphères, etc..., pour les corps, ou rectangles, triangles, trapèzes, etc..., pour les surfaces ; voir paragraphe suivant).

Chacun de ces éléments sera affecté en son centre de gravité propre d'une force proportionnelle à son poids (ou à sa surface) .

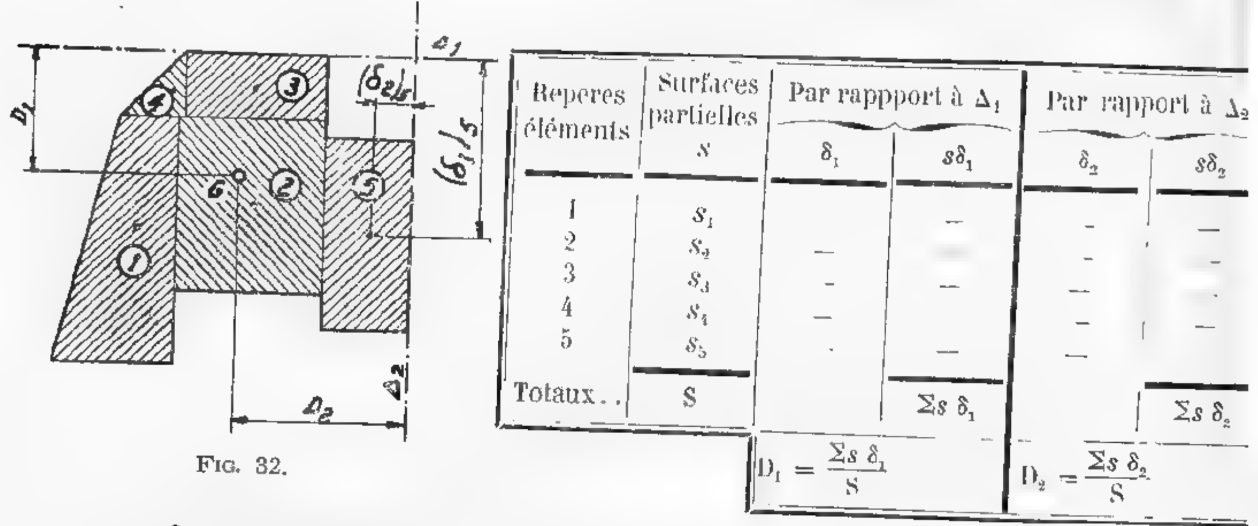
Pour un corps ne possédant aucun plan de symétrie, on choisira trois *axes ou trois plans de référence* Δ_1 Δ_2 Δ_3 non parallèles entre eux, par rapport auxquels on évaluera les sommes de moments statiques partiels $\Sigma p\delta_1$; $\Sigma p\delta_2$; $\Sigma p\delta_3$ d'où trois distances D_1 D_2 D_3 qui définiront les *cotes de position de G par rapport à ces trois références.*

Pour une surface sans axe de symétrie, on procédera de même par rap port à *deux axes* Δ_1 et Δ_2 *non parallèles.*

Si le corps (ou la surface) possède un plan (ou un axe) de symétrie, on connaît un premier lieu de G ce qui élimine une des opérations.

Remarque. — Les axes de référence peuvent être choisis de façon arbitraire. On adoptera donc des *axes commodes*, constitués par exemple, par une arête caractéristique ou une tangente à la forme extérieure du corps ou de la surface.

Les calculs seront avantageusement disposés dans un tableau du modèle de celui ci-dessous relatif à une surface quelconque (indication de la figure 32).



Repères éléments	Surfaces partielles s	Par rapport à Δ_1		Par rapport à Δ_2	
		δ_1	$s\delta_1$	δ_2	$s\delta_2$
1	s_1		—	—	—
2	s_2	—		—	—
3	s_3	—	—	—	
4	s_4	—		—	—
5	s_5		—	—	
Totaux..	S		$\Sigma s\,\delta_1$		$\Sigma s\,\delta_2$
		$D_1 = \frac{\Sigma s\,\delta_1}{S}$		$D_2 = \frac{\Sigma s\,\delta_2}{S}$	

Fig. 32.

On trouvera ci-après, **Planches 3 et 4,** au cours de l'étude des moments d'inertie, des applications numériques de ces calculs (premières colonnes des tableaux de calculs figurant sur ces Planches ; voir § **9**. ci-après).

7.32 **Méthodes graphiques.** — La statique graphique permet une solution entièrement graphique du problème. Nous l'exposerons ci-après au chapitre IV.

7.4 CENTRES DE GRAVITÉ DES SURFACES USUELLES.

Le tableau de la **Planche 1** donne la position des centres de gravité de quelques figures usuelles ne possédant pas de centre de symétrie. Nous y avons également fait apparaître les surfaces S de ces figures et les constructions graphiques simples dans le cas du triangle et du trapèze.

8. MOMENTS D'INERTIE

8.1 GÉNÉRALITÉS.

8.11 Définitions.

8.111 *Moment d'inertie d'un corps.* — Soit un corps (ou un système de corps) de masse totale M composée d'éléments de masse m_1, m_2, m_3.

On désigne par *moment d'inertie* de ce corps (ou de ce système) par rapport à un axe quelconque, situé à des distances respectives r_1, r_2, r_3... des éléments de masse, *la somme des produits des masses élémentaires par le carré de leurs distances à l'axe :*

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m^3 r_3^2 \;..$$

soit :

$$\boxed{I = \Sigma m r^2}$$

ou encore :

$$I = \frac{1}{g}\,\Sigma\, p r^2$$

avec p = poids des éléments de masse.

8.112 *Moment d'inertie d'une surface.* — Par analogie, on désigne par *moment d'inertie d'une surface*, la somme :

$$\boxed{I = \Sigma\, sd^2}$$

où s représente l'aire de chaque élément de surface et d la distance de chacun de ces éléments à l'axe considéré.

8.12 Notion physique des moments d'inertie. — Nous donnerons cette notion en étudiant deux problèmes classiques de Mécanique qui feront, en même temps, ressortir l'utilité du calcul des moments d'inertie des corps.

8.121 *Energie cinétique d'un corps en mouvement de rotation* (fig. 33). — Soit un corps de masse M animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe O et soit ω la *vitesse angulaire* de ce mouvement (voir § **1.272** et fig. 33).

Un élément de masse m situé à une distance r_1 de l'axe O aura pour *vitesse tangentielle* (voir § **1.273**) :

$$v_1 = \omega r_1$$

De même un élément m_2 situé à r_2 aura une vitesse

$$v_2 = \omega r_2 \quad \text{etc...}$$

D'après la définition donnée ci-dessus au paragraphe **1.43**, *l'énergie cinétique* de chaque élément aura pour valeur :

$$\text{Elément 1 : } t_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{\omega^2}{2}\, m_1 r_1^2$$

$$\text{Elément 2 : } t_2 = \frac{\omega^2}{2}\, m_2 r_2^2$$

etc...

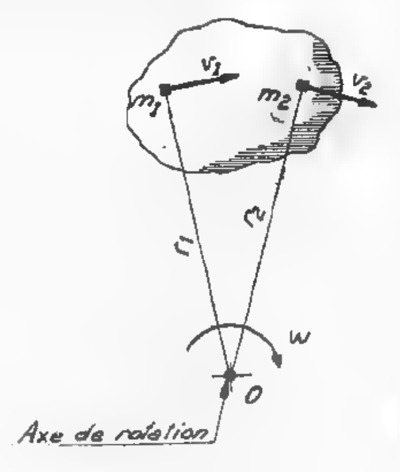


FIG. 33.

L'*énergie cinétique du corps* dans son mouvement autour de OO′ vaudra donc

$$T = t_1 + t_2 + \ldots = \frac{\omega^2}{2}\,(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \ldots)$$

soit :

$$T = \frac{\omega^2}{2}\,\Sigma\, mr^2$$

ou d'après la définition ci-dessus :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\, I\, \omega^2.}$$

Cette formule est utilisée, en particulier, pour le calcul de l'énergie emmagasinée par les *volants*.

8.122 *Inertie d'un corps sous une impulsion en rotation.*

Accélération angulaire. — Supposons que l'on veuille faire varier la vitesse angulaire d'un corps en mouvement de rotation autour d'un certain axe O, ou encore que l'on veuille faire démarrer en rotation autour de cet

axe le corps précédemment immobile. La vitesse angulaire ω pourra dans l'un ou l'autre cas se représenter par une certaine courbe en fonction du temps t : courbe 1 ou courbe 2, figure 34 *a* par exemple. La pente de cette courbe, c'est-à-dire sa dérivée, représentera en chaque point la « vitesse d'accroissement de la vitesse angulaire » que l'on désigne plus simplement par *accélération angulaire* :

$$\omega' = \frac{d\omega}{dt}.$$

Forces d'inertie: — Un élément de masse m du corps situé à une distance r de l'axe subira une *accélération tangentielle* donnée par :

$$\gamma = \frac{dv}{dt} = \frac{r d\omega}{dt} = \omega' r$$

d'où une *force d'inertie tangentielle* de sens opposé à l'impulsion ayant pour valeur (voir § 1.26)

$$f = m\gamma = m\omega' r \qquad \text{(fig. 34 } b\text{)}.$$

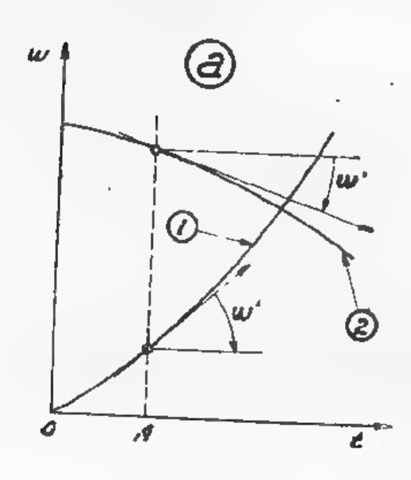


Fig. 34.

Moment résistant. — Cette force d'inertie engendrera un *moment résistant* ou *couple résistant élémentaire* :

$$\Delta C = fr = \omega' m r^2$$

La somme de toutes les masses m du corps donnera donc un *couple résistant total* :

$$C = \Sigma\ \Delta C = \omega' \Sigma\ m r^2$$

soit

$$\boxed{C = I\omega'.}$$

8.123 *Notion physique.* — Comparons les deux expressions trouvées ci-dessus, aux expressions relatives aux mouvements linéaires données aux paragraphes 1.43 et 1.26.

DÉSIGNATION	MASSE M EN TRANSLATION	MASSE EN ROTATION
Energie cinétique :	$T = \frac{1}{2} MV^2$	$T = \frac{1}{2} I\omega^2$
Inertie :	$F = M\gamma$	$C = I\omega'$

On voit donc que le moment d'inertie I *d'un corps joue dans un mouvement de rotation un rôle analogue à la masse* M *de ce corps dans un mouvement de translation.*

Il multiplie la vitesse ou l'accélération angulaires de la même façon que la masse multipliait la vitesse ou l accélération linéaires pour produire des effets analogues. En d'autres termes, *la masse résiste aux mouvements de translation* c'est-à-dire aux forces, *et le moment d'inertie résiste aux mouvements de rotation*, c'est à-dire aux couples (ou moments).

8.124 *Extension aux moments d'inertie des surfaces.* — On conçoit avant toute étude de résistance des matériaux, que le paramètre entrant en jeu pour *l'extension* d'un corps est sa *section* S. Le paramètre entrant en jeu pour la *rotation* de ce corps (fléchissement ou torsion par exemple), sera le moment d'inertie I de sa section par rapport à l'axe autour duquel on veut le faire tourner [1].

Il est très utile de se représenter physiquement la « *difficulté de rotation* » d'une surface autour de l'axe par rapport auquel on évalue le moment d'inertie. On conçoit ainsi que le moment d'inertie du rectangle plat de la figure 35 sera plus élevé autour de l'axe XX′ qu'autour de l'axe YY′, car on a fort bien l'intuition d'une difficulté plus grande pour le faire tourner autour du premier axe plutôt qu'autour du second.

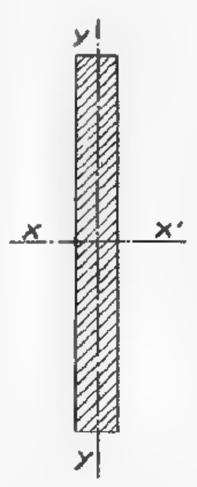


FIG. 35.

8.13 Dimensions des moments d'inertie. Unités.

8.131 *Moments d'inertie des corps.* — Les dimensions de I découlent directement de l'expression de définition

$$I = \Sigma\, mr^2.$$

Equation aux dimensions

$$I = ML^2 = \text{masse} \times \text{carré de longueur}.$$

Dans le système industriel où l'unité de masse aurait pour dimensions FT^2L^{-1} (voir Annexe § **10.**), le moment d'inertie a donc pour dimensions FT^2L. Ceci conduirait à l'exprimer en kgm.sec², par exemple. On spécifiera, en pratique, après le nombre trouvé : « unités du système M. K*p*. S. ».

8.132 *Moments d'inertie des surfaces.*

$$I = \Sigma\, sd^2.$$

Equation aux dimensions

$$I = \text{surface} \times \text{carré de longueur} = L^2L^2 = L^4.$$

Le moment d'inertie s'exprimera donc en *quatrième puissance de longueur*, par exemple en :

$$mm^4, \quad cm^4, \quad dm^4 \quad \text{etc...}$$

Relations :

$$1\ cm^4 = 10^4\ mm^4 = 10000\ mm^4$$

$$1\ dm^4 = 10^8\ mm^4\text{..., etc...}$$

1. — Les axes envisagés au cours de l'étude des moments d'inertie des surfaces seront, sauf spécification contraire, contenus dans le plan de ces surfaces.

8.14 Rayon de giration. — Au lieu d'écrire le moment d'inertie d'un corps sous la forme :

$$I = \Sigma mr^2$$

écrivons-le sous la forme :

$$I = M\rho^2$$

dans laquelle M représente la masse totale du corps. On obtient ainsi la définition d'une *distance* ρ telle que :

$$\rho^2 = \frac{I}{M}$$

soit :

$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{I}{M}}.}$$

Cette distance appelée *rayon de giration* est donc le *bras de levier fictif au bout duquel il faudrait appliquer toute la masse du corps pour retrouver le même moment d'inertie* par rapport à l'axe considéré.

On définit de même le *rayon de giration d'une surface* par l'expression :

$$\boxed{\rho = \sqrt{\frac{I}{S}}}$$

qui figure également la longueur du bras de levier au bout duquel toute la surface S, supposée concentrée, produirait le même moment d'inertie que l'ensemble de ses éléments, par rapport à l'axe considéré.

Unités : Le rayon de giration ρ étant une longueur, on l'exprimera donc en unités de longueur soit : mm, cm, m, etc...

Exemple. — Une surface S = 175 mm² a un moment d'inertie par rapport à un axe donné égal à : I = 28 cm⁴ = 28. 10⁴ mm⁴, son rayon de giration par rapport au même axe vaut

$$\rho = \sqrt{\frac{28 \cdot 10^4}{175}} = \sqrt{1600} = 40 \text{ mm}.$$

8.15 Notations. — Les valeurs des moments d'inertie ou des rayons de giration sont toujours relatives à des axes bien déterminés. Il est donc utile que leurs symboles permettent de définir exactement l'axe auquel elles se rapportent. C'est pourquoi nous ferons généralement suivre les lettres I et ρ d'un indice caractérisant l'axe considéré.

Exemple : $I_{xx'}, \rho_{xx'}$ = moment d'inertie ou rayon de giration autour de l'axe xx'.

8.2 PRODUITS D'INERTIE.

Avant d'aborder l'étude des propriétés des moments d'inertie, il est nécessaire de donner la notion d'autres grandeurs de mêmes dimensions appelées « *produits d'inertie* » ou encore « *moments centrifuges* ».

8.21 Définitions. — *Pour un corps,* on définit d'une façon générale par produit d'inertie par rapport aux plans xOz et zOy la somme (fig. 36 *a*)

$$K = \Sigma\, mxy$$

m étant un élément de masse de ce corps de coordonnées x et y par rapport aux plans considérés.

On définirait de même en associant deux à deux les plans de coordonnées, les produits d'inertie

$$K' = \Sigma\ myz \qquad \text{et} \qquad K'' = \Sigma\ mxz$$

Pour une surface plane, on définit d'une façon analogue le produit d'inertie K relatif à deux axes rectangulaires Ox et Oy, par la somme de produits élémentaires :

$$K = \Sigma\ sxy \qquad \text{(fig. 36 b)}$$

où s représente toujours l'aire d'un élément de surface, de coordonnées x et y [1].

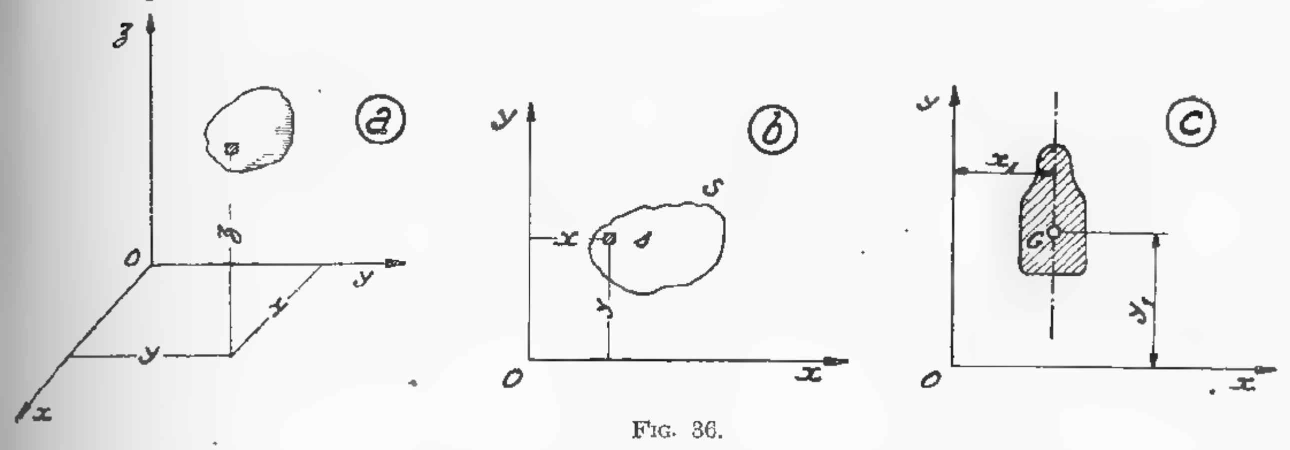


Fig. 36.

8.22 Propriété particulière aux surfaces planes symétriques orientées parallèlement à l'un des axes de référence. — Cette propriété s'énonce ainsi:

Le produit d'inertie d'une *surface plane symétrique*, par rapport à deux axes Ox et Oy dont l'un est parallèle à l'axe de symétrie, est égal au produit de l'aire totale de la surface par les coordonnées x_1 et y_1 du centre de gravité de cette surface, soit (fig. 36 *c*) :

$$K = S x_1 y_1$$

Si l'un des axes Ox ou Oy passe par le centre de gravité de la surface, on a

$$x_1 \text{ ou } y_1 \text{ nul}$$

d'où :

$$K = 0.$$

8.23 Produit d'inertie d'un rectangle incliné par rapport aux axes de référence. — Soit un rectangle de base b et de hauteur h (fig. 37) incliné d'un angle α par rapport à l'axe Ox, cet angle étant relatif à la dimension h et compté positivement *dans le sens trigonométrique* (voir chapitre I, § 1.2).

On démontre que le produit d'inertie

$$K = \Sigma\ sxy$$

de cette figure a pour expression :

$$K = S\left(x_1 y_1 + \frac{h^2}{24} \sin 2\alpha\right)$$

avec $S =$ surface du rectangle $= bh$,

1. — Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, les produits d'inertie sont des grandeurs de mêmes dimensions que les moments d'inertie. Ils seront donc mesurés en utilisant les mêmes unités.

x_1 et y_1 = coordonnées du centre de gravité de ce rectangle comptées positivement dans le sens des axes.

Remarque : On voit aisément dans cette formule que si α est égal à un multiple de π, c'est-à-dire si l'un des côtés du rectangle est parallèle à Ox, on a bien $K = S \cdot x_1 \cdot y_1$ selon le paragraphe précédent.

8.24 Calcul pratique des produits d'inertie des surfaces planes. — Le moyen le plus simple consiste à décomposer la figure en rectangles de côtés parallèles aux axes et dont l'assemblage reproduit au plus près le contour réel de la surface étudiée (voir fig. 38).

On applique pour chacun de ces rectangles la formule du paragraphe 8.22 et la somme des valeurs partielles donne le produit d'inertie cherché.

Remarques. — *a)* Pour des sections d'épaisseurs minces, il peut être avantageux d'envisager des rectangles inclinés (formule § **8.23**).

b) Les ordonnées x_1 et y_1 pouvant être négatives l'une ou l'autre selon l'emplacement de G par rapport aux axes de coordonnées, le *résultat peut être de signe négatif*, ce qui constitue à ce sujet une différence avec les moments d'inertie qui sont toujours exprimés par des valeurs positives.

c) On trouvera *Planche 4* une *application numérique* du calcul des produits d'inertie (voir § **9.2** ci-après).

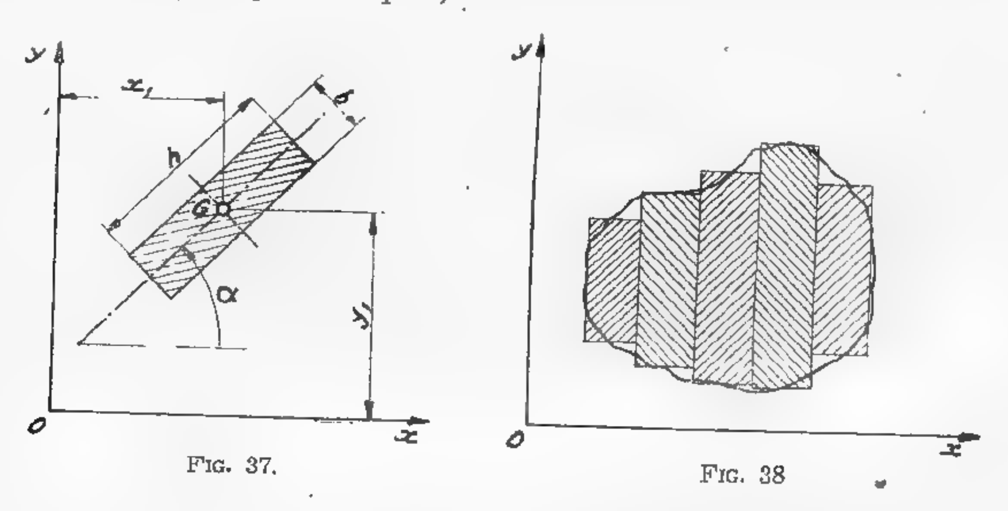


FIG. 37. FIG. 38

8.3 PROPRIETES PRINCIPALES DES MOMENTS D'INERTIE.

8.30 Remarque préliminaire. — Dans un but de simplification, nous ne donnerons l'énoncé de ces propriétés que dans le cas des surfaces planes (inerties de surfaces). Dans le cas des corps (inerties de masse), il suffirait généralement de remplacer les termes « surfaces » par les termes « masses ».

8.31 Relation entre les moments d'inertie et rayons de giration évalués par rapport à des axes parallèles dont l'un passe par le centre de gravité de la surface.

Moments d'inertie. — Cette relation s'exprime ainsi :

« *Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette surface par rapport à un axe parallèle au premier et passant par le centre de gravité, augmenté du produit de l'aire de la surface par le carré de la distance entre les axes.* » Soit (fig. 39) :

$$I_{XX'} = I_{xx'} + Sd^2 \qquad (1)$$

Le terme $I_{xx'}$ s'appelle encore *inertie propre* de la surface autour d'un axe parallèle à xx' et le terme Sd^2 *inertie de transport* de la surface par rapport à xx'.

Inversement, on a la relation :

$$I_{xx'} = I_{XX'} - Sd^2 \qquad (2)$$

inertie propre = inertie totale — inertie de transport.

Rayons de giration. — En désignant par $\rho_{XX'}$ et $\rho_{xx'}$ les rayons de giration relatifs aux axes précédents, on obtient immédiatement d'après la relation (1) :

$$S\rho^2_{XX'} = S\rho^2_{xx'} + Sd^2$$

soit $\rho^2_{XX'} = \rho^2_{xx'} + d^2$

d'où $\rho_{XX'} = \sqrt{\rho^2_{xx'} + d^2}$. (3)

Fig. 39.

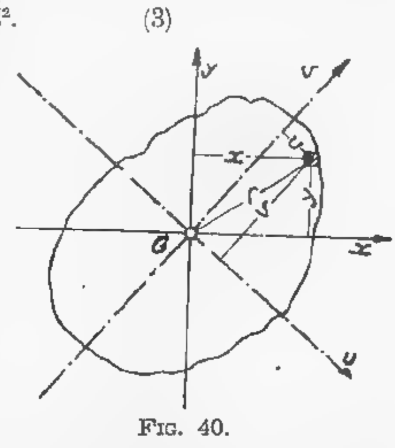


Fig. 40.

8.32 Relation entre les moments d'inertie évalués par rapport à des systèmes d'axes rectangulaires issus du centre de gravité. — Cette relation s'énonce ainsi :

La somme des moments d'inertie relatifs à tout système de deux axes rectangulaires issus du centre de gravité d'une surface est constante.

Soit, en effet (fig. 40), deux systèmes d'axes rectangulaires Gx, Gy et Gu, Gv issus du centre de gravité :

$$I_x + I_y = \Sigma sx^2 + \Sigma sy^2 = \Sigma s(x^2 + y^2)$$

Or $x^2 + y^2 = r^2 = u^2 + v^2$

donc $\Sigma s(x^2 + y^2) = \Sigma s(u^2 + v^2)$

d'où $\boxed{I_x + I_y = I_u + I_v.}$ (4)

8.33 Relation entre les moments d'inertie autour d'axes rectangulaires issus du centre de gravité et le moment d'inertie autour d'un axe quelconque passant par le centre de gravité (fig. 41). — En désignant par α l'angle de l'axe quelconque Gu avec l'axe Gx du système d'axes rectangulaires quelconques Gx, Gy issu de G, cette relation s'exprime par l'équation suivante qui résulte d'un « changement de coordonnées » classique :

$$\boxed{I_u = I_x \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha - K \sin 2\alpha} \qquad (5)$$

Dans cette relation, K représente le produit *d'inertie* de la surface considérée par rapport au système d'axes Gx, Gy, soit

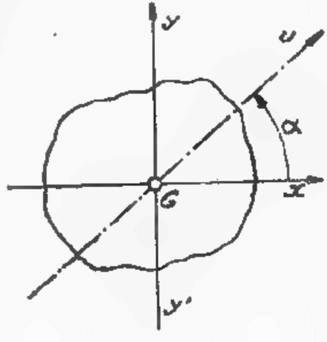


Fig. 41.



$K = \Sigma sxy$ (Voir paragr. précédent).

8.4 AXES PRINCIPAUX D'INERTIE DES SURFACES PLANES.

8.41 Définition. — L'équation (5) ci-dessus permet d'étudier le moment d'inertie I_u en fonction de l'angle α d'orientation de l'axe u.

Il est intéressant, en particulier, de voir si la fonction $I_u = f(\alpha)$ qu'elle détermine présente un *maximum* ou un *minimum*. Pour cela, cherchons la *dérivée* de I_u par rapport à α. On obtient [1]

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -2\ I_x \cos\alpha \sin\alpha + 2\ I_y \sin\alpha \cos\alpha - 2\ K \cos 2\alpha$$

soit

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = -I_x \sin 2\alpha + I_y \sin 2\alpha - 2\ K \cos 2\alpha$$

$$= \sin 2\alpha\ (I_y - I_x) - 2\ K \cos 2\alpha$$

Cette dérivée s'annule pour

$$2\ K \cos 2\alpha = \sin 2\alpha\ (I_y - I_x)$$

soit

$$2\ K = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}(I_y - I_x) = \text{tg}\ 2\alpha\ (I_y - I_x)$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{tg}\ 2\alpha = \frac{2\ K}{I_y - I_x}} \qquad (6)$$

La tangente d'un angle 2α variant de 0 à 360° reprend deux fois la même valeur pour deux angles $2\alpha_1$ et $\pi + 2\alpha_1$ différant de 180° (voir chapitre I, § **1.6**). On aura donc quatre angles : α_1, $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right)$, $(\pi + \alpha_1)$ et $\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha_1\right)$ satisfaisant à la relation (6) ci-dessus.

Ces quatre angles définissent *deux axes rectangulaires caractéristiques de la surface, par rapport auxquels les moments d'inertie sont respectivement maximum et minimum* (fig. 42).

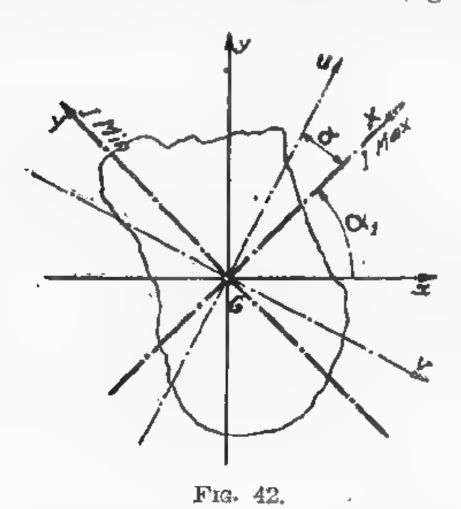


Fig. 42.

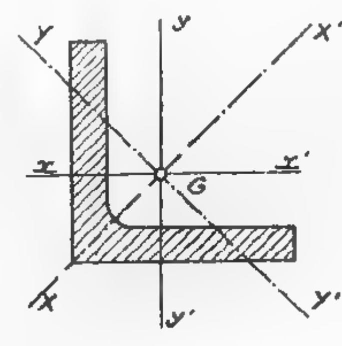


Fig. 43.

Ces axes sont appelés *axes principaux d'inertie* de la surface considérée. Ils jouent un rôle important en Résistance des matériaux. Les valeurs des moments d'inertie I max. et I min. qu'ils déterminent sont données, après remplacement de α par sa valeur α_1 dans l'équation (5) par la relation :

$$\boxed{I_{max} \text{ ou } I_{min} = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y \pm \frac{I_x + I_y}{\cos 2\alpha}\right)} \qquad (7)$$

1. — Voir chapitre I, § 4.

Ces valeurs extrêmes sont appelées : *moments d'inertie principaux* de la surface [1].

8.42 Propriétés des axes principaux d'inertie des surfaces planes.

a) D'après la relation (4) ci-dessus, les axes principaux étant normaux entre eux, on a évidemment (fig. 42)

$$I_{max} + I_{min} = I_x + I_y = I_u + I_v$$

b) *Le produit d'inertie d'une surface est nul par rapport à ses axes principaux.*

$$K_{XY} = 0.$$

La relation (5) ci dessus donne donc par rapport à ces axes :

$$\boxed{I_u = I_{max} \cos^2 \alpha + I_{min} \sin^2 \alpha} \qquad (8)$$

α désignant, cette fois, *l'angle de l'axe central quelconque Gu avec l'axe principal d'inertie maximum.*

Cette relation permet donc le calcul facile de I_u connaissant les moments d'inertie principaux.

c) Quand une surface possède *un axe de symétrie*, cet axe est confondu avec l'un des axes principaux d'inertie.

Exemples : Profilé en U : normale au milieu de l'âme ; cornière à ailes égales : bissectrice de l'angle d'ouverture.

Quand une surface possède *deux axes de symétrie* (donc perpendiculaires), ils sont tous deux confondus avec les axes principaux d'inertie.

Exemples : Les axes principaux d'inertie d'un rectangle sont confondus avec ses médianes, ceux d'un losange avec ses diagonales, ceux d'une ellipse avec ses axes, etc...

d) Quand une surface possède un *centre de symétrie*, tous les axes issus de G (qui est confondu avec ce centre de symétrie) sont axes principaux d'inertie, ce qui veut dire que I a la même valeur autour de tous ces axes.

Exemples : Cercle, carré, triangle équilatéral, hexagone régulier et, d'une façon générale, toutes les figures polygonales régulières inscrites.

8.43 Sens physique des axes principaux d'inertie. — Considérons la cornière représentée, figure 43. Il est assez commode de se rendre compte en essayant, par la pensée, de la faire tourner autour des différents axes indiqués, qu'elle offrira une résistance *minimum* à ce mouvement, autour de YY' et une résistance *maximum* autour de XX'.

Ces axes sont respectivement ceux de I min. et I max.

8.5 NOTIONS SUR L'ELLIPSE D'INERTIE ET LE CERCLE D'INERTIE DES SURFACES PLANES.

8.51 Ellipse centrale d'inertie. — Les axes principaux d'inertie définissent deux *rayons de giration principaux* d'une surface :

$$\rho_{max} = \sqrt{\frac{I_{max}}{S}} \qquad \text{et} \qquad \rho_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}$$

1. — On définit de même pour un corps (inerties de masses) trois axes principaux d'inertie et trois moments d'inertie principaux.

En faisant apparaître les rayons de giration dans l'équation (7) du paragraphe 8.41, on constate analytiquement qu'ils peuvent être représentés par les distances existant entre le centre de gravité G et les tangentes à une ellipse de centre G, de demi-grand axe $GA = \rho$ max. et de demi-petit axe $GB = \rho$ min. (fig. 44).

Cette propriété définit *l'ellipse centrale d'inertie* d'une surface qui figure ainsi une représentation géométrique des rayons de giration, donc des racines carrées des moments d'inertie, de cette surface autour d'axes quelconques issus de son centre de gravité.

Ainsi (fig. 44) le rayon de giration ρ_x autour de Gx est obtenu par les distances entre les tangentes à l'ellipse centrale parallèles à Gx et le centre de gravité G.

Fig. 44.

Remarques. — *a*) Les points de contact de ces tangentes définissent le *diamètre conjugué* au diamètre Gx de l'ellipse. Le rayon de giration autour d'un axe diamétral est donc donné (à l'échelle du tracé) par la *demi-projection sur une normale à cet axe de son diamètre conjugué ;*

b) L'ellipse d'inertie est évidemment orientée suivant les axes de symétrie des figures qui en possèdent puisque ceux-ci sont axes principaux d'inertie ;

c) Pour une figure possédant un *centre de symétrie* (carré, cercle, etc...), l'ellipse d'inertie devient un *cercle ;*

d) On définit de même pour un corps un *ellipsoïde d'inertie* dirigé suivant ses trois axes principaux.

8.52 Cercle d'inertie. — L'ellipse d'inertie est de construction assez délicate et imprécise ; on lui préfère industriellement, pour la résolution des problèmes de changement d'axes d'inertie, une construction plus commode basée sur des *propriétés de lieux géométriques* (et non sur des propriétés physiques) qui s'appelle : *cercle d'inertie.*

C'est cette construction que nous utiliserons ci-après pour des applications numériques.

8.521 *Détermination des axes principaux d'inertie d'une section dissymétrique.* — Soient deux axes rectangulaires quelconques Gx et Gy passant par le centre de gravité G et, par rapport auxquels on a évalué les moments d'inertie I_x et I_y et le produit d'inertie K_{xy} de la section (fig. 45).

A une certaine « *échelle des inerties* » (1 mm = n mm^4 par exemple) portons sur Ox, $GA = I_y$ et $AB = I_x$ et traçons le cercle de diamètre GB qui aura O pour centre. Elevons en A une perpendiculaire $AH = K_{xy}$ (sens positif selon Gy). La droite HO détermine un diamètre ED sur lequel on a, à l'échelle adoptée,

$$\overline{EH} = I \text{ max.} \qquad \text{et} \qquad \overline{HD} = I \text{ min.}$$

La direction des axes principaux correspondants s'obtient directement en joignant D et E à G. L'angle α_1 des démonstrations précédentes est indiqué sur la figure.

8.522 *Détermination d'un moment d'inertie quelconque connaissant les axes principaux et les moments d'inertie principaux.* — Portons bout à bout sur l'un des axes principaux, les valeurs du

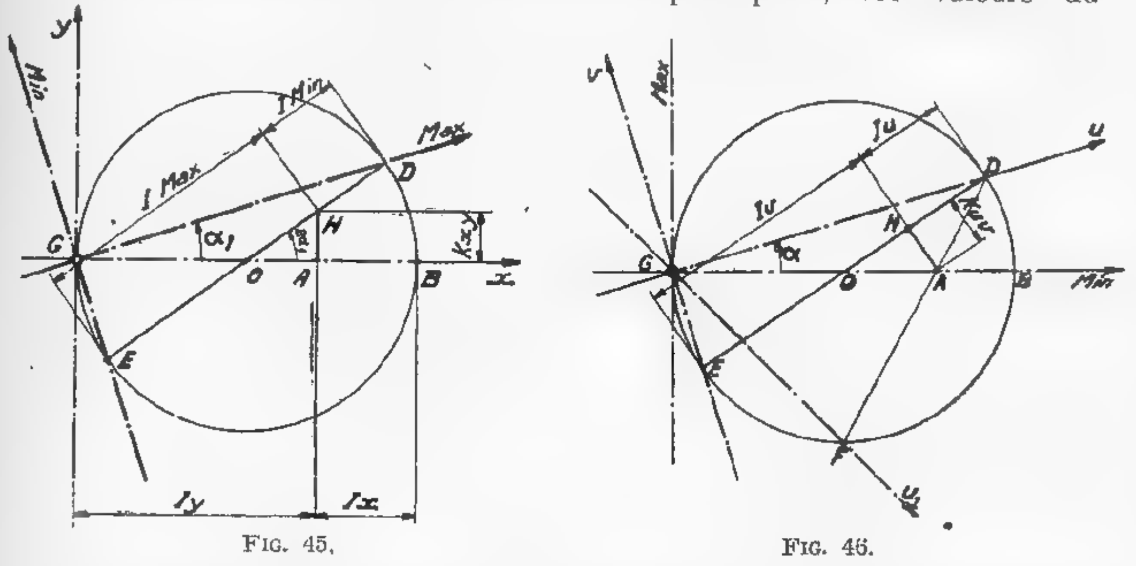


FIG. 45. FIG. 46.

moment d'inertie relatif à l'autre axe principal puis à lui-même, par exemple (fig. 46) GA = I_{max} et AB = I_{min} sur l'axe de I_{min}. On obtient ainsi le cercle de diamètre GB = $I_{max} + I_{min}$ qui a pour centre le point O.

Soit à déterminer les moments d'inertie autour d'axes rectangulaires quelconques G*u* et G*v*.

En élevant la perpendiculaire AH au diamètre ED intercepté par ces axes, on obtient à l'échelle :

$$HD = I_u \qquad EH = I_v.$$

On trouve également

$\overline{AH} = K_{uv}$ (produit d'inertie relatif à G*u* et G*v*)

et la direction Gu_1 du *diamètre conjugé* à G*u* dans l'ellipse centrale d'inertie (même construction pour G*v* en joignant EA et l'extrémité de la corde correspondante, à G).

8.6 MOMENTS D'INERTIE POLAIRES DES SURFACES.

8.61 **Définition.** — On désigne par *moment d'inertie polaire* d'une surface S, par rapport à un point O du plan de cette surface, la somme des produits de tous les éléments *s* de cette surface, par le carré de leurs distances *r* au point O

$$\boxed{I_0 = \Sigma\, sr^2.} \qquad \text{(fig. 47)}$$

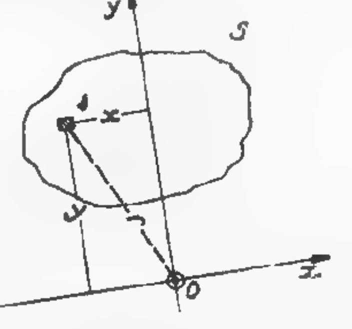


FIG. 47.

On voit, par cette définition, que le moment d'inertie polaire d'une surface, n'est autre chose que son moment d'inertie par rapport à un axe particulier normal au plan de cette surface qu'il rencontre au point O considéré.

On définit de même qu'au paragraphe 8.14 un *rayon de giration polaire* de la surface, autour de O.

8.62 **Propriété principale.** — Envisageons un système d'axes rectangulaires quelconques O*x* et O*y* issus du point O et contenus dans le plan de la surface.

On a (fig. 47) :

$$r^2 = x^2 + y^2$$

d'où

$$\Sigma\, sr^2 = \Sigma\, sx^2 + \Sigma sy^2$$

soit

$$\boxed{I_0 = I_x + I_y.}$$

Règle. — *Le moment d'inertie polaire d'une surface autour d'un point donné est égal à la somme de ses moments d'inertie autour de deux axes rectangulaires quelconques passant par ce point.*

En particulier, le *moment d'inertie polaire central* I_G évalué autour du centre de gravité est représenté à l'échelle, dans le cercle d'inertie, par le diamètre de ce cercle (voir § **8.52**).

Les moments d'inertie polaires sont reliés au moment d'inertie central I_G par une relation analogue à la relation (**1**) (§ **8.31**), soit :

$$\boxed{I_0 = I_G + Sd^2}$$

dans laquelle d = distance GO.

Voir valeurs usuelles des moments d'inertie polaires des surfaces, *Planche* 2.

8.7 MODULES D'INERTIE DES SURFACES.

On désigne par *module d'inertie en un point* A *d'une surface* S *par rapport à un axe quelconque xx' de son plan,* le rapport du moment d'inertie $I_{xx'}$ de la surface à la distance v du point A à l'axe xx' :

Module d'inertie de A par rapport à $xx' = \frac{I_{xx'}}{v}$ (fig. 48).

Nous verrons ultérieurement au cours de l'étude de la *flexion* et de la *torsion,* qu'il est commode de définir pour une section donnée les valeurs extrêmes de ce module appelées *modules de section :*

valeur minimum : $\left(\frac{I}{V}\right)_{xx'} \quad \frac{I_{xx'}}{v_{max}} = \left(\frac{I}{V}\right)^{min}_{xx'}$

valeur maximum : $\left(\frac{I}{V'}\right)_{xx'} \quad \frac{I_{xx'}}{v_{min}} \quad \left(\frac{I}{V}\right)^{max}_{xx'}$

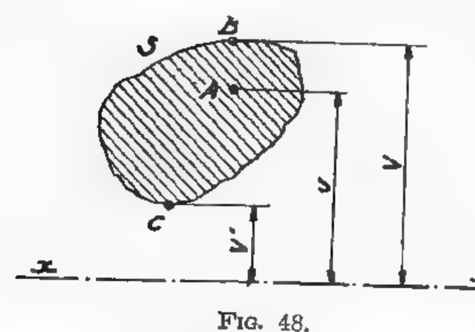


Fig. 48.

On définit de même des *modules d'inertie polaires* $\frac{I_0}{v}$ appelés encore *modules de torsion* par analogie avec les premiers que l'on désigne souvent par *modules de flexion.*

Il est aisé de voir que ces grandeurs ont pour *dimension :*

$$\frac{L^4}{L} = L^3$$

c'est-à-dire une *troisième puissance de longueurs* (comme les volumes).

Leurs unités sont donc : le mm^3, le cm^3, le dm^3...

8.8 MOMENTS D'INERTIE, RAYONS DE GIRATION, MODULES D'INERTIE DES SURFACES USUELLES.

Nous donnons, **Planche 2** (en fin de volume), des tableaux groupant les expressions des moments d'inertie, rayons de giration et modules d'inertie de quelques surfaces usuelles relativement à des axes repérés sur les figures correspondantes.

Nous y avons également fait apparaître les moments d'inertie polaires centraux I_o quand ceux-ci donnaient lieu à des expressions commodes.

Toutes ces valeurs se déterminent par des *intégrations simples* résultant de la définition des moments d'inertie.

Il est très utile de retenir de mémoire les expressions relatives aux rectangles et aux cercles pleins ou creux qui sont les plus utilisées [1].

8.9 CALCUL PRATIQUE DES MOMENTS D'INERTIE DES SURFACES PLANES QUELCONQUES.

8.91 Principe. — Ce principe repose essentiellement sur la propriété énoncée au paragraphe **8.31** ci-dessus : On décompose la surface (ou section) étudiée en *figures simples* dont on connaît la position du centre de gravité et l'expression des *moments d'inertie propres* I_p autour d'axes passant par ces centres de gravité et parallèles aux axes autour desquels on a à évaluer les moments d'inertie de la section (ces expressions seront déduites des tableaux, *Planche* 2).

Cette décomposition en éléments étant arbitraire, on l'effectuera de la façon la plus pratique pour les calculs (voir ci-après). La juxtaposition de ces éléments doit reproduire au plus près le contour de la figure étudiée.

On effectue ensuite les *inerties de transport* de ces éléments

$$I_t = sd^2 \qquad \text{(Voir § 8.31).}$$

La somme des inerties propres + inerties de transport donnera le résultat cherché :

$$\boxed{I = \Sigma I_p + \Sigma I_t}$$

8.92 Disposition des calculs. Le problème le plus fréquent en Résistance des matériaux est celui du *calcul des moments d'inertie des sections autour d'axes passant par leurs centres de gravité.*

Le problème se trouve donc combiné avec celui d'une *recherche des centres de gravité des sections étudiées*, dans le cas général où ces centres de gravité ne sont pas directement déterminés par des considérations de double symétrie (centres de symétrie confondus avec les centres de gravité).

Les calculs seront alors avantageusement groupés dans des tableaux du genre de ceux figurant dans les applications numériques données au paragraphe suivant (*Planches* 3 *et* 4).

Quand le centre de gravité est connu, la première partie du tableau est à éliminer.

NOTA. — Pour les sections composées de profilés standard (cornières, U, I, etc...), on aura avantage à « isoler en bloc » ces profilés dont les caractéristiques propres de résistance (s et I_p) sont données par les tableaux standard (ou curseurs) en usage courant dans les bureaux d'études (voir application n° 1, *Planche* 3).

8.93 Calculs graphiques. – Nous donnerons au chapitre IV (Statique graphique) des méthodes permettant une résolution entièrement graphique des problèmes de recherche des moments d'inertie. Ces méthodes sont à conseiller dans le cas de sections compliquées.

1. — Quand les axes d'inertie considérés sont des axes principaux, nous les avons affectés de lettres majuscules. Les modules d'inertie n'ont été donnés que relativement à ces axes principaux.

9. APPLICATIONS NUMÉRIQUES

(*Recherche des centres de gravité des moments d'inertie et axes principaux d'inertie* : § **7.** et **8.** précédents.)

9.1 APPLICATION N° 1 (Planche 3).

Cette application concerne le calcul du *moment d'inertie principal maximum* $I_{YY'}$ d'une section composée possédant un *axe de symétrie* XX'.

La position, sur cet axe de symétrie, du centre de gravité est déterminée en prenant pour référence des moments statiques, l'axe △ tangent à la face extérieure de la semelle côté gauche.

Les calculs sont groupés dans un même tableau.

Nota. — Les semelles de la section sont composées par des cornières standard dont les caractéristiques propres sont indiquées sur la figure.

9.2 APPLICATION N° 2 (Planche 4).

Cette application concerne la détermination des *axes principaux d'inertie et moments d'inertie principaux* de la section droite d'une *coquille dissymétrique* (structure résistante d'un volet de courbure par exemple).

La section est décomposée en éléments rectangulaires selon indications du schéma. Les caractéristiques propres de chacun de ces éléments sont calculées en tenant compte de leurs angles α d'inclinaison sur l'horizontale :

Les moments d'inertie propres I_{px} et I_{py} de ces rectangles inclinés sont déterminés en utilisant la formule donnée dans le tableau de la *Planche* 2.

Les produits d'inertie K_{xy} sont calculés à l'aide de l'expression donnée au paragraphe **8.23**.

10. ANNEXE : SYSTÈMES D'UNITÉS

Pour répondre au désir si justement formulé par M. l'Ingénieur général de l'Air DUMANOIS, *dans sa Préface à la première édition de cet ouvrage, nous donnons ci-après les principes des différents systèmes d'unités utilisés en Mécanique, ainsi qu'un tableau fixant les correspondances qui existent entre ces systèmes.*

10.1 GÉNÉRALITÉS.

Un système d'unités se définit à l'aide de trois grandeurs indépendantes, dites « *grandeurs fondamentales* » qui peuvent d'ailleurs, en théorie, être choisies arbitrairement. Les unités des autres grandeurs, appelées *grandeurs dérivées*, résultent directement du choix des grandeurs fondamentales.

Les trois systèmes les plus utilisés sont :

le *système industriel* (ou système transitoire courant).
le *système C. G. S.* (utilisé principalement en électricité).
le *sytème légal M. T. S.*

10.2 SYSTÈME INDUSTRIEL.

C'est le système d'unités que nous avons exclusivement utilisé dans cet ouvrage.

Rappelons que les trois *grandeurs fondamentales* choisies pour ce système sont celles définies par les trois unités suivantes : [1]

1. — Le choix de ces unités fait encore désigner le système industriel par « *système* M. Kp. S. » (mètre, kilogramme-poids, seconde) ou, parfois, par « système M. K. S. ». Cette seconde désignation peut cependant prêter à confusion avec un système

— unité de *longueur* : le *mètre*,

— unité de *force* (ou *poids*) : le *kilogramme* (ou kg) : action de la pesanteur à Paris, sur le kilogramme étalon (lingot déposé au Bureau International des poids et mesures),

— unité de *temps* : la *seconde*.

Ces grandeurs fondamentales ne comportent donc pas d'unité de *masse*. *La masse constitue, dans le système industriel, une grandeur dérivée dont l'unité ne porte pas d'appellation particulière.*

Cette unité de masse (qu'il est impropre de désigner par kg-masse) correspond à la masse d'un corps à qui une force d'un kilogramme donne l'accélération unité : c'est donc la masse d'un corps pesant 9,81 kilogrammes à Paris (Voir note [1] ci-dessous).

C'est pourquoi, pour chiffrer la masse d'un corps dans ce système, il convient de diviser son poids P par l'accélération g de la pesanteur [1].

La valeur ainsi trouvée peut, par homogénéité [2], se désigner en kg sec^2/m. Notons que les *masses spécifiques se désigneraient* en kg sec^2/m^4.

On constate immédiatement la lacune théorique du système industriel dans lequel la définition de l'unité fondamentale de force est obligée de faire appel à un lieu géographique bien déterminé.

Rappelons que les principales *unités dérivées* du système industriel sont :

— unités de *travail* (ou énergie ou force vive) ou de *moments* des forces : le *kilogrammètre* (kgm) et ses multiples ou sous-multiples (tm, mmkg... etc.) Mentionnons également le *cheval-heure* (ch-h) qui vaut $75 \times 60^2 = 27 \cdot 10^4$ kgm.

— unités de *puissance* : *le kilogrammètre par seconde* (kgm/sec.), le *Poncelet* qui vaut 100 kgm/sec. (unité peu utilisée en pratique) et le *cheval-vapeur* (ch), qui vaut 75 kgm/sec (unité peu différente du *Horse-Power* anglais (H. P.) qui vaut 76,041 kgm/sec).

— unités de *pression* (ou de *fatigue, contrainte*, ou *tension*) : le *kilogramme par m*^{2} (kg/m^2) ou ses multiples tels que : kg/cm^2, kg/mm^2. On emploie également l'*atmosphère* qui vaut 1,033 kg/cm^2.

10.3 SYSTÈME C.G.S.

Les *unités* des trois *grandeurs fondamentales* de ce système (dont la création remonte à 1861) sont :

— unité de *longueur* : le centimètre (cm),

— unité de *masse* (et non de poids) : le *gramme* (g), millième partie de la masse du lingot kilogramme-étalon.

— unité de *temps* : la *seconde*.

Les principales *unités des grandeurs dérivées* sont :

— unité de *force* ou de *poids* : la *dyne* (dy) force qui, appliquée à une masse de 1 g procure à cette masse une accélération de 1 m/sec^2. Une *mégadyne* (Mdy) = 10^6 dynes.

---

d'unités comportant la grandeur fondamentale *masse*, avec comme unité le kilogramme. Ce système s'apparenterait directement aux systèmes C. G. S. ou M. T. S. (Voir ci-après).

1. — L'accélération g de la pesanteur (en m/sec^2) varie, au niveau de la mer, de 9,781 au pôle à 9,831 à l'équateur. Sa variation avec l'altitude est de — 0,003 m/sec^2 par kilomètre de hauteur. La valeur précise de g à Paris (définition du kg-poids) est de 9,80665 m/sec^2. On admet généralement $g = 9{,}81$ m/sec^2 comme valeur pratique.

2. — Dans le système industriel, l'équation aux dimensions de la masse est :

$$\frac{F}{L/T^2} = FT^2L^{-1}.$$

— unité de *travail : l'erg* (travail produit par une force de 1 dyne dont le point d'application décrit 1 cm dans sa direction). Cette unité étant très petite on emploie également le *joule* (J) qui vaut 10^7 ergs.

— unité de *puissance :* l'unité directe (erg/sec.) n'a pas de désignation particulière. On utilise le *watt* (W) qui vaut 10^7 ergs/sec, c'est-à-dire 1 joule/sec.

— unité de *pression* : la *barye* qui vaut 1 dyne par cm². Une *mégabarye* = 10^6 baryes.

— Mentionnons que les principales unités électromagnétiques (intensité, résistance, potentiel) se rattachent à ce système.

10.4 SYSTÈME LÉGAL M.T.S.

Ce système, dont l'application est légalement obligatoire en France depuis 1919, repose sur les mêmes grandeurs fondamentales que le système G.G.S., c'est-à-dire sur les trois grandeurs indépendantes : *longueur, masse* et *temps*. Il ne diffère de ce système que par le choix des *unités* de ces grandeurs fondamentales [1]. Ces unités sont :

— unité de *longueur :* le *mètre* (soit donc 100 unités C.G.S.),

— unité de *masse* (et non de poids) la *tonne* (t) égale à mille fois la masse du lingot kilogramme-étalon (soit donc 10^6 unités C.G.S.),

— unité de *temps* : la *seconde* (comme pour le système C.G.S.).

Les principales *unités des grandeurs dérivées* sont :

— unité de *force* ou de *poids* : le *sthène* (sn), force qui, appliquée à une masse de 1 t, procure à cette masse une accélération de 1 m/sec². (1 sn=10^8 dynes) Un *centisthène* (csn)=10^{-2} sn=10^6 dynes=1 mégadyne.

— unité de *travail* : le *kilojoule* (kJ), travail engendré par une force de 1 sn dont le point d'application décrit 1 m dans sa direction (1 kJ=10^3 J=10^{10} ergs).

— unité de *puissance* : le *kilowatt* (kW) égal à 1 kJ/sec (1 kW=10^3 W).

- unité de *pression* : la *pièze* (pz) qui vaut 1 sn/m² (soit 10^4 baryes). Cette unité étant petite, on emploie surtout ses multiples tels que : l'*hectopièze* (1 hpz=100 pz), ou la *myriapièze* (1 mapz=10^6 pz).

Pour la mesure des pressions atmosphériques, on emploie également le *Bar* qui vaut une hectopièze (1 millibar (mB) = 1 décipièze (dpz) = 10 baryes).

— Mentionnons que le système M. T. S. comporte une unité légale de quantité de chaleur qui est la *thermie* (1 th=10^3 grandes calories= — 10^3 frigories = 10^6 petites calories), et qu'il se rattache directement aux unités électromagnétiques.

10.5 TABLEAU DE CORRESPONDANCE.

Nous donnons, ci-après, un tableau indiquant les principales relations qui existent entre les unités du système industriel et celles du système légal M.T.S. On remarquera que la correspondance avec le système C.G.S. s'établit directement à l'aide des relations entre ce système et le système M.T.S. données au paragraphe 4. ci-dessus.

Ce tableau est établi en partant des unités industrielles et en utilisant la valeur courante $g = 9{,}81$ m/sec².

Afin d'éviter une confusion, nous avons écrit en *italique* les unités de

1. — Ce choix a été fait en vue d'obtenir des unités mieux adaptées que celles du système C. G. S. aux besoins actuels de l'industrie

TABLEAU DE CORRESPONDANCE ENTRE SYSTEME INDUSTRIEL ET SYSTEME M. T. S.

Grandeur étudiée	Unité du système industriel (ou système transitoire M Kp. S.)	Valeur en unités M.T.S. (avec g = 9,81 m/sec²)	Relations remarquables	Relations approchées (pour usage mnémotechnique)
Masse	1 unité industrielle (1 kg sec²/m	0.00981 *tonne*	1 kg sec²/m=9,81 *kg*	—
Masse spécifique	1 unité industrielle (1 kg sec²/m⁴)	0,00981 *tonne*/m³		
Force (ou poids)	kilogramme (kg)	0,00981 sthène	1 kg=0,981 csn 1 t =9,81 sn	1 kg = 1 csn 1 t = 1 dasn
Travail (ou énergie, force vive, ou moment des forces)	kilogrammètre (kgm)	0,00981 kilojoule	1 kJ = 101.94 kgm. 1 kgm = 9,81 J.	1 kJ. = 100 kgm 1 kgm = 10 J 1 mmkg=1 mm. csn.
	cheval-heure (27 · 10⁴ kgm)	2650 kilojoules	1 ch/h=0,736 kW/h	
Puissance	kilogrammètre par seconde (kgm/sec)	0,00981 kilowatt	1 kW = 101,94 kgm/sec	1 kW = 100 kgm/sec
	Poncelet (100 kgm/sec)	0,981 kilowatt	1 kW = 1,0194 Poncelet	1 kW = 1 Poncelet
	cheval-vapeur (ch) (75 kgm/sec)	0,736 kilowatt	1 kW=1,36 ch	4 ch = 3 kW
Pression (ou contrainte)	kilog par m² (kg/m²)	0,00981 pièze	1 kg/m² = 0,981 cpz	1 kg/m² = 1 cpz
	kilog par cm² (kg/cm²)	98,1 pièzes	1 kg/cm² = 0,981 hpz	1 kg/cm² = 1 hpz
	kilog par mm² (kg/mm²)	9810 pièzes	1 kg/mm²=0,981 mapz	1 kg/mm² = 1 mapz
	atmosphère (1,033 kg/cm²)	101,3 pièzes	1 atm = 1,013 hpz = 1,013 Bar	1 atm. = 1 hpz = 1 Bar

TABLEAU DES MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES DECIMAUX

Puissance de 10 par laquelle est multipliée l'unité		Préfixe à mettre avant le nom de l'unité	Symbole à mettre avant celui de l'unité
10^6 ou	1 000 000	méga	M
10^5	100 000	hectokilo	hk
10^4	10 000	myria	ma
10^3	1 000	kilo	k
10^2	100	hecto	h
10^1	10	déca	da
10^0	1		
10^{-1}	0, 1	déci	d
10^{-2}	0, 01	centi	c
10^{-4}	0, 000 1	milli	m
10^{-3}	0, 001	décimilli	dm
10^{-5}	0, 000 01	centimilli	cm
10^{-6}	0, 000 001	micro	µ

masse du système M.T.S. ayant mêmes désignations (ou symboles) que les unités de force du système industriel (lignes 1 et 2 du tableau).

Nous avons fait suivre ce tableau de correspondance d'un tableau donnant les préfixes et symboles à utiliser pour désigner les multiples ou sous-multiples décimaux des unités du système M.T.S. (ou C.G.S.)

10.6 REMARQUE.

Il paraît utile de préciser la réponse à l'objection suivante, posée sous forme d'un exemple concret :

Quand on parle d'un « avion de 20 tonnes », le nombre 20 désigne-t-il son poids ou sa masse ?

Il désigne l'un ou l'autre, selon le système d'unités que l'on emploie :

a) Si l'on utilise le *système industriel*, l'avion *pèse* 20 tonnes (soit 20.000 kg) mais sa *masse*, qui est toujours égale à 20.000 fois celle du kilogramme-étalon, se mesure par la valeur : $\frac{20}{9,81} = 2,04$ en unités t. sec²/m (ou $\frac{20.000}{9,81} = 2040$ en unités kg sec²/m).

b) Si l'on utilise le *système* M.T.S., le même avion a une *masse* de 20 *tonnes* et son *poids* se mesure en sthènes, par la valeur : $20 \times 9,81 = 196,2$ sn.

(Nous avons admis, implicitement, la valeur courante $g = 9,81$ m/sec²).

CHAPITRE III

ÉQUILIBRE STATIQUE DES SYSTÈMES

1. GÉNÉRALITÉS

1.1 DEFINITION.

On dit qu'un système matériel est en *équilibre statique extérieur* quand l'ensemble des *actions extérieures* qui lui sont appliquées est équivalent à zéro, c'est-à-dire n'engendre aucune accélération à ce système. C'est le cas des corps au repos ou en mouvement uniforme.

1.2 ACTIONS ET RÉACTIONS.

L'expression « *ensemble des actions extérieures* » employée dans la définition ci-dessus demande à être précisée.

Cet ensemble comprend :

— les actions extérieures proprement dites, communément appelées *forces appliquées* au système ;

— les actions de contact ou *réactions* que ce système reçoit des systèmes voisins pour conserver son équilibre.

Exemples. — Un objet placé sur une table est en équilibre sous l'action de son poids (*force appliquée*) et sous l'action de contact de la table (*réaction*).

La table est elle-même en équilibre sous l'action du poids de l'objet et de son poids propre (*forces appliquées*) et sous l'action des forces de contact (*réactions*) que le sol fournit à ses pieds.

Un avion en vol à vitesse constante est en équilibre sous l'action de son poids et de la force de traction de son hélice (*forces appliquées*) et sous les actions aérodynamiques qui agissent sur ses divers éléments (*réactions*).

Remarques. — *a*) Il convient de remarquer que la distinction matérielle entre les actions et les réactions peut devenir assez subtile, c'est pourquoi il suffit généralement d'englober sous la désignation de *réactions* toutes les actions extérieures qui n'ont pas été comptées comme forces appliquées et qui sont nécessaires pour établir l'équilibre externe.

b) Nous avons précisé dans la définition ci-dessus qu'il s'agissait de « *l'équilibre extérieur* » des systèmes. Il existe également un *équilibre interne* de ces systèmes dont nous nous occuperons ultérieurement en *Résistance des matériaux*.

1.3 PROBLEME DE L'ÉQUILIBRAGE EXTERNE.

Equilibrer un système revient donc à rechercher ses *réactions* ou *forces de liaison extérieures*.

Celles-ci peuvent comprendre, de même que les efforts appliqués, des forces et des moments.

Nous ne saurions trop insister sur l'importance du problème de l'équilibrage de tout élément étudié. *C'est toujours le premier travail à effectuer avant tout calcul de Résistance des matériaux.*

1.4 CONVENTIONS DE REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.

Pour distinguer, sur les figures, les forces appliquées des réactions, nous conviendrons de représenter les *forces appliquées* par des vecteurs en *traits continus* et les *réactions* par des vecteurs en *traits interrompus* (pointillés longs).

2. EQUATIONS D'EQUILIBRE STATIQUE EXTÉRIEUR D'UN SYSTÈME

2.0 REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

La condition d'équilibre statique extérieur définie ci-dessus au paragraphe **1.1** peut se traduire sous forme *d'équations fondamentales* que nous donnons ci-après en les faisant suivre d'interprétations physiques. Nous donnerons ensuite au paragraphe **5.** quelques exemples qui concrétiseront cet exposé. La statique graphique (chapitre IV) nous fournira en supplément des interprétations purement géométriques de ces conditions d'équilibre.

2.1 EQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME A TROIS DIMENSIONS.

2.11 Equations générales. — Soit un corps soumis à un certain système d'actions extérieures (forces appliquées et réactions) comprenant des forces F_1, F_2, F_3... et des moments M_1 M_2... Désignons d'une manière générale par F_x F_y F_z les projections de chaque force sur un système d'axes Ox, Oy, Oz et par M_x, M_y, M_z les moments partiels de transport ou de projection autour de ces trois axes.

La condition d'équilibre se résume aux *six équations fondamentales* ci-dessous :

$$\Sigma F_x = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma F_z = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma M_x = 0 \qquad (4)$$
$$\Sigma M_y = 0 \qquad (5)$$
$$\Sigma M_z = 0. \qquad (6)$$

Fig. 1.

Les trois premières expriment que *les sommes des projections des forces sur chacun des trois axes doivent être nulles.*

Les trois autres expriment que *les sommes des moments autour de chacun des trois axes doivent également être nulles.*

On peut encore les interpréter ainsi :

Groupe (1) (2) (3) : sommes des projections des forces de réaction égales et opposées aux sommes des projections des forces appliquées.

Groupe (4) (5) (6) : sommes des moments des réactions égales et opposées aux sommes des moments des actions.

2.12 Cas particulier de forces concourantes ou parallèles. — Nous avons vu au chapitre II, paragraphe **2.12**, que ces forces pouvaient se composer en une force unique *résultante*.

Pour avoir équilibre, il faut et il suffit que *cette résultante d'ensemble* (actions et réactions) *soit nulle*, ce qui s'exprime par les équations (1), (2) et (3) seulement.

On peut encore dire que, dans ce cas particulier, *il suffit que la résultante des réactions soit égale et opposée à celle des forces appliquées.*

2.2 ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME PLAN (DEUX DIMENSIONS).

2.21 Cas général. — Les équations d'équilibre se réduisent à *deux équations de projections de forces* et *une équation de moment :*

$$\Sigma F_x = 0 \quad (1) \qquad \Sigma F_y = 0 \quad (2) \qquad \Sigma M = 0. \quad (3)$$

Les équations (1) et (2) expriment que les sommes des projections des forces extérieures sur *deux axes quelconques du plan* sont nulles (ou encore que les sommes des projections des réactions sont égales et opposées à celles des actions).

L'équation (3) exprime que *la somme des moments par rapport à un point quelconque du plan est nulle* (ou que la somme des moments des réactions est égale et opposée à celle des actions).

C'est ce cas que nous rencontrerons le plus fréquemment.

2.22 Cas particulier de forces concourantes. — Ces forces admettent une *résultante qui doit être nulle* (polygone des forces de toutes les actions extérieures se refermant sur lui-même). Les équations (1) et (2) suffisent. On peut dire encore que *la résultante des réactions doit être égale et opposée à celle des actions.*

2.23 Cas particulier de forces parallèles. — Une équation de projections et une équation de moments suffisent ; soit par exemple :

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma M = 0.$$

2.3 CONCLUSIONS.

On voit donc, en résumé, que les problèmes d'équilibrages statiques se résument à des *projections de forces* et à des *calculs de moments.* La seule difficulté pratique résidera dans le *choix des axes de projection* ou des *points de référence* qui doivent, dans chaque cas particulier, être judicieusement choisis pour simplifier les calculs.

Il est à remarquer que beaucoup de problèmes d'équilibrages peuvent être résolus élégamment par de simples constructions graphiques. Nous en donnerons quelques exemples ci-après.

3. ÉTUDE DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE LIAISONS EXTÉRIEURES

3.0 GÉNÉRALITÉS.

Il est essentiel d'examiner, *avant tout calcul d'équilibrage*, de quelle manière les différents points de liaison de l'élément étudié peuvent réagir.

On est ainsi conduit à constater immédiatement si ces points de liaison ne peuvent réagir que par des forces ou au contraire par une combinaison

de forces et de moments. Nous désignerons, d'une façon générale, par *appuis* les liaisons extérieures ne pouvant réagir que par des forces et par *encastrements* celles pouvant, en supplément, donner lieu à des moments. Les appuis ne s'opposent donc qu'à une *translation*, au niveau d'eux-mêmes, de l'élément étudié tandis que les encastrements s'opposent à un effet combiné de *translation* et de *rotation*.

Exemples : Le couteau d'une balance constitue un appui, car le fléau peut osciller autour de ce couteau.

Le scellement d'une console dans un mur constitue un encastrement, car il impose une direction fixe de la console à son origine et s'oppose ainsi à une rotation.

Nous étudions ci-dessous quelques cas particuliers d'appuis et d'encastrements, en cheminant, pour cette étude, des liaisons les plus simples aux plus compliquées.

3.1 APPUIS NE POUVANT DONNER QU'UN SEUL SENS DE REACTION : REACTIONS DIRIGÉES (UNE COMPOSANTE DE FORCE).

La figure 2 représente quelques exemples classiques de ces appuis [1] :

Figure 2 *a*) : *fil sans raideur* (fil à plomb par exemple) : ne réagit que suivant sa direction.

Figures 2 *b*) et 2 *b'*) : *biellettes entre rotules* ou *entre articulations non serrées* (biellettes rectilignes ou non) : ces systèmes ne peuvent équilibrer

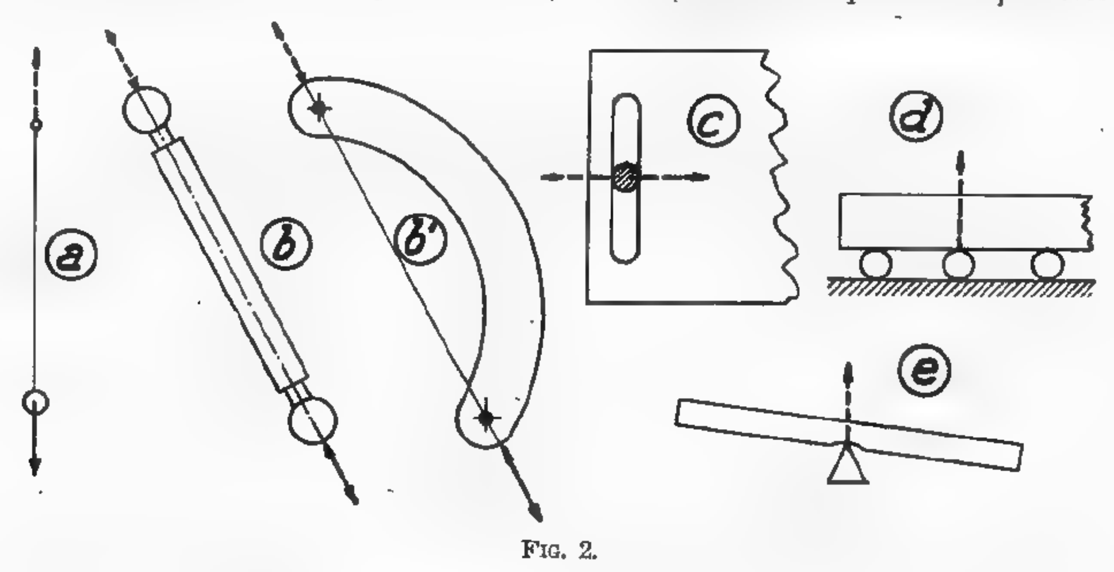


Fig. 2.

que des efforts dirigés suivant la droite joignant les centres de ces rotules ou articulations. Il y aurait déséquilibre et rotation du système dans le cas contraire.

Figure 2 *c*) : *axe (non serré) dans une boutonnière :* ne peut donner que des réactions normales à la direction de la boutonnière.

Figure 2 *d*) : *rouleaux des ponts* : ne peuvent réagir que normalement au tablier qu'ils supportent.

Figure 2 *e*) : *couteau d'une balance* : ne réagit que suivant le plan bissecteur de sa pointe, etc...

1. — Il est à remarquer que tous ces exemples négligent les *forces de frottement* dont on ne tient généralement pas compte dans les calculs de résistance des matériaux.

On groupe tous ces exemples d'appuis sous la désignation commune d'*appuis à réactions dirigées* : Cette notion de *direction obligatoire de réaction* rend des services considérables pour étudier l'équilibrage de nombreux systèmes. Nous en trouverons ci-après quelques applications notamment aux paragraphes **5.** et **6.**

3.2 APPUIS NE POUVANT DONNER QU'UN POINT DE RÉACTION FIXE DANS UN PLAN (DEUX COMPOSANTES DE FORCES).

Figure 3 *a*) : l'exemple le plus classique est celui d'un *boulon non serré* (*articulation*) assemblant deux éléments minces : La réaction passe obligatoirement par l'axe O du boulon et elle est contenue dans un plan normal à cet axe. On a donc un *point fixe* O dans ce plan. La réaction peut, tout en restant dans ce plan, avoir n'importe quelle direction passant par O.

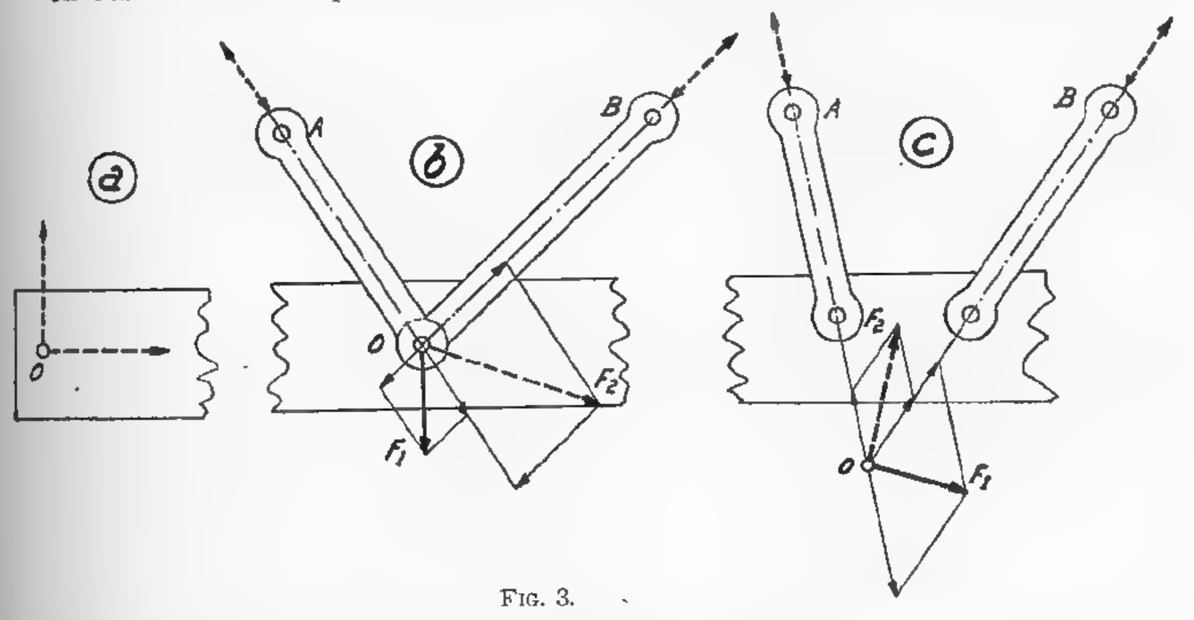


Fig. 3.

Figures 3 *b*) et 3 *c*) : le même effet se produit avec *deux biellettes concourantes* supportant un corps. Ces biellettes peuvent concourir sur un axe réalisé matériellement comme sur la figure 3 *b*) ou encore en un « *point d'articulation fictif* » obtenu par le prolongement des axes de ces biellettes (figure 3 *c*). On remarquera que ce « point d'articulation fictif » constitue le « *centre instantané de rotation* » du corps.

Il est aisé de voir que si les forces appliquées ne passent pas par ces points O, il y a *déséquilibre*. Les biellettes fournissent donc dans l'un et l'autre cas un *point fixe dans le plan que leurs directions déterminent*.

On voit également que toutes les forces de ce plan passant par O peuvent être équilibrées puisqu'elles rencontrent deux chemins de réactions dirigées (axes des bielles) et peuvent être décomposées suivant ces deux directions (voir figures). Il est évident que les bielles peuvent être rectilignes ou courbes : leurs directions d'actions respectives sont toujours celles joignant leurs articulations.

3.3 APPUIS DONNANT UN POINT DE RÉACTION FIXE DANS L'ESPACE (TROIS COMPOSANTES DE FORCES).

Figure 4 *a*) : l'exemple le plus classique est celui d'une *rotule sphérique* (serrage négligé) qui peut absorber tous les efforts passant par son centre O.

Figure 4 *b*) : *trois biellettes* non contenues dans un même plan et concourant au même point procurent le même effet (sommet stable de la pyra-

mide d'appui). Le point de concours peut encore être matérialisé ou non et les bielles peuvent toujours être rectilignes ou courbes.

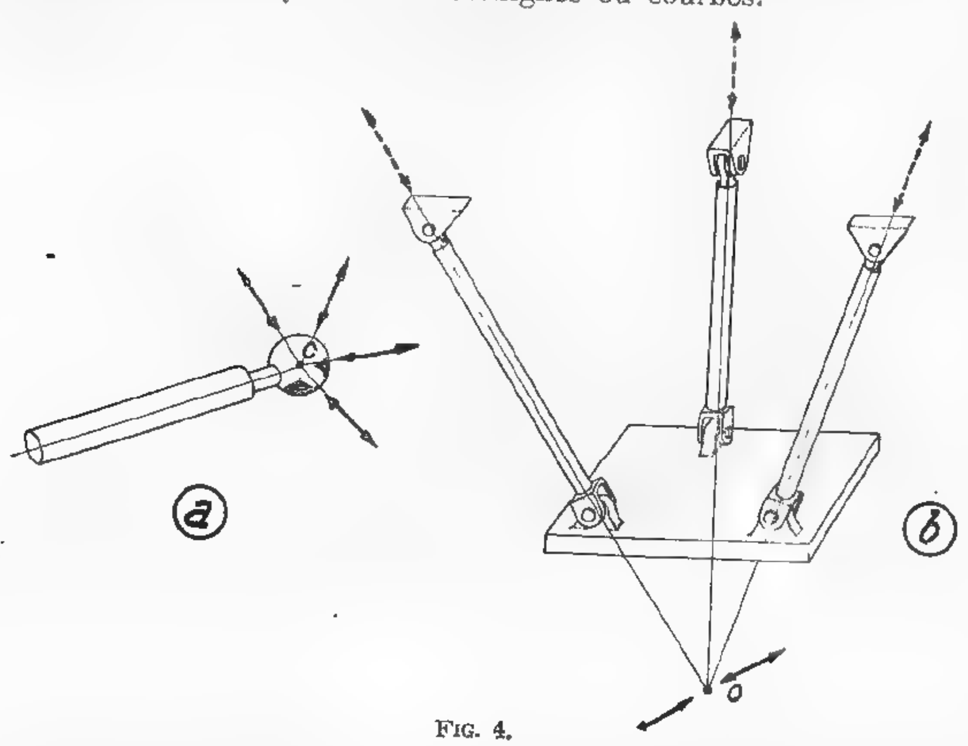


Fig. 4.

3.4 ENCASTREMENTS SUR UN PLAN : (DEUX COMPOSANTES DE FORCES ET UN MOMENT).

C'est le cas de la figure 5 qui représente la fixation d'une ferrure sur un voile mince ne présentant pas de rigidité appréciable normalement à son plan.

Ce serait également le cas de la figure 3 c) ci-dessus si l'on encastrait les extrémités A et B des biellettes dans le plan AOB.

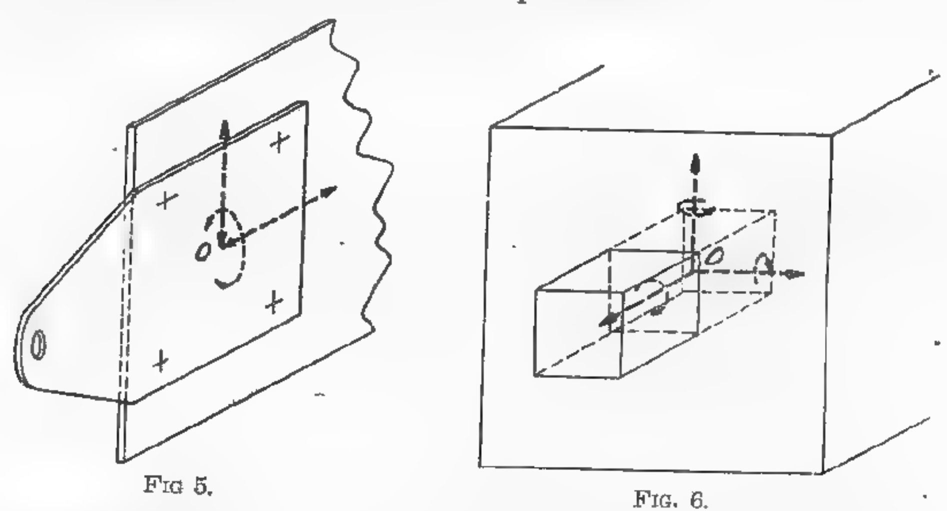


Fig 5. Fig. 6.

3.5 ENCASTREMENTS DANS L'ESPACE (OU PARFAITS) : (TROIS COMPOSANTES DE FORCE ET TROIS COMPOSANTES DE MOMENTS).

C'est le cas d'une *pièce massive scellée* dans un mur très épais (fig. 6).

Une rotule « serrée à bloc » produirait le même effet pour les efforts ne dépassant pas le « moment de serrage » qu'elle pourrait alors équilibrer par frottements.

3.6 REMARQUE.

Nous aurions pu envisager d'autres cas intermédiaires entre ceux des paragraphes **3.4** et **3.5** (comme par exemple : encastrement sur un plan avec possibilité de réaction dirigée normalement à ce plan). Nous nous sommes limités aux cas ci-dessus par suite de leurs interprétations physiques commodes.

3.7 « DEGRÉ D'EFFICACITÉ » D'UNE LIAISON.

Il est possible de définir, pour chaque système de liaisons, une grandeur qualificative que l'on pourrait désigner par « *degré d'efficacité* » de ce système de liaison.

Ce degré se mesure simplement par le nombre total de projections de forces ou de moments pouvant être équilibrés.

Exemples :

Liaison à réaction dirigée (§ 3.1) : 1er degré.
Point fixe dans le plan (§ 3.2) : 2e degré.
Point fixe dans l'espace (§ 3.3) et encastrement dans un plan (§ 3.4) : 3e degré.
Encastrement parfait (§ 3.5) : 6e degré.

Le « *degré d'efficacité* » d'une liaison donne directement le *nombre d'équations* d'équilibre que cette liaison absorbe, à elle seule, dans l'étude de l'équilibrage du système auquel elle appartient.

3.8 CONVENTIONS DE REPRÉSENTATION GRAPHIQUE.

Les études qui vont suivre concerneront essentiellement des *poutres planes*. Nous possédons, dans ce cas, trois types de liaisons extérieures qui sont :

3.81 Appui dirigé (§ 3.1). — Premier degré d'efficacité. Nous le représenterons dans le *cas général* selon figure 7 *a* par un trait dirigé suivant la direction de son action. Dans le *cas particulier* (fréquemment rencontré) où cette direction est normale à la poutre étudiée, nous représenterons l'appui par un triangle (couteau de balance) selon figure 7 *b* [1].

De tels appuis sont encore appelés *appuis simples*.

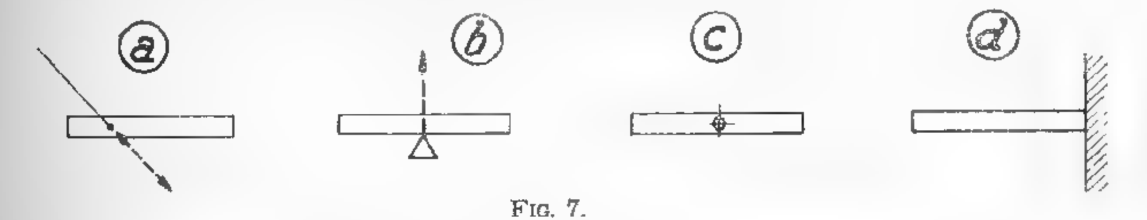


Fig. 7.

3.82 Point fixe dans le plan (§ 3.2). — Deuxième degré d'efficacité. Nous le représenterons par son image la plus commode qui est un cercle figurant une *articulation* (fig. 7 *c*).

3.83 Encastrement (dans le plan de la figure) (§ 3.4). — Troisième degré. Nous le représenterons par un plan hachuré selon figure 7 *d* (coupe d'un mur par exemple).

1. — Pour uniformiser les figures, nous conviendrons de situer, dans tous les cas, ces triangles au-dessous des poutres étudiées, même si les couteaux qu'ils représentent devaient être matériellement situés au-dessus de ces poutres pour réagir aux charges qu'ils ont à supporter (charges tendant à soulever les poutres).

4. DISTINCTION ENTRE LES SYSTÈMES ISOSTATIQUES ET HYPERSTATIQUES

4.1 DÉFINITIONS.

On appelle *système isostatique* tout système pour lequel les équations d'équilibre statique extérieur données ci-dessus au paragraphe **2.** suffisent pour déterminer les liaisons extérieures appliquées à ce système.

Pour un tel système, la somme des « degrés d'efficacité » des différents appuis ou encastrements est égale au nombre d'équations qui concernent le cas envisagé (voir § **2.** et **3.7**) [1].

On désigne par *système hyperstatique* (ou *surabondant*) tout système pour lequel les équations d'équilibre statique sont en nombre *insuffisant* pour déterminer les liaisons extérieures.

La somme des « degrés d'efficacité » de ces liaisons est supérieure au nombre d'équations du cas considéré. Il y a donc *indétermination statique.*

L'étude des systèmes hyperstatiques fera l'objet du chapitre XVIII de cet ouvrage. Nous verrons, dans ce chapitre, qu'il est nécessaire d'adjoindre aux équations d'équilibre statique, des conditions fournies par l'étude des *déformations* du système étudié.

Remarque. — On pourrait également, par analogie, désigner par *systèmes hypostatiques* (ou *insuffisants*) ceux présentant un degré total d'efficacité des liaisons extérieures inférieur au nombre des équations d'équilibre statique. Cette propriété signifie simplement que le système considéré ne peut être en équilibre statique : il y aura *mouvement* sous l'action des forces appliquées.

Nous allons, ci-dessous, concrétiser ces définitions théoriques par un *exemple simple* faisant appel au sens physique commun.

4.2 EXEMPLE SIMPLE.

Etudions le cas d'une *poutre rectiligne sur appuis* (fig. 8 et 9). Cette poutre est soumise à des charges appliquées et à des réactions contenues dans un même plan (plan de la figure). Nous avons donc affaire à un *système plan* d'où (§ **2.2**) : trois équations d'équilibre, dans le cas général de forces non concourantes et non parallèles et deux équations dans le cas de charges parallèles ou concourantes.

Envisageons successivement divers systèmes d'appuis.

4.21 Deux appuis simples A et B : degré d'efficacité $1 + 1 = 2$.

a) Il est évident que dans le *cas général* de forces appliquées quelconques donnant une résultante R inclinée sur l'axe de la poutre (fig. 8 *a*), la poutre va tendre à glisser sur ses couteaux et à tomber : d'où *système « insuffisant »* ou *hypostatique*.

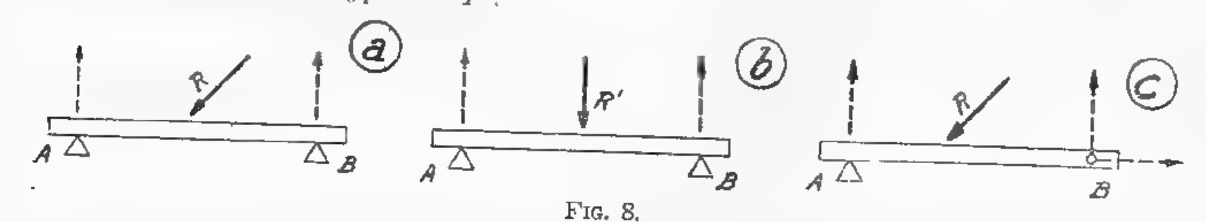


Fig. 8.

b) Dans le *cas particulier* de forces appliquées donnant une résultante R′ *normale* à l'axe de la poutre, le système devient « tout juste suffisant » ou *isostatique* (fig. 8 *b*) : deux équations (§ **2.23**) et degré 2.

---

1. — Nous verrons, ci-après, au cours d'un exemple d'application, que cette condition nécessaire n'est pas toujours suffisante.

4.22 Un appui simple A et un point fixe B : degré 1 + 2 = 3 (fig. 8*c*). — La projection horizontale de R est équilibrée entièrement en B et les projections verticales se ramènent au cas précédent. Le problème est entièrement déterminé : problème *isostatique* dans tous les cas de charges contenues dans le plan : trois équations et degré 3.

4.23 Deux points fixes A et B : degré 2 + 2 = 4 (fig. 9 *a*). — Le problème est *indéterminé* dans tous les cas de charges :

— Pour une charge R inclinée, on ne peut savoir *à priori* la participation de A ou de B à l'équilibre horizontal.

— Pour une charge R′ verticale on ressent bien que la poutre tendra à rapprocher les points A et B l'un vers l'autre avec une force dépendant de sa *déformabilité* (fig. 9 *b*) [1].

C'est un problème *hyperstatique* : trois équations et degré 4.

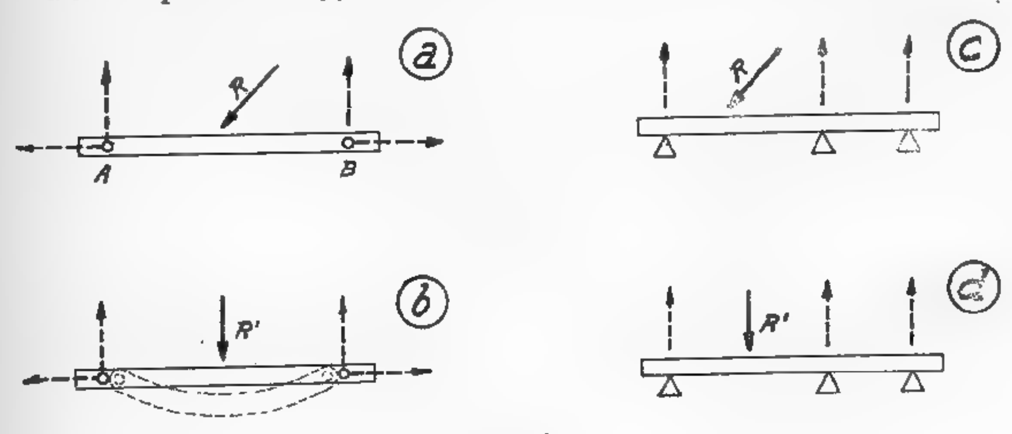


Fig. 9.

4.24 Trois appuis simples A, B et C : degré 1 + 1 + 1 = 3.

a) Dans le *cas général* d'une charge inclinée (fig. 9 *c*), le système est visiblement *insuffisant* : la poutre glisserait sur ses couteaux (voir note [2] ci-dessous).

b) Dans le *cas particulier d'une charge normale* R′ (fig. 9 *d*) le problème est *hyperstatique*, on ne peut évaluer la participation de chaque appui autrement qu'en étudiant la déformabilité de la poutre et des appuis : deux équations d'équilibrage et trois inconnues (degré 3).

4.3 EXEMPLES DE SYSTÈMES HYPERSTATIQUES COURANTS. DEGRÉ DE SURABONDANCE.

4.31 Poutres droites sur appuis. — Nous venons de voir ci-dessus les cas des poutres droites sur deux articulations et sur trois appuis. Pour ces deux cas, il y avait une composante de réaction indéterminée. On dit que ces systèmes sont *surabondants au premier degré*.

---

1. — Le même phénomène existait d'ailleurs dans le cas de la figure 9 *a*.

2. — L'exemple *a*) ci-dessus semble mettre en défaut les règles de discrimination énoncées au paragraphe 4.1, puisque l'on a trois équations d'équilibrage et un degré 3 pour un système insuffisant. En réalité, le système est hyperstatique pour les composantes verticales des charges et insuffisant pour les composantes horizontales.

Les relations énoncées ci-dessus entre le nombre d'équations et le degré des liaisons expriment donc des *conditions nécessaires mais non suffisantes* pour discriminer, *à priori*, la catégorie des systèmes étudiés. Il y a toujours lieu d'examiner, au préalable, si certaines directions d'efforts ne peuvent être équilibrées, ce qui s'opère en faisant simplement appel au bon sens.

Une poutre continue sur quatre appuis simples chargée normalement à sa direction est *surabondante au deuxième degré* (deux équations et quatrième degré d'efficacité des liaisons) ; etc...

4.32 **Poutre droite encastrée et appuyée** (fig. 10 *a*). — Trois équations d'équilibrage ; degré d'efficacité des liaisons : 3 + 1 = 4, système hyperstatique du premier degré.

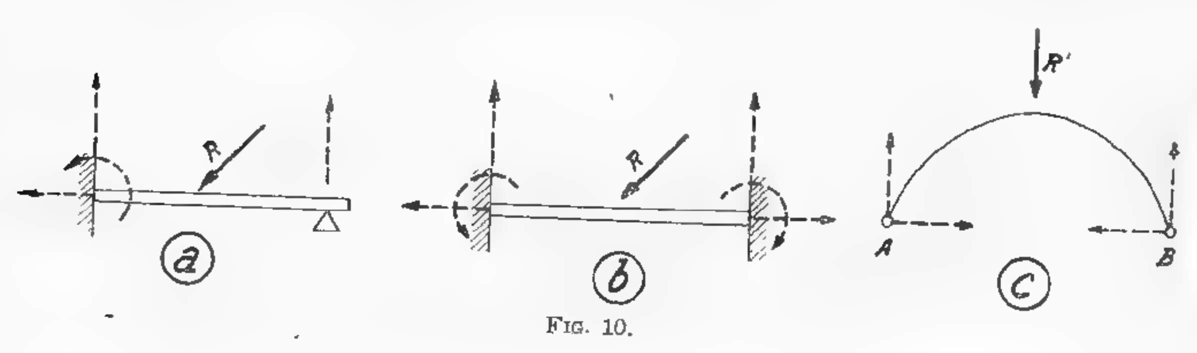


FIG. 10.

4.33 **Poutre droite sur deux encastrements** (fig. 10 *b*). — Trois équations d'équilibrage ; degré d'efficacité des liaisons 3 + 3 = 6, système hyperstatique du troisième degré.

4.34 **Arc sur deux articulations** (fig. 10 *c*). — C'est un cas analogue à celui d'une poutre droite sur deux articulations (§ **4.23**), mais ici le phénomène de sollicitation des appuis le long de la base AB est plus net encore. Dans le cas de la figure les appuis tendent à s'écarter l'un de l'autre sous l'influence de la « *tendance à s'ouvrir* » de l'arc. On appelle ce phénomène la *poussée de l'arc*. Nous reviendrons sur ce sujet au chapitre XVIII. Le sys tème est *hyperstatique au premier degré* (trois équations et quatrième degré d'efficacité des liaisons).

4.4 REMARQUE AU SUJET DES POUTRES CONTINUES SUR TROIS APPUIS.

Une poutre continue reposant sur trois appuis simples *non alignés* n'est pas hyperstatique mais isostatique, contrairement à une opinion trop répandue.

On se trouve, en effet, dans le cas d'un système à trois dimensions chargé par un système de forces parallèles d'où (§ **2.12**) : trois équations d'équilibre et le degré d'efficacité global des appuis est également 3.

Voir ci-après au paragraphe **5.5** un exemple numérique d'équilibrage statique d'une telle poutre.

4.5 ANALOGIE AVEC DES DÉCOMPOSITIONS DE FORCES INDÉTERMINÉES.

Nous avons vu au chapitre II, paragraphe **4.**, que les décompositions de forces n'étaient déterminées que sous certaines conditions : deux directions dans le plan et trois dans l'espace. On se rend très bien compte, maintenant, que si ces conditions ne sont pas remplies, on a affaire à des systèmes *insuffisants* ou *surabondants*. Les problèmes d'équilibrage reviennent d'ailleurs, très fréquemment, à des problèmes de décomposition de forces (voir ci-après § **5.**).

4.6 NOTION SUR LES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES INTERNES.

Tous les exemples de systèmes hyperstatiques donnés ci-dessus concernent des systèmes indéterminés pour la mise en équilibre extérieur. On les appelle d'une façon générale *systèmes hyperstatiques externes* (ou extérieurs).

Il est utile de donner dès maintenant la notion d'un autre genre de systèmes surabondants : les *systèmes hyperstatiques internes* (ou intérieurs) appelés encore *systèmes hyperstatiques de structure*.

Considérons, par exemple (fig. 11), un anneau quelconque soumis à deux charges égales et opposées F et −F. L'équilibre extérieur est évidemment assuré, mais on ne connaît pas *à priori* la participation de la partie ACB et de la partie ADB à la transmission interne de ces charges, l'une vers l'autre. Cette participation dépendra de la rigidité relative de ces deux parties. Le système est *hyperstatique intérieurement.* C'est le cas de toutes les figures se refermant sur elles-mêmes, cas très fréquent en construction.

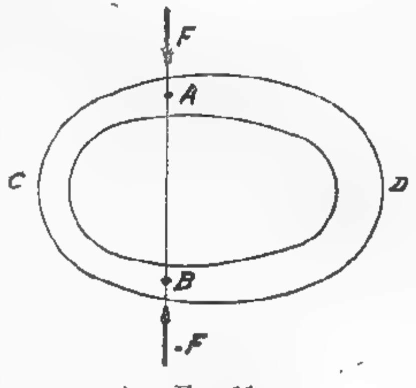


Fig. 11.

4.7 REMARQUE AU SUJET DES SYSTÈMES SYMÉTRIQUES.

Il arrive parfois que certaines conditions de symétrie lèvent l'indétermination d'un système hyperstatique qui peut alors se traiter sans faire appel aux déformations. Si, par exemple, les charges F de la figure 11 étaient appliquées suivant un axe de symétrie de l'anneau, on conçoit très bien que la participation de chaque moitié serait égale.

5. EXEMPLES D'ÉQUILIBRAGES DE SYSTÈMES ISOSTATIQUES

5.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples de mise en équilibre de systèmes isostatiques classiques. Nous avons, pour certains exemples simples, utilisé des *valeurs numériques* de façon à concrétiser au maximum ces premiers exercices.

Nous avons, au surplus, fait appel à des *constructions graphiques* quand celles-ci offraient un intérêt particulier. Il est à remarquer, à ce sujet, que des méthodes graphiques générales seront données au chapitre IV (Statique graphique).

Nous donnerons, de plus, au paragraphe suivant, quelques applications particulières à des éléments de structure d'avions.

Pour tous les exemples ci-dessous, nous avons adopté pour sens positifs des réactions et des moments, ceux indiqués par les flèches des figures. Sur ces figures, les forces sont exprimées en kg et les dimensions en mètres.

Nous étudierons d'abord quelques systèmes plans (§ 5.1 à 5.4) et un système simple à trois dimensions (§ 5.5).

5.1 POUTRE DROITE SUR DEUX APPUIS SIMPLES (CHARGES NORMALES A LA POUTRE) (fig. 12).

Equation de projection

$$\Sigma R = -\Sigma F$$

soit : $$R_A + R_B = 50 - 100 + 200 = 150 \text{ kg} \qquad (1)$$

Equation de moment : On a intérêt à évaluer ce moment par rapport à l'un des appuis pour éliminer ainsi le moment de la réaction correspondante

Moments par rapport à A

$$\Sigma M_{RA} = -\Sigma M_{FA}$$

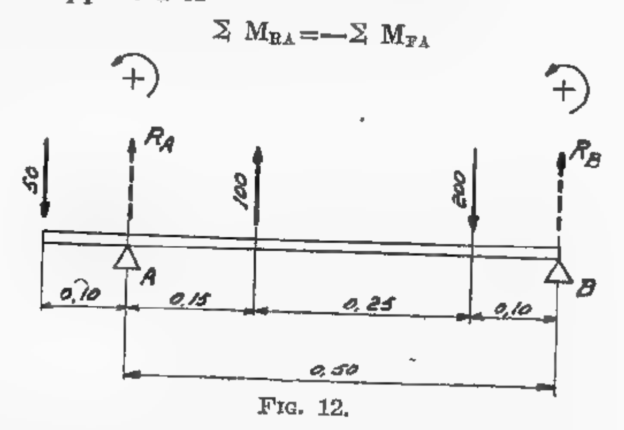


FIG. 12.

soit (voir sens positif)

$$R_B \cdot 0,5 = -50 \cdot 0,1 - 100 \cdot 0,15 + 200\ (0,15 + 0,25)$$
$$= -5 - 15 + 80 = 60 \text{ mkg.}$$

d'où
$$R_B = \frac{60}{0,5} = 120 \text{ kg} \qquad \text{(vers le haut)}$$

De (1) on tire

$$R_A = -\Sigma F - R_B = 150 - 120 = 30 \text{ kg} \quad \text{(vers le haut).}$$

Vérification : Moments par rapport à B

$$M_B = 50\ (50 + 0,1) - 30 \cdot 0,5 - 100\ (0,25 + 0,1) + 200 \cdot 0,1$$
$$= 30 \quad 15 - 35 + 20 = 0.$$

5.2 POUTRE DROITE SUR UN APPUI SIMPLE ET UNE ARTICULATION (CHARGES QUELCONQUES).

5.21 **Solution algébrique** (fig. 13).

Projections verticales

$$R_A + R'_B = -100 \cos 30° + 150 \cos 45°$$
$$= -100 \cdot 0,866 + 150 \cdot 0,707 = -86,6 + 106$$
$$R_A + R'_B = 19,4 \text{ kg.} \qquad (1)$$

Projections horizontales

$$R''_B = 100 \sin 30° + 150 \sin 45° = 100 \cdot 0,5 + 150 \cdot 0,707$$
$$= 50 + 106 = 156 \text{ kg} \quad \text{(vers la droite).}$$

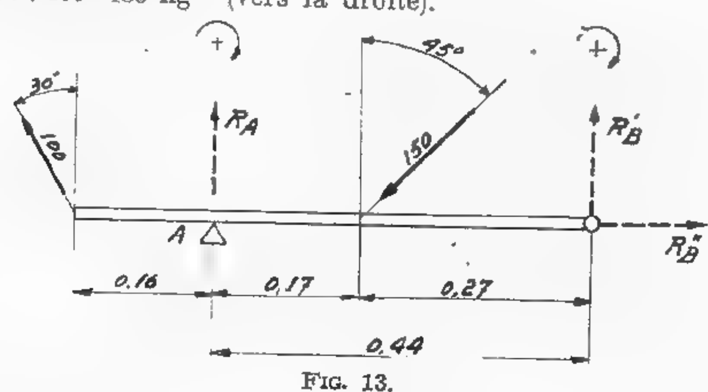


FIG. 13.

Moments : Par rapport à B

$$\Sigma M_{R_B} = \quad \Sigma M_{F_B}$$
$$R_A \cdot 0,44 = -100 \cos 30°\ (0,44 + 0,16) + 150 \cos 45° \cdot 0,27$$
$$= -86,6 \cdot 0,6 + 106 \cdot 0,27 = -52 + 28,6 = -23,4 \text{ mkg.}$$

d'où
$$R_A = -\frac{23,4}{0,44} = -53,2 \text{ kg} \qquad \text{(vers le bas,.}$$

D'après (1)

$$R'_B = 19,4 + 53,2 = 72,6 \text{ kg} \qquad \text{(vers le haut).}$$

Réaction totale en B

$$R_B = \sqrt{R'^2_B + R''^2_B} = \sqrt{72,6^2 + 156^2} = 169 \text{ kg.}$$

Vérification

$$M_A = 86,6 \cdot 0,16 + 106 \cdot 0,17 - 72,6 \cdot 0,44$$
$$= 13,85 + 18 - 31,85 = 0.$$

5.22 **Construction graphique directe** (fig. 14). — Les forces appliquées se composent au point de concours C de leurs lignes d'actions et donnent une résultante R.

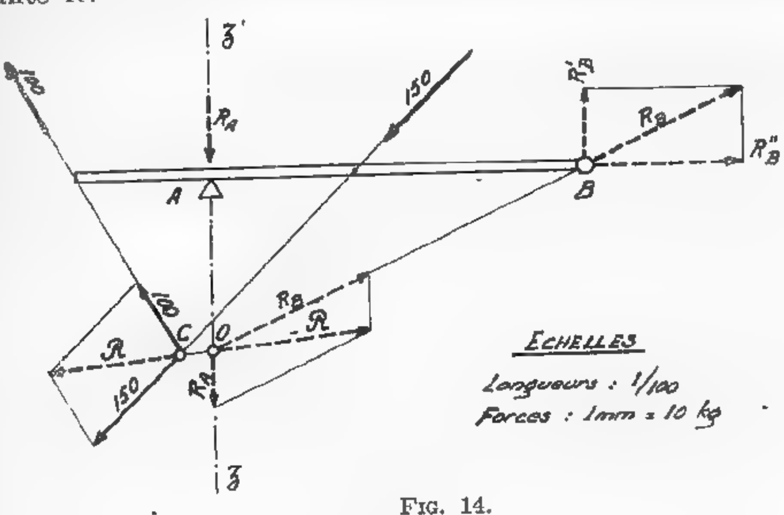


Fig. 14.

L'appui A donne une *réaction dirigée* de direction connue zz' et la réaction totale en B doit passer par ce point B, elle aura donc la direction OB, le point O étant le point de rencontre de R avec la direction zz'.

En décomposant — R suivant les deux directions de réaction OA et OB on obtient directement R_A et R_B en grandeur et direction.

5.3 POUTRE DROITE SUR UNE ARTICULATION ET UN APPUI DIRIGÉ OBLIQUEMENT PAR RAPPORT A LA POUTRE.

(Cet appui dirigé obliquement A peut être matérialisé par exemple par un fil sans raideur).

Nous donnons directement la décomposition graphique, figure 15, pour une force F figurant la résultante du système de forces appliquées. Même raisonnement qu'au paragraphe précédent en partant de la réaction dirigée zz' :

Pour obtenir les réactions algébriquement, il suffirait d'écrire que les composantes R'_A et R''_A de R_A sont liées entre elles par la relation

Fig. 15.

$$R''_A = R'_A \operatorname{tg} \alpha.$$

La composante R'_A jouera alors le rôle de R_A dans les équations analogues à celles du paragraphe précédent.

5.4 ARC A TROIS ARTICULATIONS (fig. 16).

Un arc à trois articulations fournit un cas particulier intéressant de mise en équilibre d'un système plan. Le problème sera traité algébriquement et graphiquement, cette dernière méthode étant généralement à conseiller.

5.41 **Données.** — Soit un arc plan composé de deux arceaux AC et BC articulés à leurs bases A et B et réunis entre eux par une articulation C.

Les *charges appliquées* comprennent (charges agissant dans le plan de l'arc) :

sur l'arceau AC : des forces F_1 F_2 F_3... ayant pour résultante $\mathcal{R}$,
sur l'arceau BC : des forces F'_1 F'_2 F'_3... ayant pour résultante $\mathcal{R}'$.

Les *réactions extérieures* sont prises en A et B (liaisons du deuxième degré). Le système est apparemment hyperstatique puisque le « degré d'efficacité » des liaisons extérieures est de $2 + 2 = 4$ contre trois équations d'équilibre extérieur (§ 2.21). Mais, il existe en réalité *une relation intérieure complémentaire* exprimant que les moments des actions et réactions appliquées à un même arceau sont nuls au point où il y a articulation.

Le nombre total de relations est donc égal à quatre pour un degré de liaisons 4. Le système est donc bien *isostatique*.

5.42 **Solution algébrique** (fig. 16). — Adoptons un système d'axes de projections : Ox parallèle à AB et Oy perpendiculaire à AB. Affectons de l'indice x ou y toutes les projections (c'est-à-dire les composantes) des forces parallèles à ces axes.

Equations d'équilibre statique extérieur (§ 2.21).

Projections sur Ox

$$R_x + R'_x = -\mathcal{R}_x - \mathcal{R}'_x. \tag{1}$$

Projections sur Oy

$$R_y + R'_y = -\mathcal{R}_y - \mathcal{R}'_y. \tag{2}$$

Moments par rapport à A (sens de la figure)

$$R'_y \cdot (a + b) = \mathcal{R}d + \mathcal{R}'\,d' \tag{3}$$

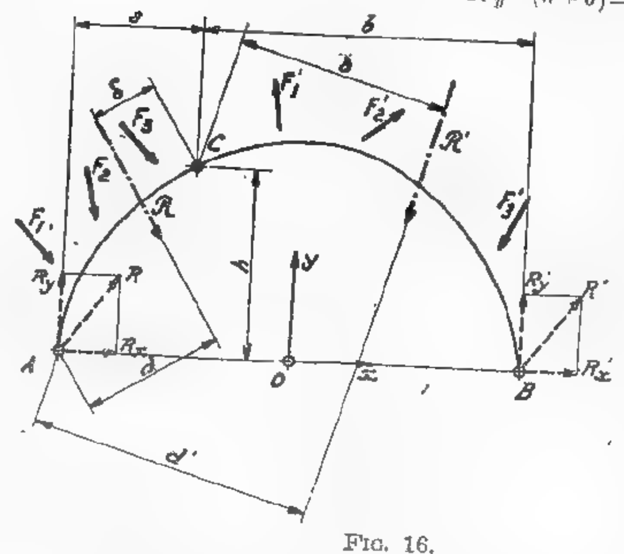


FIG. 16.

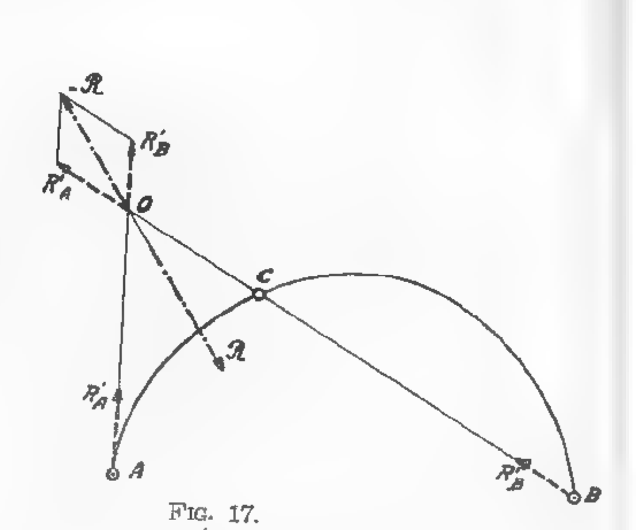


FIG. 17.

Equation complémentaire en C

$$R_y \cdot a - R_x \cdot h = \mathcal{R}\delta \tag{4}$$

ou (équation équivalente)

$$R'_y \cdot b + R'_x \cdot h = \mathcal{R}'\,\delta'. \tag{4'}$$

Ces quatre équations permettent le calcul des quatre projections de réactions

$$R_x,\ R'_x,\ R_y \text{ et } R'_y.$$

5.43 **Solution graphique.** — *a*) Isolons d'abord la résultante *R* agissant sur l'arceau AC (fig. 17). L'arceau BC ne constitue plus qu'un *élément d'appui* à l'autre arceau, et il est assimilable à une bielle entre articulations. Il fournira donc à AC une *réaction dirigée* suivant BC (§ 3.1). En prolongeant *R* et BC, on obtient le point O par où doivent passer les réactions en A et B, d'où décomposition classique et réactions R'_A et R'_B ;

b) En isolant ensuite *R'* on traiterait de même l'arceau BC comme articulé en B et soumis en C à une réaction dirigée suivant AC d'où deux nouvelles réactions R''_A et R''_B ;

c) La *composition* de R'_A avec R''_A et de R'_B avec R''_B donnera les réactions totales R_A et R_B cherchées [1].

5.44 **Application en construction aéronautique** (fig. 18) :

Certaines structures de becs d'attaque de voilure comportent des nervures qui, pour des commodités de construction par panneaux, sont constituées par deux flancs séparés articulés en A et B sur la structure principale de l'aile et reliés entre eux en C par une articulation pure ou un système de liaison à *faible rigidité* équivalent à une articulation.

On calcule alors ces nervures comme des arcs à trois articulations A B C soumis aux charges provenant des *dépressions* ou *pressions aérodynamiques* sur l'extrados et l'intrados.

En réduisant ces actions aérodynamiques à deux résultantes *R* et *R'* on retombe sur le problème ci-dessus.

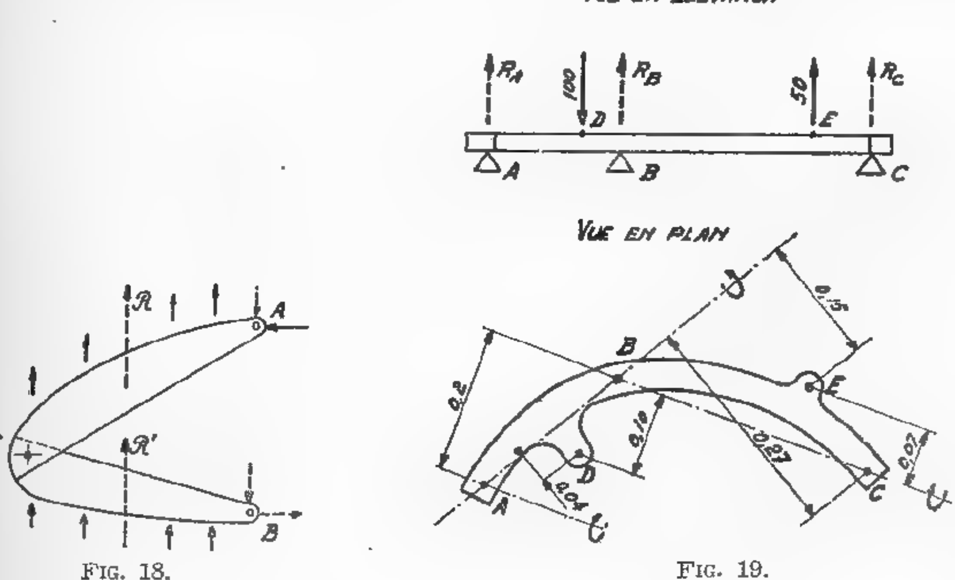


FIG. 18. FIG. 19.

5.5 POUTRE REPOSANT SUR TROIS APPUIS SIMPLES NON ALIGNÉS (CHARGES PARALLÈLES AUX LIGNES D'ACTION DES APPUIS).

La figure 19 représente deux projections orthogonales d'une telle poutre

1. — Il peut arriver que la résultante appliquée et la réaction dirigée affectant un même arceau soient parallèles entre elles. Effectuer alors une décomposition de forces suivant deux directions parallèles.

(vue en élévation et vue en plan). Les forces appliquées indiquées sur la vue en élévation agissent aux points D et E et les réactions aux points A, B, C.

Equation de projections :

$$\Sigma R = -\Sigma F$$

soit
$$R_A + R_B + R_C = 100 - 50 = 50 \text{ kg.} \qquad (1)$$

Moments par rapport à l'axe AB.

$$R_C \cdot 0{,}27 = 100 \cdot 0{,}04 - 50 \cdot 0{,}15 = 4 - 7{,}5 = 3{,}5 \text{ mkg.}$$

d'où
$$R_C = -\frac{3{,}5}{0{,}27} = -13 \text{ kg} \qquad \text{(vers le bas).}$$

Moments par rapport à l'axe BC [1]

$$R_A \cdot 0{,}2 = 100 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}07 = 10 + 3{,}5 = 13{,}5 \text{ mkg,}$$

d'où
$$R_A = \frac{13{,}5}{0{,}2} = 67{,}5 \text{ kg} \qquad \text{(vers le haut).}$$

D'après l'équation (1)

$$R_B = 50 - R_A - R_C = 50 - 67{,}5 + 13$$
$$R_B = -4{,}5 \text{ kg} \qquad \text{(vers le bas).}$$

Vérification : Moments par rapport à un axe parallèle à BC et passant par A

$$M = 100\ (0{,}2 - 0{,}1) + 4{,}5 \cdot 0{,}2 - 50\ (0{,}2 + 0{,}07) + 13\ \ 0{,}2$$
$$= 10 + 0{,}9 - 13{,}5 + 2{,}6 = 0.$$

5.6 CONCLUSION.

Les exemples des paragraphes 5.2, 5.3 et 5.4 font ressortir l'intérêt que présente la notion de *réactions dirigées* pour la mise en équilibre directe des systèmes par de simples décompositions de forces.

Pour effectuer ces opérations graphiques, il y a lieu, d'une façon générale, de rechercher le point de rencontre O de la direction obligatoire connue, avec la résultante des forces appliquées. On connaît ainsi la direction de l'autre réaction d'où décomposition classique.

On trouvera au paragraphe suivant quelques autres applications de ce principe.

6. APPLICATIONS A DES ÉLÉMENTS DE STRUCTURE D'AVIONS

6.1 ÉQUILIBRE D'UNE ARTICULATION DE VOLET DE COURBURE : PLANCHE 5.

On emploie, pour suspendre les volets de courbure, des mécanismes cinématiques produisant un mouvement analogue à celui d'une articulation déportée en dessous du profil (effets de fente et de recul). Ces mécanismes ont l'avantage d'être entièrement inclus à l'intérieur du profil de base, ce

1. — Le choix de AB et de BC comme axes de moments a été guidé par le fait que deux des inconnues ont un moment nul par rapport à chacun de ces axes.

qui évite les traînées et interactions aérodynamiques qui seraient la conséquence de supports déportés.

Nous donnons, *Planche* 5, un exemple de mise en équilibre d'un tel système. Les indications correspondantes sont reproduites sur la planche.

6.2 EQUILIBRE D'UN ATTERRISSEUR RENTRANT : PLANCHE 6.

L'atterrisseur étudié est du type monojambe à contrefiche articulée et escamotage latéral (atterrisseur type D. 520-S). Nous envisageons deux cas d'équilibre décrits sur la planche.

CHAPITRE IV

STATIQUE GRAPHIQUE

0. INTRODUCTION

L'objet de la Statique graphique est de résoudre, par des constructions géométriques, des problèmes de Mécanique statique. Nous retrouverons donc des solutions purement graphiques de différents problèmes traités au cours des chapitres précédents. La précision de ces constructions géométriques, sans atteindre celle des calculs algébriques, reste généralement très suffisante pour les problèmes industriels courants.

L'emploi de la statique graphique est grandement facilité si l'on s'astreint dès le début à une certaine « discipline » de notations (numérotation et échelles) que nous allons exposer au paragraphe suivant.

Nous nous limiterons à l'étude des *systèmes plans* qui sont les plus courants en construction et pour lesquels l'emploi de la statique graphique présente le plus d'avantages.

Il est évident que la Statique graphique ne peut s'apprendre correctement qu'en s'astreignant à effectuer soi-même de nombreux exercices.

1. DÉFINITIONS, PROPRIÉTÉS, NOTATIONS

1.1 DYNAMIQUE DES FORCES (fig. 1).

Soit un système plan de forces quelconques F_1 F_2 F_3 F_4... (fig. 1 *a*), on désigne par *polygone des vecteurs* ou *dynamique des forces* la figure polygonale construite en menant par une origine quelconque O, des vecteurs équipollents aux forces (polygone OABCD, fig. 1 *b*).

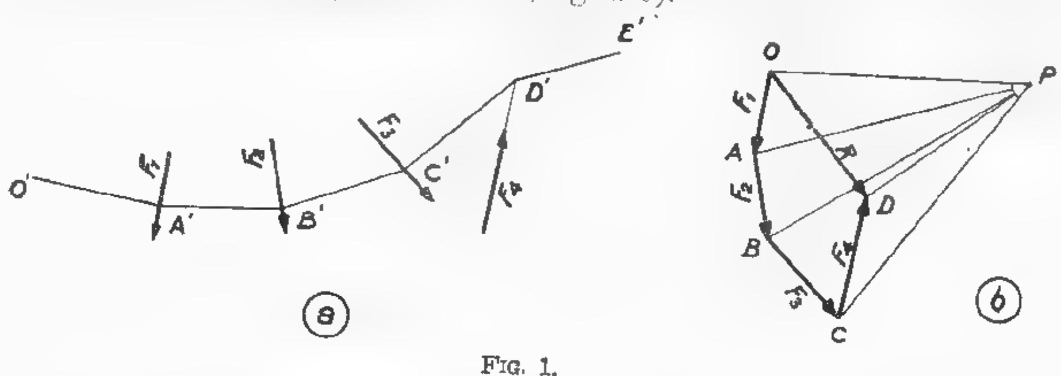


Fig. 1.

Nous avons vu au chapitre II, paragraphe **2.32**, que la résultante R des forces F_1, F_2, F_3, F_4... était donnée en grandeur et direction par la droite joignant les extrémités du polygone des forces (ligne OD).

Le dynamique peut être ouvert ou fermé (points O et D confondus). Dans ce dernier cas, la résultante a une valeur nulle.

1.2 POLE. RAYONS POLAIRES (fig. 1 *b*).

Joignons les origines et extrémités de tous les vecteurs du dynamique à un point quelconque P nommé *pôle.* On obtient les *rayons polaires* issus de ce pôle (rayons PO, PA, PB, PC et PD).

1.3 POLYGONE FUNICULAIRE.

Par un point O′ quelconque (fig. 1 *a*) menons O′A′ parallèle au rayon vecteur PO, A′B′ parallèle à PA, etc... en limitant toujours chaque parallèle à la force ayant pour origine le rayon polaire considéré. On obtient une ligne brisée appelée *polygone funiculaire* ou plus simplement *funiculaire.*

On voit immédiatement que les côtes extrêmes O′A′ et D′E′ peuvent être soit convergents, soit parallèles.

Il suffirait pour ce dernier cas, que le dynamique soit fermé (D et O confondus) ou bien que P soit choisi sur la droite OD. Les côtés extrêmes peuvent, enfin, être dans le prolongement l'un et l'autre. Nous en verrons la signification plus loin.

1.4 PROCÉDÉ DE NUMÉROTATION.

Afin d'éviter des erreurs au sujet de la position relative des forces et des côtés du polygone funiculaire, nous conseillons la méthode de « *numérotation par intervalles* » exposée ci-dessous et utilisée, par la suite, pour toutes les figures (voir, par exemple, fig. 2).

On numérotera tous les intervalles compris entre les forces F_1, F_2, F_3, F_4 et les intervalles extérieurs à ce système et d'une manière correspondante les sommets et les rayons du dynamique.

Un rayon quelconque devra alors se trouver dans l'intervalle de même numéro et une force se désignera par les intervalles qu'elle délimitera.

Exemples (fig. 2). — Le côté du funiculaire se trouvant dans l'intervalle 3 est parallèle au rayon polaire n° 3 qui aboutit au sommet 3 du dynamique. La force F_1 se lira : force 1-2, la force F_3 : force 3-4, etc... Il est à remarquer que cette désignation d'une force par deux chiffres est aussi commode sur la figure des forces elles-mêmes que sur le dynamique.

1.5 DESIGNATION DES ÉCHELLES.

En statique graphique, les échelles jouent un rôle capital. Toutes les grandeurs étudiées étant représentées par des *vecteurs,* nous aurons à comparer à des longueurs des termes de dimensions les plus diverses (forces, moments de forces, surfaces, moments d'inertie, etc...). Nous prendrons pour habitude de toujours désigner les échelles en écrivant la *valeur représentée par l'unité de longueur* du diagramme.

Exemples :

Echelle de forces : 1 mm = 10 kg et non 1 kg = 0,1 mm.
Echelle de moments : 1 mm = 10 mkg et non 1 mkg = 0,1 mm.
Echelle de surfaces : 1 mm = 10 cm² et non 1 cm² = 0,1 mm.
etc...

Remarques. — 1° Dans les expressions ci-dessus, le signe = est une convention commode et doit en toute rigueur se lire : représente.

2° Il convient surtout de ne jamais désigner par un simple rapport sans dimension une échelle où entrent deux grandeurs différentes.

Exemple. — Echelle des forces $= \frac{1}{10}$ est absolument incorrect et n'a aucune signification.

1.6 SIMPLIFICATION DES FIGURES.

a) Il n'est pas utile de représenter les flèches des vecteurs-forces sur le dynamique puisque celles-ci figurent sur la représentation du système de forces et qu'au surplus, avec nos conventions de numérotation, le sens des forces sera clairement indiqué en progressant sur le dynamique en suivant cette numérotation (voir figures ci-après).

b) Il n'est pas utile également de dessiner les vecteurs-forces à l'échelle des forces sur la figure représentative du système (figure de gauche ci-après) puisque ces vecteurs-forces seront obligatoirement représentés à l'échelle sur le dynamique.

En résumé, les figures représentatives du sytème indiqueront seulement la *situation*, la *direction* et le *sens* des forces ; les renseignements complémentaires sur l'*intensité* des forces seront donnés par le dynamique.

Nous utiliserons, en général, ces simplifications de tracé pour les figures à venir.

2. RECHERCHE DE LA RÉSULTANTE D'UN SYSTÈME PLAN DE FORCES

La figure 2 représente avec les notations ci-dessus le dynamique et le funiculaire du système de forces F_1 F_2 F_3 F_4.

On sait déjà que la résultante R est donnée en *direction* et en *grandeur* (à l'échelle des forces) par la ligne de fermeture 1-5 du dynamique des forces.

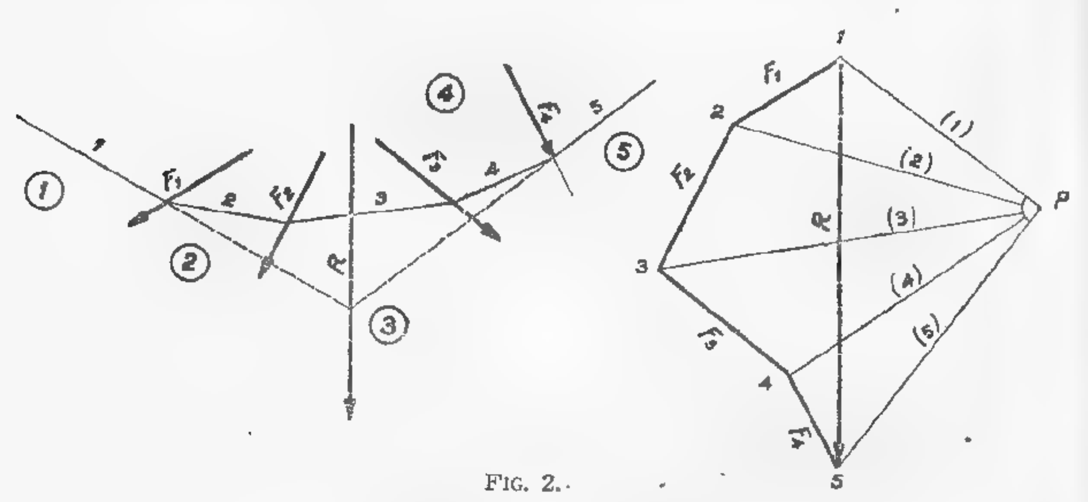


FIG. 2.

Il reste à trouver sa *position.*

On voit que l'on peut remplacer la force F_1 par deux composantes parallèles et égales aux rayons polaires (1) et (2) et dont les sens respectifs sont 1-P et P-2.

De même F_2 équivaut à 2-P et P-3, etc...

On voit que R équivaut finalement à 1-P et P-5, c'est-à-dire aux rayons vecteurs extrêmes (puisque les rayons intermédiaires sont comptés deux fois et dans des sens opposés).

RÈGLE. — *La résultante passe donc par le point de concours des côtés extrêmes du polygone funiculaire et elle est parallèle à la ligne de fermeture du dynamique des forces.*

Quel que soit le pôle choisi, les côtés extrêmes du funiculaire se rencontrent donc toujours sur une même droite (ligne d'action de la résultante).

Remarque. — On doit toujours éviter de prendre le pôle sur la ligne de fermeture du dynamique car les côtés extrêmes seraient parallèles et il y aurait indétermination apparente pour la position de la résultante.

3. RECHERCHE GRAPHIQUE DES CENTRES DE GRAVITÉ DES SURFACES PLANES

C'est une application directe de la recherche des résultantes. Nous avons vu, en effet, au chapitre II, paragraphe **7.12**, que le centre de gravité d'une surface pouvait être considéré comme le *point d'application de la résultante de forces parallèles* proportionnelles aux surfaces élémentaires constituant la surface considérée.

La figure 3 donne une application dans le cas général d'une surface sans aucun axe de symétrie.

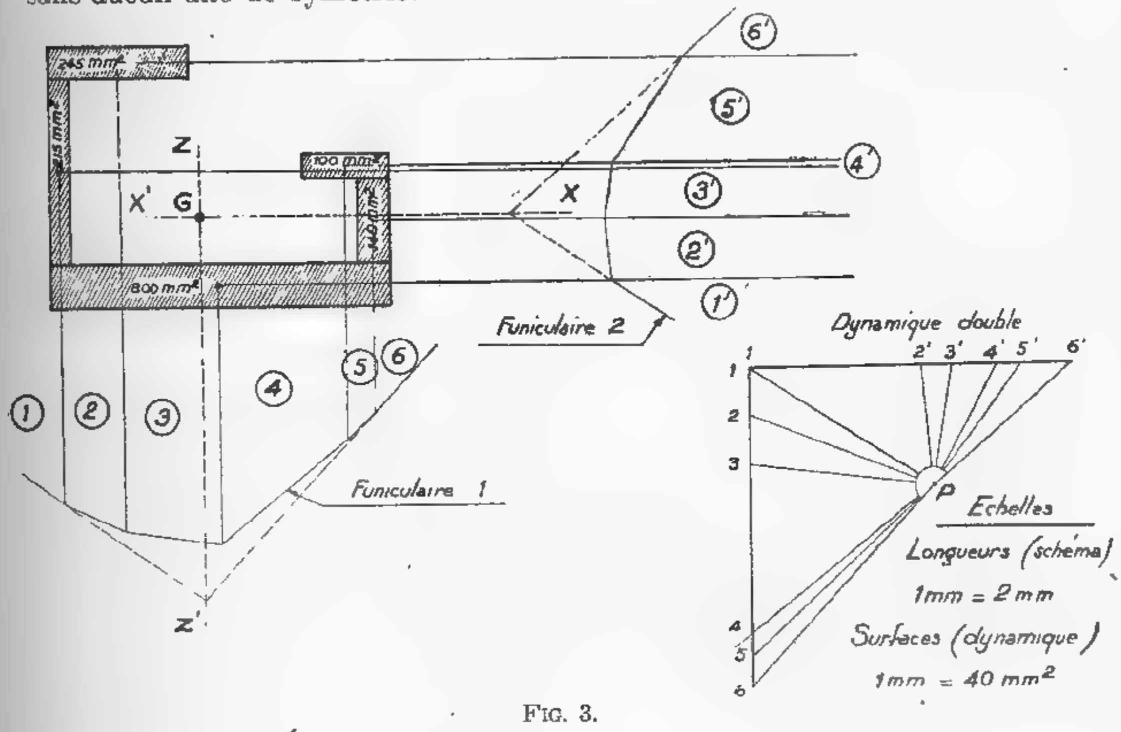


Fig. 3.

On décompose la surface en éléments usuels (rectangles, triangles, cercles, etc...) dont on connaît la position du centre de gravité et la surface.

On choisit une *échelle des surfaces* : 1 mm = k mm².

On trace un premier dynamique et funiculaire en faisant agir les forces (surfaces) verticalement. On obtient un *premier lieu du centre de gravité* donné par la verticale ZZ'.

On trace ensuite un autre dynamique et funiculaire avec des forces horizontales. On obtient un *deuxième lieu* (horizontale XX').

Le centre de gravité se trouve au point de rencontre G de ces deux axes. Voir notes [1] et [2].

1. — On peut, comme vérification, faire une troisième construction avec une direction quelconque. On obtient ainsi un *triangle d'erreur graphique* d'où plus de précision.

2. — Quand la surface a un axe de symétrie on connaît déjà un lieu de G (sur l'axe) et une seule construction suffit.

4. DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES MOMENTS DES FORCES

4.1 MOMENT D'UNE FORCE.

Soit une force F. La statique graphique permet de déterminer son moment par rapport à un point quelconque C (fig. 4).

Construisons un funiculaire quelconque de la force F correspondant à un pôle également quelconque.

Menons par le point C une parallèle à la force F et soit $\overline{MN}$ le segment intercepté sur cette parallèle par les deux côtés du funiculaire. Posons :

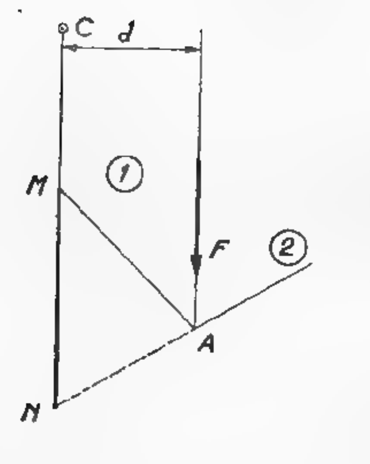
l=distance de P à ab (*distance polaire*),
d=distance de C à F mesurée sur le tracé.

Si ce tracé a été effectué avec une échelle des longueurs : 1 mm $=e$ mm la distance réelle est

$$d \cdot e.$$

Les triangles abP et MNA étant semblables, nous avons :

$$\frac{\overline{MN}}{d}=\frac{\overline{ab}}{l}$$



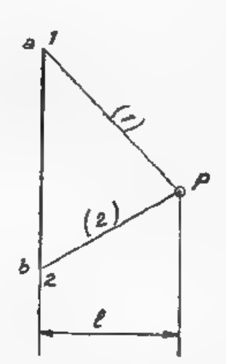


Fig. 4.

Si le tracé du vecteur-force ab a été effectué à une *échelle des forces* telle que :

$$1 \text{ mm}=n \text{ kg}$$

on a : $\overline{ab}=\frac{F}{u}$

d'où : $\frac{\overline{MN}}{d}=\frac{F}{n \cdot l}$

soit :

$$\overline{MN} \cdot l \cdot n=F \cdot d.$$

On a donc en multipliant par e (échelle des longueurs) :

$$\overline{MN} \cdot l \cdot n \cdot e=F \cdot d \cdot e.$$

Or le produit $F \cdot d \cdot e$ est égal au moment réel de F par rapport au point C.

Le vecteur $\overline{MN}$ *représente donc à une échelle près le moment de la force F par rapport au point C.*

Cette échelle est égale au produit de l'échelle des longueurs e par l'échelle des forces n et par la distance polaire l. Soit

1 mm du vecteur moment représente : $e \cdot n \cdot l$ mmkg.

4.2 MOMENT D'UN SYSTÈME PLAN DE FORCES QUELCONQUES.

Envisageons maintenant un système d'un nombre quelconque de forces F_1, F_2, F_3, F_4... (fig. 5). Le moment de l'ensemble de ces forces par rapport au point C est égal au moment par rapport à ce point de la résultante R des forces considérées. Cette résultante est déterminée comme indiqué au paragraphe **2.** Le segment $\overline{MN}$ déterminé par les deux côtés extrêmes du polygone funiculaire sur la parallèle à R passant par le point C représente donc, à

une échelle près, le moment par rapport à C de l'ensemble des forces F_1, F_2, F_3, F_4.

D'après la règle ci-dessus, cette échelle est égale au produit de l'échelle

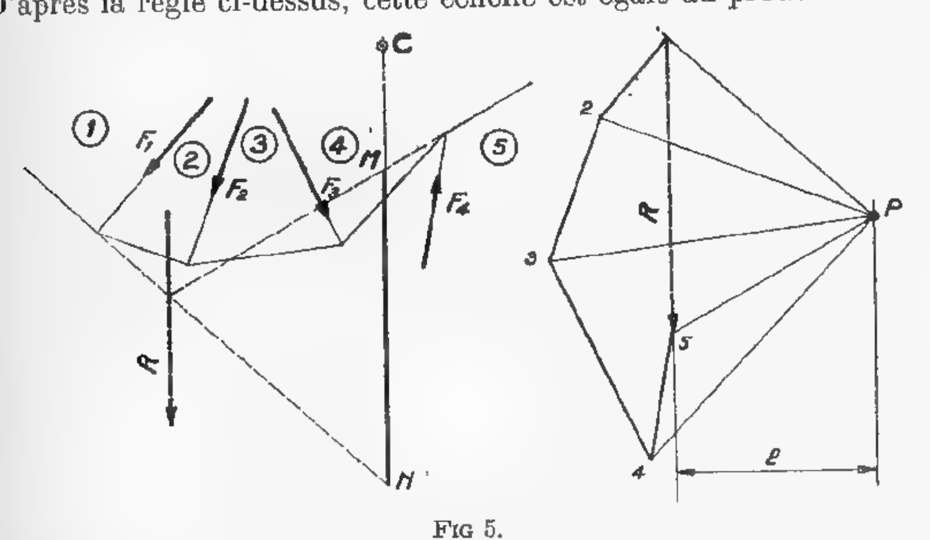


Fig 5.

des longueurs e par l'échelle des forces n et par la distance polaire l de la résultante des forces.

$$1 \text{ mm} = e \cdot n \cdot l \text{ unités de moments}$$ [1].

4.3 MOMENT D'UN SYSTÈME PLAN DE FORCES PARALLÈLES.

Soit un système de forces parallèles F_1, F_2, F_3, F_4 (fig. 6). La construction précédente s'applique sans restriction : *le vecteur-moment étant toujours limité par les deux côtés extrêmes du funiculaire* (vecteur MN sur la figure).

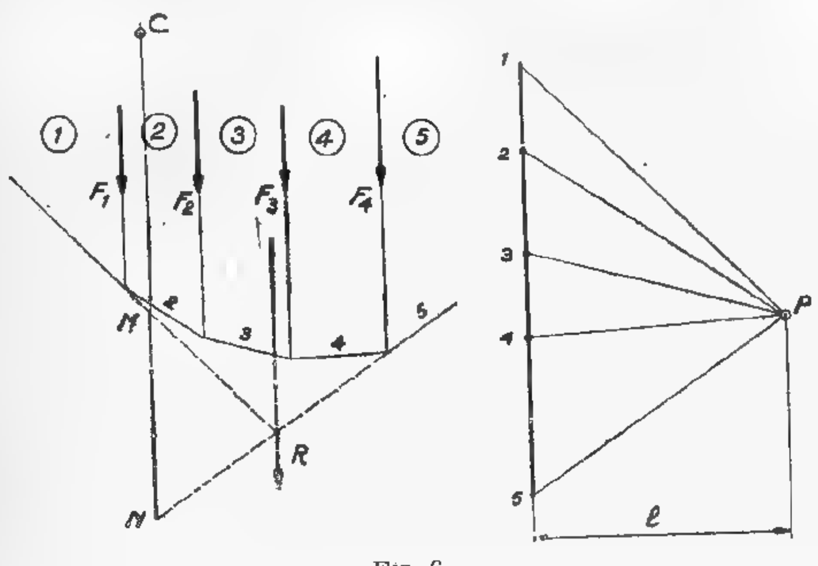


Fig. 6.

En effet, leur point d'intersection permet de tracer la résultante R du système de forces et c'est le moment de la résultante par rapport au point C que l'on détermine.

1. — La distance polaire variant pour chaque force, l'échelle des moments partiels serait également variable.

Les moments partiels de chaque force sont ici donnés à la même échelle puisque l est constante.

4.4 CAS PARTICULIER : MOMENT D'UN COUPLE (fig. 7).

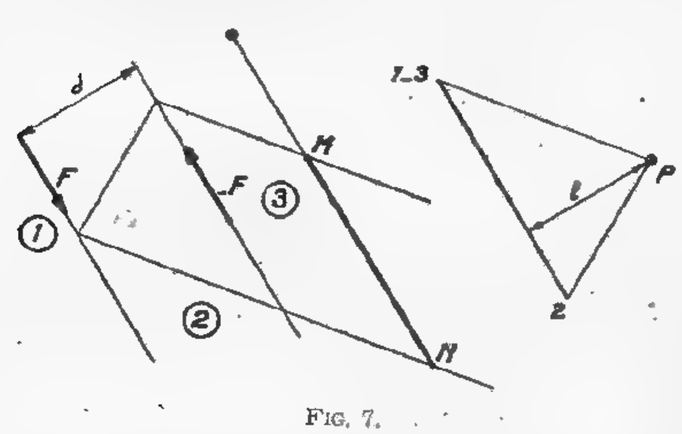


Fig. 7.

Considérons le couple constitué par les forces + F et — F distantes de *d*. Construisons un funiculaire quelconque. Le moment du couple est représenté à une échelle près par la longueur MN interceptée par les côtés extrêmes du funiculaire sur une droite quelconque parallèle à la direction des forces constituant le couple.

On voit donc que ce moment est une constante quel que soit le point de référence choisi, d'où vérification graphique de la propriété donnée au chapitre II (§ **2.44**).

5. APPLICATIONS DE LA STATIQUE GRAPHIQUE A L'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES PLANS

5.1 CONDITIONS GRAPHIQUES D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME PLAN

Au paragraphe **2.2** du chapitre III, nous avons vu quelles sont les conditions mathématiques d'équilibre d'un tel système. Ces conditions peuvent se résumer en :

a) force résultante nulle ;
b) moment nul par rapport à un point quelconque.

Il en découle immédiatement que :

a) Le *polygone des vecteurs* (ou dynamique) *doit être fermé*. Cette condition est évidente (voir § **1.1** ci-dessus).

b) Le *polygone funiculaire* (relatif à un pôle quelconque) *doit également être fermé*, c'est-à-dire que les côtés extrêmes de ce polygone doivent être dans le prolongement l'un de l'autre.

En effet, le dynamique étant fermé, les côtés extrêmes du funiculaire ne peuvent être que parallèles ou dans le prolongement l'un de l'autre. Or, dans le premier cas, on sait d'après le paragraphe précédent, que le système de forces équivaudrait à un *couple* dont l'intensité serait mesurée par la distance entre ces parallèles. Le système ne serait donc pas en équilibre et le funiculaire doit donc bien être fermé.

Application. — Pour vérifier l'équilibre d'un système plan de forces quelconques, on peut tracer un dynamique et un funiculaire de ce système et vérifier la *fermeture* de chacun d'eux. La figure 8 ci-après donne un exemple de cette vérification appliquée au système étudié au chapitre III, paragraphe **5.2** (fig. 13 de ce chapitre). On voit que les côtés extrêmes 1 et 5 du polygone funiculaire sont bien dans le prolongement l'un de l'autre.

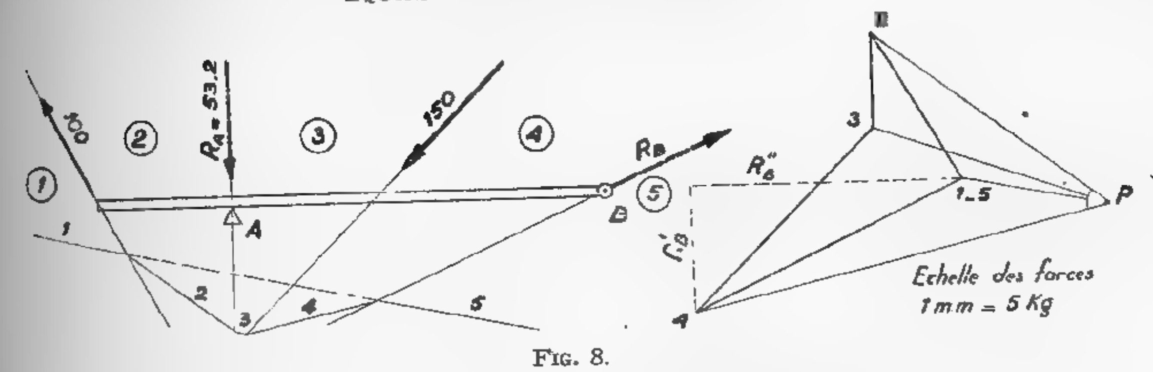


Fig. 8.

5.2 ÉQUILIBRE DES POUTRES DROITES REPOSANT SUR DEUX APPUIS SIMPLES.

Nous nous placerons dans le cas le plus fréquent où les charges appliquées et les réactions à déterminer forment un *système plan de forces parallèles normales à la direction de la poutre.*

5.21 **Principe de la méthode : Ligne de fermeture.** — Nous exposerons ce principe à l'aide d'un exemple simple. Soit (fig. 9), une poutre sur deux appuis simples A et B chargée par un système de forces normales et de même sens F_1, F_2, F_3, F_4.

Traçons un dynamique et un funiculaire de ce système de forces appliquées.

L'ensemble : forces appliquées et réactions devant être en *équilibre*, il faudra donc que le dynamique et le funiculaire finals soient fermés (paragraphe précédent).

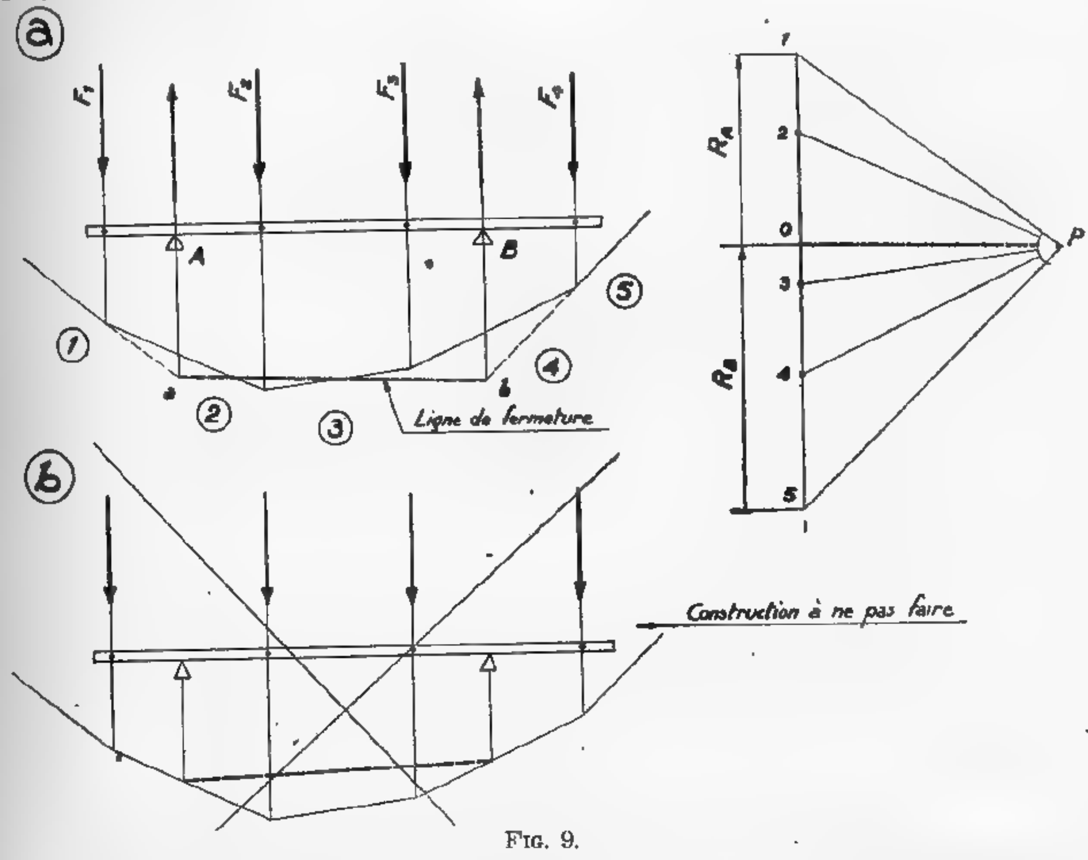


Fig. 9.

La *première condition* exige que les deux vecteurs-réactions cherchés R_A et R_B mis bout à bout sur le dynamique, reproduisent le trajet 5-1. Il s'agit donc de trouver sur ce trajet un certain point O déterminant grâce à sa position, l'intensité de chaque réaction.

La *deuxième condition* exige que ce point O soit tel que les nouveaux côtés extrêmes du funiculaire qui correspondront au rayon polaire PO soient dans le prolongement l'un de l'autre tout en aboutissant aux intersections des anciens côtés extrêmes 1 et 5 avec les lignes d'action des nouvelles forces c'est-à-dire des réactions R_A et R_B).

On démontre par ce raisonnement que *le rayon polaire PO sera parallèle à la droite* ab *joignant les intersections* a *et* b *des côtés* 1 *et* 5 *avec les lignes d'actions de* R_A *et* R_B. Cette droite s'appelle *ligne de fermeture* du polygone funiculaire. Le rayon polaire PO qui lui correspond (parallèle à ab) détermine sur le dynamique les réactions R_A = 0-1 et R_B = 5-O.

5.22 **Remarques.** — *a*) Nous avons indiqué sur la figure 9 une « *erreur classique* » à ne pas commettre. Cette erreur consiste à prendre pour ligne de fermeture l'intersection de R_A et R_B avec les *côtés adjacents* du funiculaire au lieu des *côtés extrêmes*.

b) Il est essentiel de bien remarquer que la *réaction à l'appui de gauche* part du point O sur le dynamique pour aboutir au point figurant l'*intervalle extrême gauche* (point 1) et non obligatoirement au point le plus haut du dynamique. Même remarque pour la *réaction de droite* qui part du point figuratif de *l'intervalle d'extrême droite* pour aboutir au point O.

Nous donnons, figure 10, un *exemple numérique* qui illustre cette remarque : La réaction R_A est donnée par O-1 et vaut 170 kg (vers le haut) et la réaction R_B donnée par 5-O vaut — 220 kg (vers le bas). Les points 1 et 5 ne sont pas situés aux extrémités du dynamique.

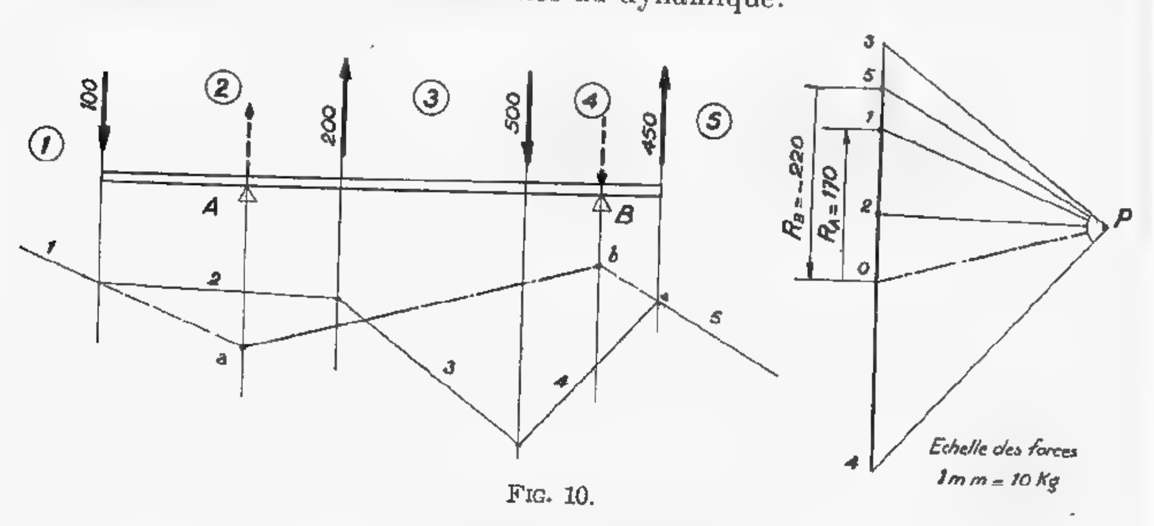


Fig. 10.

5.3 ÉQUILIBRE DES POUTRES ISOSTATIQUES POSSÉDANT DES POINTS FIXES (CHARGES QUELCONQUES NON PARALLÈLES).

Le procédé le plus simple pour résoudre graphiquement l'équilibre de ces systèmes consiste à faire apparaître la *résultante des forces appliquées*. Les principes de décomposition de forces restent ensuite identiques à ceux exposés au chapitre III (§ 5.6).

Application. — La figure 11 donne une application concernant la mise en équilibre d'une poutre droite possédant un point fixe A (articulation) et une réaction dirigée suivant XX' agissant en B. On forme le dynamique des forces appliquées, d'où la direction et l'intensité de la résultante *R*. On trace ensuite un funiculaire relatif à un pôle quelconque P, *mais en ayant soin de faire passer ce funiculaire par le point fixe* A (dans le cas où A n'est pas situé en dehors du système de forces, on trace le funiculaire de part et

d'autre de ce point en commençant par l'intervalle qui le contient). On obtient ainsi la ligne d'action de R et le point de rencontre O de cette ligne d'action avec XX′ définit la direction OA de la réaction R_A. La décomposi-

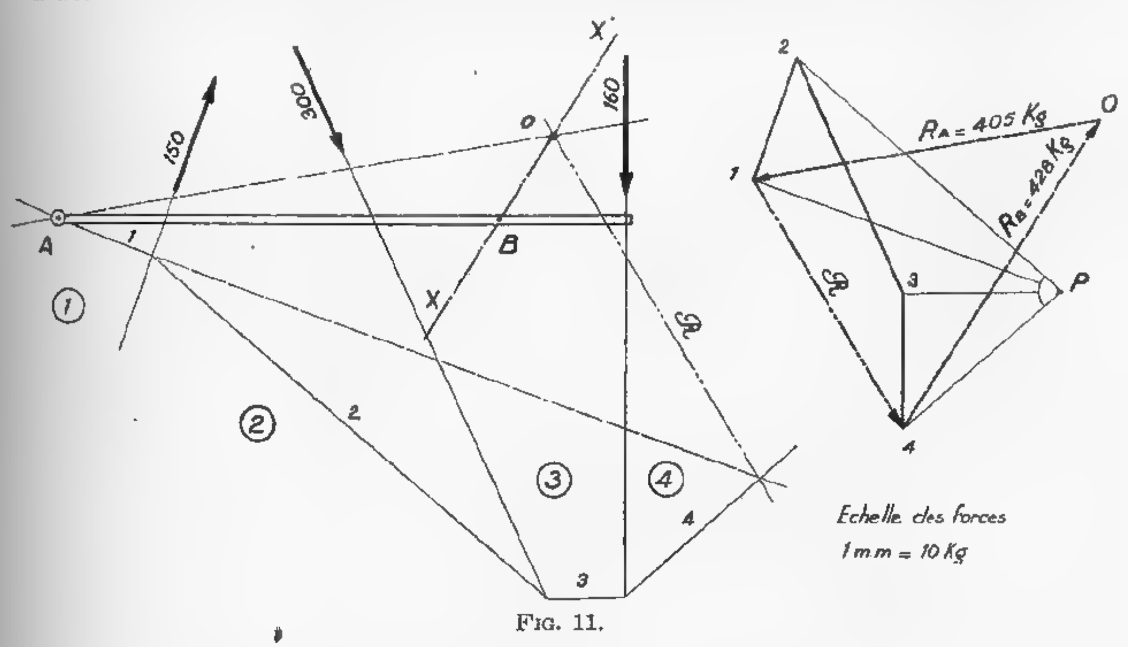


FIG. 11.

tion de R s'effectue directement sur le dynamique. Même remarque que ci-dessus au sujet des origines des réactions.

6. DÉTERMINATION DES MOMENTS FLÉCHISSANTS AGISSANT SUR LES POUTRES DROITES SOUMISES A DES CHARGES NORMALES

6.0 REMARQUE ET DÉFINITION PRÉLIMINAIRES.

La définition précise du *moment fléchissant agissant sur une section droite* d'une poutre prismatique sera donnée au chapitre V ci-après.

Pour l'étude qui va suivre, la définition ci-dessous suffit.

On désigne par *moment fléchissant* (*ou moment de flexion*) en un point C quelconque d'une poutre droite (fig. 12), *la somme* (algébrique) *des moments partiels par rapport à* C *de tous les efforts extérieurs agissant d'un même côté de ce point* C. Ces efforts doivent comprendre les actions (forces appliquées) et les réactions s'il y a lieu, ce qui nécessite donc toujours la *mise en équilibre préalable* de la poutre étudiée.

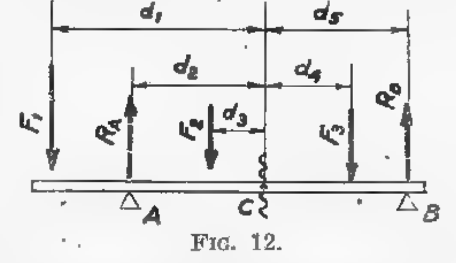


FIG. 12.

Le système étant en équilibre, la somme des moments de tous les efforts (à droite et à gauche de C) doit être nulle chap. III, § 2.2. On en déduit donc que le moment fléchissant obtenu en considérant les forces situées à gauche de C, sera égal (et opposé) à celui obtenu en considérant les forces situées à droite.

Exemple (fig. 12). — Le moment fléchissant en C vaut :

$$M = F_1 \cdot d_1 - R_A \cdot d_2 + F_2 \cdot d_3$$

en considérant les *forces de gauche* avec M positif dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, ou encore :

$$M = -(F_3 \cdot d_4 - R_B \cdot d_5)$$

en considérant les *forces de droite* avec même sens de rotation positif.

Nous étudierons successivement différents cas de poutres droites isostatiques recevant d'abord des *charges concentrées* (§ **6.1** à **6.3**) puis des *charges réparties* (§ **6.4**), ces charges étant toujours dirigées normalement aux dimensions longitudinales de ces poutres.

6.1 POUTRE DROITE ENCASTRÉE A UNE EXTRÉMITÉ (fig. 13).

Considérons une poutre encastrée en A et supportant des charges F_1, F_2, F_3...

Construisons le funiculaire relatif au pôle P situé à une distance *d* du polygone des vecteurs (droite 1-2-3-4) et cherchons quel est le *moment de flexion en un point* C (fig. 13 *a*).

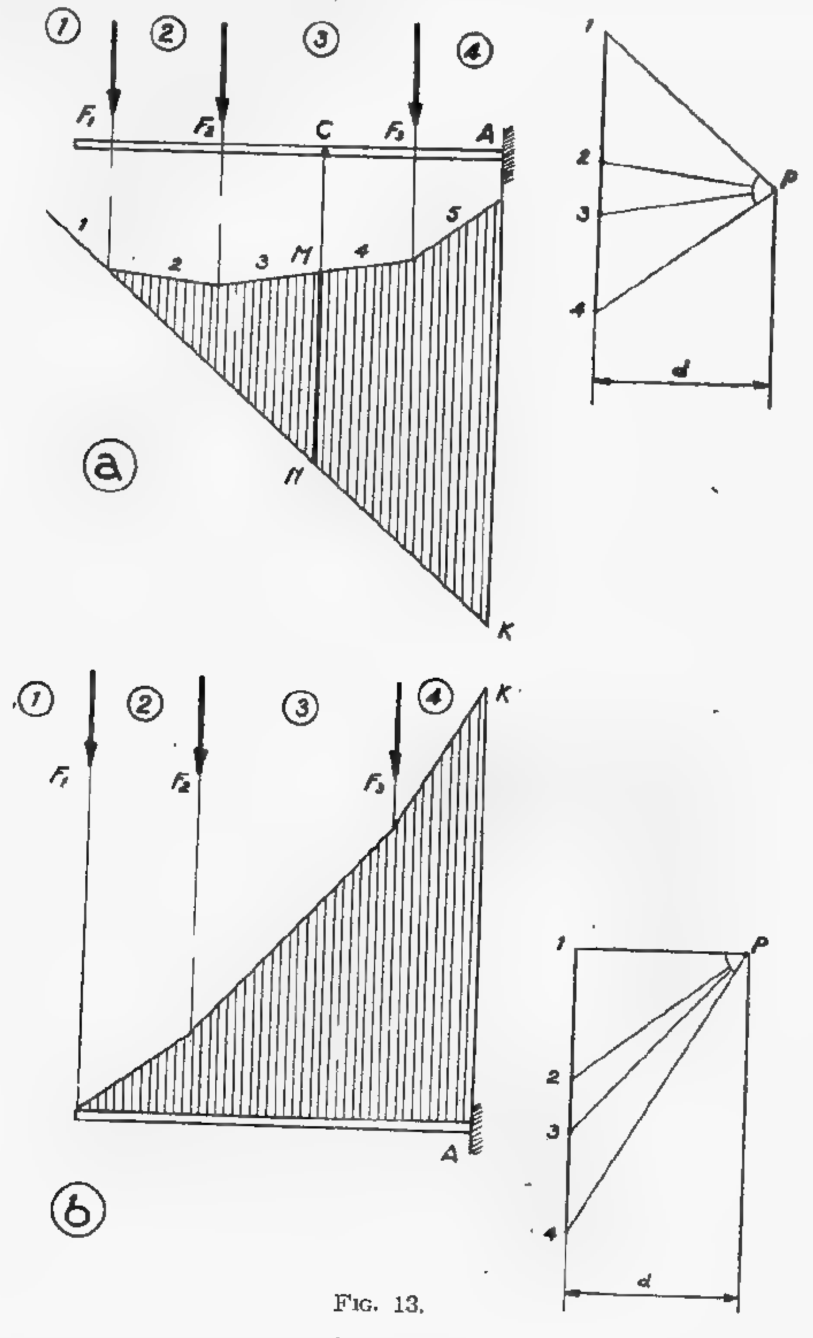


Fig. 13.

Considérons pour cela les forces situées à gauche de C (ce qui évite, dans ce cas particulier, la mise en équilibre préalable). D'après le paragraphe **4.3** et la définition ci-dessus, le moment de flexion cherché est représenté par le segment $\overline{MN}$ à l'échelle des moments.

Le moment de flexion en un point quelconque de la poutre est donc déterminé, à une échelle près, par le segment, tel que MN, qui correspond à ce point. L'ensemble de tous ces segments constitue la surface hachurée sur la figure ; cette surface est dite : *surface des moments fléchissants.*

Si l'on veut la représentation graphique des moments fléchissants dans un système d'axes rectangulaires, il suffit de rendre la droite (1) du funiculaire horizontale, c'est-à-dire le rayon polaire P-1 horizontal, ce qui s'opère simplement en choisissant le pôle P sur l'horizontale du point 1 (fig. **13** *b*). Cette opération s'appelle *redressement du polygone funiculaire.*

6.2 POUTRE SUR DEUX APPUIS SANS PORTE-A-FAUX CHARGE (fig. 14).

Nous savons déterminer les réactions R_A et R_B (§ **5.21**). La ligne de fermeture *ab* est relative à la fois aux réactions R_A et R_B.

Si l'on veut le moment de flexion en C de toutes les forces situées à sa gauche, par exemple, le moment de flexion est déterminé (§ **2.42**) à une échelle près par le segment MN déterminé par les côtés extrêmes du funiculaire sur la parallèle aux forces passant par C. Or ici, le premier côté est celui relatif à R_A donc la ligne de fermeture, le dernier côté étant (3). On voit donc que la surface des moments fléchissants est celle hachurée sur la figure.

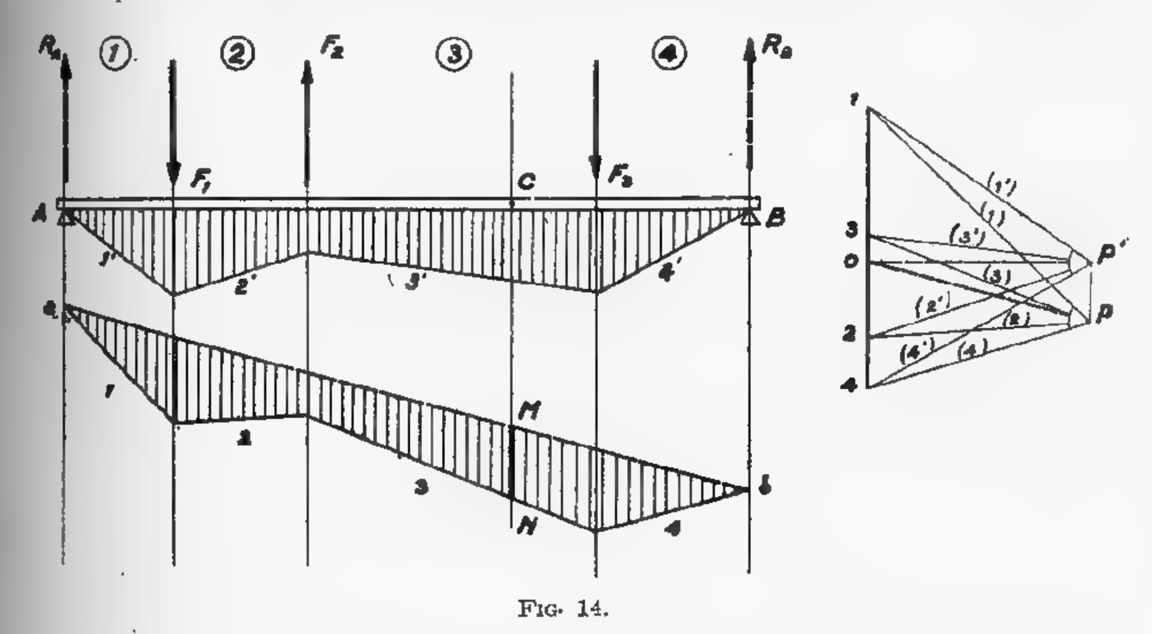


FIG. 14.

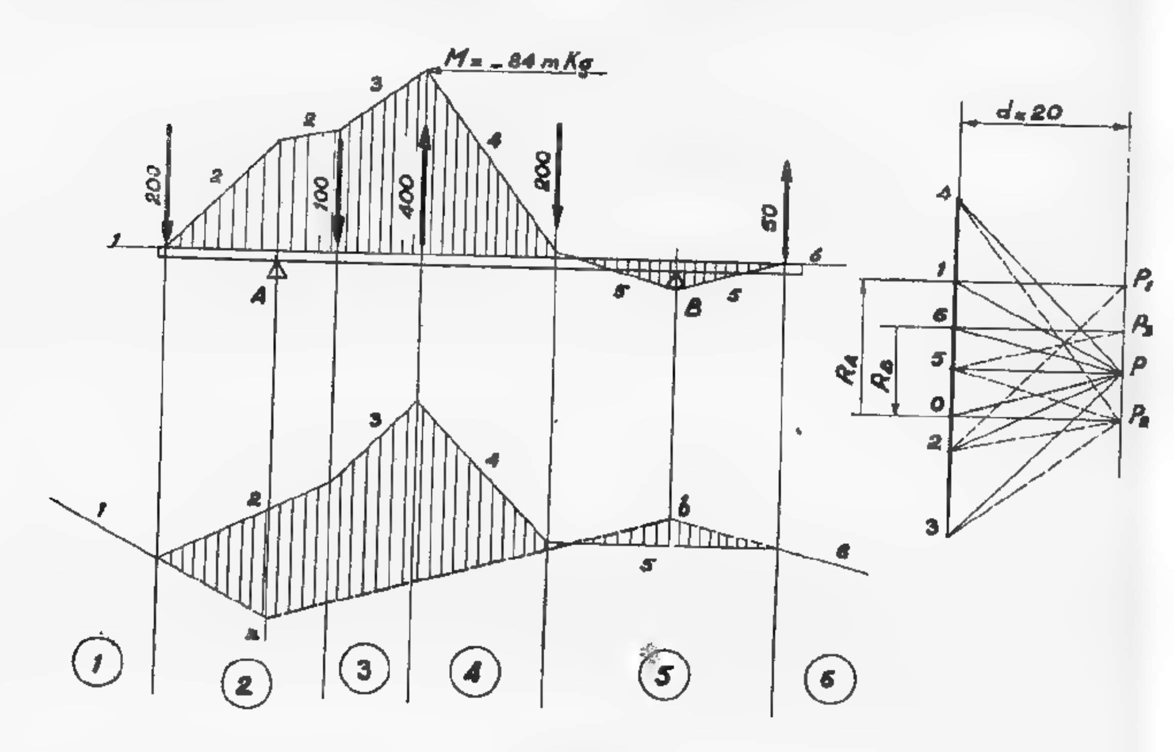
Redressement du polygone funiculaire. — Si l'on veut la représentation des moments fléchissants directement à partir de la poutre, il suffit de rendre la ligne de fermeture *ab* parallèle à la poutre et cela en choisissant un pôle P′ convenable, c'est-à-dire tel que P′O soit parallèle à la poutre. La construction d'un second funiculaire relatif à ce pôle P′ et débutant par le point A donnera la solution cherchée qui est représentée également sur la figure **14**.

6.3 POUTRE SUR APPUIS SIMPLES AVEC PORTE-A-FAUX CHARGÉS.

Le principe de construction est le même que précédemment. Nous don

nons figure 15 une *application numérique*. On voit que la seule difficulté due à la présence des charges sur les porte-à-faux réside dans le *redressement du polygone funiculaire*. La solution utilisée sur la figure 15 a consisté à prendre deux nouveaux pôles P_1 et P_3 en supplément au pôle P_2 obtenu avec la ligne de fermeture.

Le pôle P_1 situé à l'aplomb de la force extrême-gauche (point 1) donne les côtés redressés 1 (confondu avec la poutre) et 2 jusqu'à la réaction R_A. Le pôle P_2 donne les côtés redressés 2 (après R_A) 3, 4 et 5 jusqu à R_B. Le pôle P_3 donne les côtés redressés 5 (après R_B) et 6 qui doit être confondu avec la poutre ce qui constitue une vérification du tracé.



ECHELLES.

Longueurs : 1 mm=20 mm.

Forces : 1 mm=10 kg.

Distance polaire : d=20 mm.

Moments fléchissants : 1 mm =20 · 10 · 20=4000 mmkg.

soit : 1 mm=4 mkg.

Moment fléchissant maximum (voir figure).

M = 4 · 21 = 84 mkg.

FIG. 15.

Remarques. — *a*) On pourrait également tracer un autre dynamique englobant, cette fois, les réactions R_A et R_B connues, dans l'ordre où elles se présentent sur la poutre. Le pôle P serait alors évidemment choisi à l'aplomb du point 1 (moment nul à gauche de ce point). Le funiculaire correspondant donnerait la même figure redressée.

b) On peut aussi, simplement, se contenter de relever par points la valeur de M sur le premier funiculaire et de reporter ces ordonnées à partir de la poutre.

6.4 POUTRES DROITES AVEC CHARGES RÉPARTIES.

6.41 Définitions. — Considérons une poutre AA′ sur laquelle est appliquée une *charge répartie variable* (fig. 16).

Isolons un petit élément de largeur Δl entourant un point M de la poutre. Supposons que l'on connaisse la charge q agissant sur cet élément.

Le rapport $\frac{q}{\Delta l}$ définit la *charge moyenne par unité de longueur* le long de cet élément.

Si la distance Δl a été prise suffisamment petite (ou si, en d'autres termes Δl tend vers zéro) le rapport précédent mesurera une grandeur p appelée *ordonnée de charge* au point M.

$$p = \frac{q}{\Delta l} \quad \text{pour} \quad \Delta l \to 0$$

Cette ordonnée de charge sera de dimensions :

$$p = \frac{\text{Force}}{\text{longueur}} = \frac{\text{F}}{\text{L}}$$

et s'exprimera donc en forces par unités de longueurs.

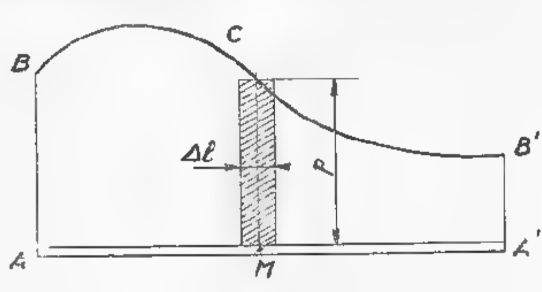


Fig. 16.

Exemple : p=50 kg/m (kilog par mètre courant).

En déterminant ainsi les ordonnées p tout le long de la poutre, on obtiendra une courbe telle que BCB' appelée *courbe de charge* ou *ligne de charge* appliquée à la poutre. On voit aisément que l'intégration de cette courbe (c'est-à-dire le planimétrage de la surface qu'elle délimite), représentera la charge totale appliquée entre les deux limites d'intégration utilisées.

Notion physique. — On peut se représenter la ligne de charge comme la hauteur d'un tas de sable (de largeur constante) donnant lieu sur la poutre aux charges considérées.

Cas particuliers. — On dit que la charge est *uniformément répartie* quand la ligne de charge est une droite parallèle à la poutre, c'est à-dire quand *l'ordonnée de charge est constante* le long de cette poutre.

Exemple : p=1000 kg/m=constante.

Plus généralement, la ligne de charge est dite *linéaire* quand elle se figure par une droite inclinée ou non.

6.42 Charges par mètre carré et par mètre courant. — En construction et particulièrement en construction aéronautique, on part le plus souvent de *charges par unité de surface.* On a ainsi sur un élément de forme donnée une charge Q par mètre carré.

a) Supposons d'abord cette *charge* Q *constante.*

Soit, par exemple, Q=500 kg/m² appliquée à la surface dessinée figure 17 (forme en plan d'une aile par exemple).

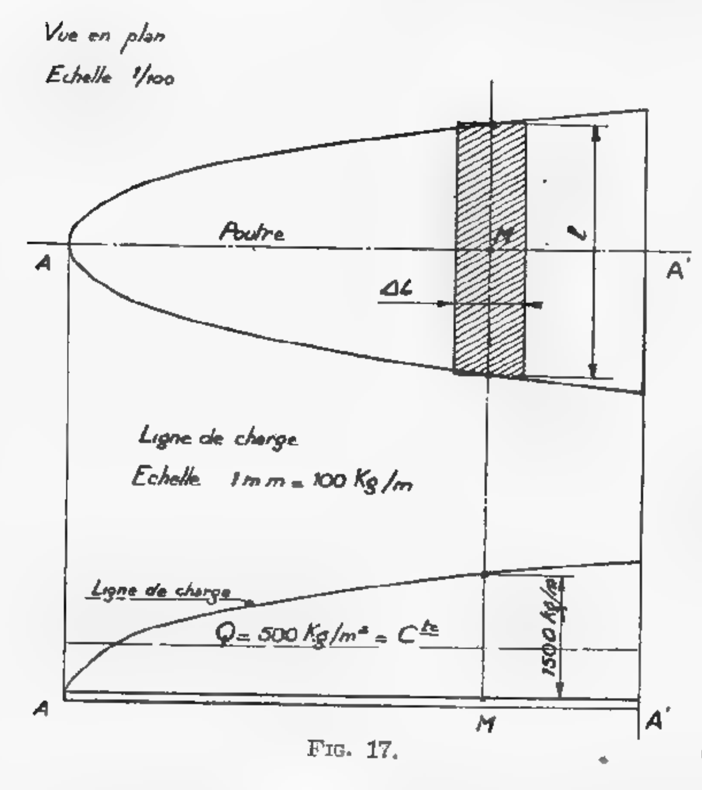


Fig. 17.

Un élément ΔL de poutre entourant un point M intéressera une surface :

$$\Delta S = l \cdot \Delta L$$

avec l = profondeur de la surface au point M.

Soit :

$l = 3$ mètres (fig. 17).

Cet élément recevra donc une charge

$$q = Q \cdot \Delta S = Q \cdot l \cdot \Delta L$$

soit :

$$q = 500 \cdot 3 \cdot \Delta L = 1500 \cdot \Delta L$$

(en kg avec ΔL en m).

L'ordonnée de charge en M vaut donc:

$$p = \frac{q}{\Delta L} \quad \text{soit :} \quad \boxed{p = Ql}.$$

c'est-à-dire ici :

$$p = 500 \cdot 3 = 1500 \text{ kg/m}.$$

On voit donc que *la ligne de charge reproduira à une échelle près la variation de la profondeur l de la surface* c'est-à-dire, d'une façon générale, *la variation de la dimension de la surface, normale à la direction de la poutre.*

b) Si la *charge* Q est elle-même *variable*, la formule

$$p = Ql$$

reste toujours valable.

Il y a lieu de déterminer p par points, compte tenu en chacun de ces points de la valeur de Q et de celle de l.

6.43 Courbe funiculaire.— Dans le cas d'une charge répartie, le polygone funiculaire devient une *courbe funiculaire* que nous allons déterminer.

Soit figure 18, une poutre AA chargée par une ligne de charge B' d'ordonnée p variable.

Partageons la poutre AA' en un certain nombre de parties et traçons en chaque point de division les droites d'ordonnées limitées à la ligne de charge. Déterminons les centres de gravité g_1, g_2... des éléments de surface tels que A_1, B_1, B_2, A_2 et appliquons en ces points les forces F_1, F_2, F_3... égales aux charges des diverses parties de la poutre.

La résultante des forces, égale à la charge totale, passe par le centre de gravité G de la surface des charges (dont la position est indépendante du nombre des divisions).

Construisons un dynamique des forces et le funiculaire correspondant.

Si nous augmentons le nombre de divisions, le rayon polaire 1-P reste le même et la résultante des forces passant par G, ceci entraîne la constance de 6-P (puisque la ligne d'action de la résultante est déterminée par l'intersection de 1-P et de 6-P).

A la limite, lorsque le nombre de divisions est infiniment grand, le polygone funiculaire sera devenu une *courbe funiculaire* qui sera par conséquent tangente en a et a' aux rayons polaires 1-P et 6-P.

On démontrerait de la même manière que les côtés du polygone funi-

culaire sont tangents à la courbe aux points a_1, a_2, *situés sur les verticales des limites de division*, c'est-à-dire des points A_1, A_2... Il est donc possible de construire la courbe funiculaire avec une bonne précision.

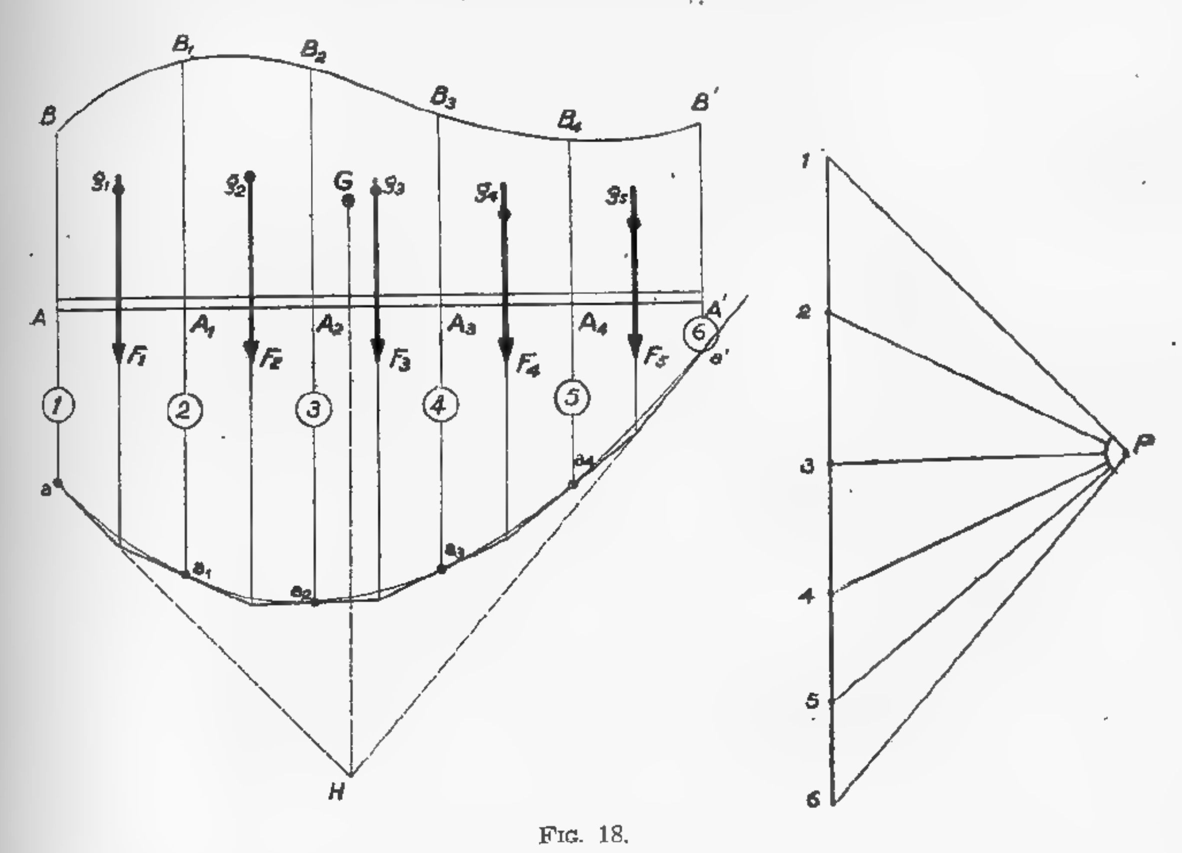


Fig. 18.

Remarque. — Lorsque p est constant, la courbe funiculaire est une *parabole* ainsi que nous l'établirons ultérieurement.

6.44 **Moments fléchissants.** — Les moments fléchissants s'obtiennent en partant de la courbe funiculaire d'une façon identique à la méthode exposée au paragraphe précédent.

Il est recommandé de redresser d'abord le polygone funiculaire et de ne tracer la courbe inscrite que sur ce polygone redressé.

6.45 **Application numérique.** — Nous donnons, **Planche 7**, une application numérique concernant le calcul des moments fléchissants agissant sur l'élément longitudinal d'un *gouvernail de direction* reposant sur deux articulations.

Ce gouvernail est chargé aérodynamiquement par deux charges réparties a et a' et reçoit, en plus, une charge concentrée au niveau de la commande de braquage. Voir indications sur **Planche 7**.

7. DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES MOMENTS D'INERTIE DES SURFACES PLANES

Nous donnons ci-après deux méthodes classiques de calculs graphiques des moments d'inertie des surfaces planes.

Ces méthodes sont complétées chacune par une application numérique.

7.1 PREMIÈRE MÉTHODE : MÉTHODE DU DOUBLE DYNAMIQUE ET FUNICULAIRE.

7.11 Théorie de la méthode, échelles. — Soit à rechercher le moment d'inertie, par rapport à l'axe ZZ′, de la surface S représentée figure 19. Cette surface est tracée à l'échelle des longueurs e c'est-à-dire que 1 mm de tracé = e mm réels.

Considérons un élément de surface s, dont le centre de gravité g est situé à une distance x de ZZ′ et supposons concentrée en g une force proportionnelle à s et parallèle à ZZ′.

Représentons cette force par le vecteur $\overrightarrow{ab}$ à une certaine échelle des surfaces :

$$1 \text{ mm} = e' \text{ mm}^2.$$

Prenons un pôle quelconque P avec une distance polaire y et à partir de la ligne d'application de s, traçons un funiculaire dont les côtés extrêmes déterminent le segment $\overline{cd}$ sur ZZ′. Nous savons (§ 4.1) que $\overline{cd}$ représente le moment de s par rapport à ZZ′ (moment statique de la surface s). On a

$$\text{Moment statique} = s \cdot x = \overline{cd} \cdot e \cdot e' \cdot y \qquad (1)$$

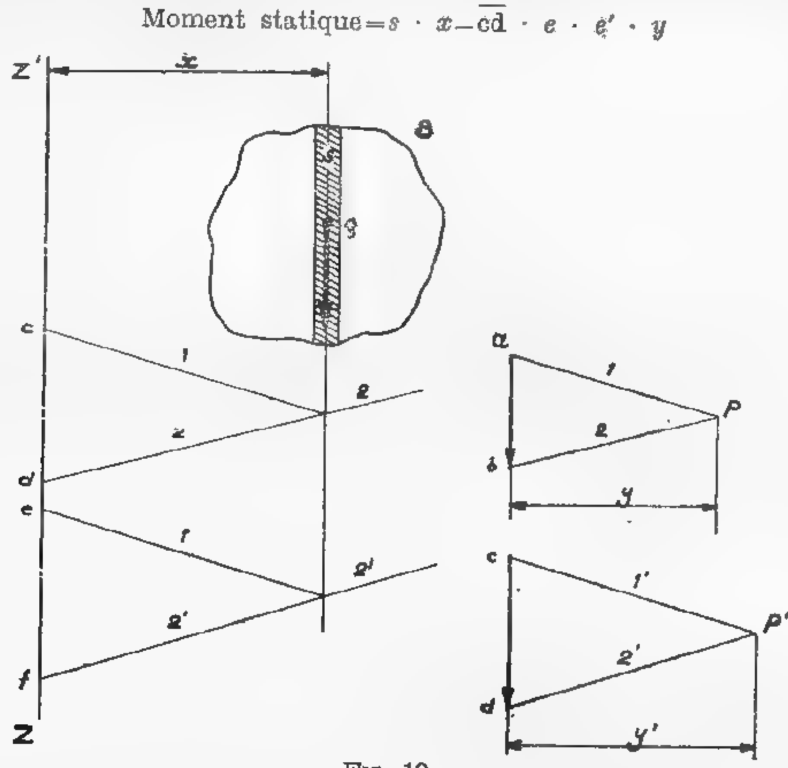


FIG. 19.

Traçons un deuxième dynamique, avec comme force, le segment $\overline{cd}$ et comme distance polaire y'. Traçons un deuxième funiculaire qui intercepte le segment $\overline{ef}$ sur l'axe ZZ′.

Ce segment figure, à une échelle près, le moment de $\overline{cd}$ par rapport à ZZ′, c'est à dire

$$s \cdot x \cdot x = s \cdot x^2.$$

Or, ce produit n'est autre que le *moment d'inertie i de l'élément de surface s par rapport à ZZ′.*

L'échelle figurative de ce moment d'inertie est telle que

$$\text{cd} \cdot x = \text{ef}\; e \cdot y'. \qquad (2)$$

(Nous n'avons plus d'échelle de forces puisque $\overline{cd}$ a été reporté en vraie grandeur.)

Or, d'après la relation (1), on a :

$$\overline{\mathrm{cd}} = \frac{s \cdot x}{e \cdot e' \cdot y}$$

d'où, en portant cette valeur dans (2) :

$$\frac{s \cdot x \cdot x}{e \cdot e' \cdot y} = \overline{\mathrm{ef}} \cdot e \cdot y'$$

soit :

$$\overline{\mathrm{ef}} = \frac{sx^2}{e^2\ e'\ y\ y'} = \frac{i}{e^2 e'\ y\ y'}$$

d'où :

$$i = \overline{\mathrm{ef}}\ (e^2\ e'\ y\ y').$$

Le moment d'inertie i est donc mesuré par le vecteur $\overline{\mathrm{ef}}$ avec une *échelle* égale au produit : *carré de l'échelle des longueurs* × *échelle des surfaces* × *distances polaires des deux dynamiques.*

$$1 \text{ mm du vecteur } \overline{\mathrm{ef}} = e^2\ e' \cdot y \cdot y' \text{ mm}^4.$$

7.12 Application. — Nous donnons **Planche 8** une application de la méthode. Il s'agit de trouver le moment d'inertie de la section figurée, par rapport à l'axe d'inertie vertical passant par le centre de gravité de cette section (axe **ZZ'** à déterminer).

On décompose la section en rectangles dont on calcule la surface et l'on applique aux centres de gravité de ces rectangles des forces proportionnelles à ces surfaces (voir échelle sur Planche).

L'intersection des *côtés extrêmes du premier funiculaire* donne l'axe d'inertie ZZ'. On prolonge chaque côté du polygone funiculaire jusqu'à sa rencontre avec ZZ'. On a ainsi les moments statiques de chacun des éléments de surfaces donnés par les vecteurs interceptés sur ZZ' par les côtés du funiculaire afférents à ces éléments.

Exemple : $\overline{cd}$ = moment statique élément 4-5.

On reporte *à la même échelle* ces moments statiques comme forces du deuxième dynamique et on trace le funiculaire correspondant.

L'intervalle $\overline{\mathrm{AB}}$ figure le moment d'inertie de la partie située à gauche de ZZ' et l'intervalle $\overline{\mathrm{AC}}$ le moment d'inertie de la partie située à droite.

Le moment d'inertie total est donc représenté à l'échelle par la somme des longueurs

$$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}}.$$

Nota. — L'intersection de 1' et 10' donne le lieu vertical du *centre de percussion* de la surface (axe par rapport auquel les moments d'inertie sont égaux de part et d'autre).

7.2 DEUXIÈME MÉTHODE : MÉTHODE DE LA SURFACE DU POLYGONE FUNICULAIRE.

7.21 Théorie de la méthode (fig. 20). — Soit à chercher le moment d'inertie de la surface S par rapport à ZZ'. On décompose en éléments étroits parallèles à ZZ' on construit le dynamique des surfaces partielles s_1, s_2... s_4 avec une distance polaire quelconque y et une échelle des surfaces telle que

$$1 \text{ mm} = e' \text{ mm}^2.$$

On construit le polygone funiculaire correspondant.

Considérons le triangle abc formé par les côtés correspondant à s_2 et l'axe ZZ'.

Soit d la distance réelle du c. de g. de s_2 à ZZ'. La surface du triangle abc vaut (à l'échelle du dessin)

$$\overline{\text{ab}}\ \frac{d}{2}$$

soit :

$$\overline{\text{ab}}\ \frac{d \cdot e}{2} \text{ réellement}$$

(échelle des longueurs : 1 mm $= e$ mm).

Le vecteur $\overline{\text{ab}}$ représente le moment statique de s_2 par rapport à ZZ'. Moment statique de $s_2 = s_2 \cdot d = \overline{\text{ab}}\ e \cdot e' \cdot y$ (voir § précédent), soit

$$\overline{\text{ab}} = \frac{s_2 \cdot d}{e \cdot e' \cdot y}$$

La surface abc vaut donc (sur le dessin) :

$$\frac{s_2 \cdot d^2}{2\ e^2 \cdot e' \cdot y} = \frac{\text{Mt d' inertie de } s_2 \text{ par rap. à ZZ'.}}{2\ e^2 \cdot e' \cdot y}$$

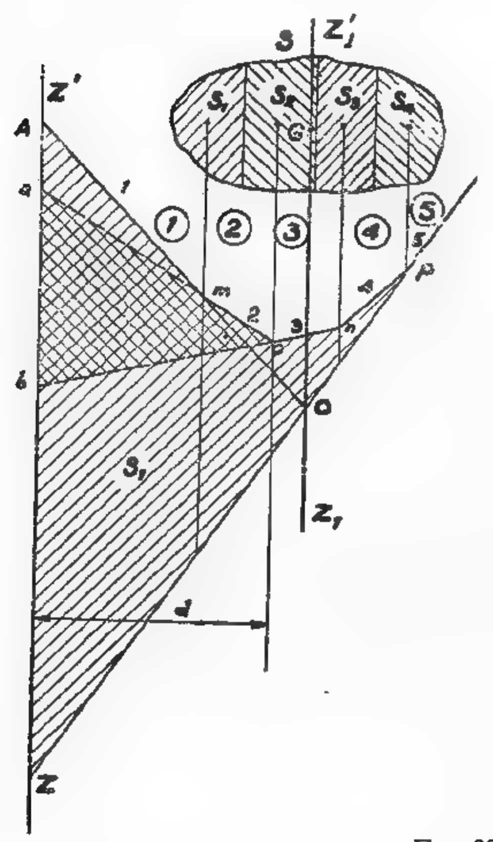


Fig. 20.

En considérant, de même, les triangles afférents aux surfaces partielles voisines, on voit que *le moment d'inertie total est donné, à une échelle près, par la surface* S_1 *hachurée sur la figure.*

En particulier, quand l'axe de mesure est celui passant par le centre de gravité (axe $Z_1Z'_1$ sur la figure) le moment d'inertie $I_{Z_1Z'_1}$ est donné par *l'aire comprise entre le polygone funiculaire et les côtés extrêmes* (à l'échelle : 1 mm^2 = 2 $e^2 \cdot e' \cdot y$ mm^4).

7.22 Simplification d'échelle. — En prenant comme distance polaire y, la moitié de la longueur de la droite des vecteurs-forces, c'est-à-dire

$$y = \frac{\overline{NM}}{2} = \frac{S}{2\,e'}$$

l'échelle se simplifie et on obtient :

Echelle des moments d'inertie

$$1\ \text{mm}^2 = 2\,e^2 \cdot e' \cdot \frac{S}{2\,e'} = e^2 \cdot S.$$

RÈGLE. — *En prenant pour distance polaire la moitié de la surface considérée* (à l'échelle des surfaces) *le moment d'inertie est donc donné par le produit des deux surfaces* $S \cdot S_1$ *amplifié dans le rapport du carré de l'échelle du dessin :*

$$I_{zz'} = S_1 \cdot S \cdot e^2$$

avec S_1 = surface du polygone funiculaire (échelle dessin) ; S = surface réelle de la section envisagée et e=échelle du dessin.

7.23 Application. — Nous donnons **Planche 9** une application de cette méthode à la section composée envisagée précédemment pour la méthode I (Planche 8).

7.3 REMARQUE AU SUJET DES DEUX MÉTHODES GRAPHIQUES PRÉCÉDENTES.

Les deux méthodes ci-dessus donnent une *somme de produits* sd^2. Pour que cette somme figure exactement le moment d'inertie de la surface, il faudrait que le nombre de surfaces élémentaires s soit infini (voir chap. II, § **8.11**).

En d'autres termes, il faudrait que *l'inertie propre de chaque élément* de décomposition *soit négligeable*. On a donc, théoriquement, intérêt à fragmenter la surface en un très grand nombre d'éléments. Pratiquement, il est plus simple et aussi précis d'ajouter au résultat trouvé la *somme des inerties propres* de tous les éléments considérés par rapport à des axes parallèles à l'axe général de mesure et passant par les centres de gravité propres de ces éléments (voir chapitre II, § **8.9**).

8. INTÉGRATION GRAPHIQUE DES FONCTIONS

Soit une fonction $y' = f'(x)$ dont la *courbe représentative* est tracée figure **21** (courbe AB). Il s'agit de déterminer la *courbe primitive* de cette fonction, c'est-à-dire la courbe $y = f(x)$ dont y' soit la *dérivée*.

Nous avons vu au chapitre I, paragraphe **5.3**, que l'accroissement de y dans un intervalle Δx s'obtenait en planimétrant la surface délimitée par y', l'axe des abscisses et les ordonnées correspondant à Δx. Nous donnons ci-dessous une méthode plus rapide.

Divisons les abscisses en petits intervalles Δx, projetons les valeurs correspondantes de y' sur l'axe des ordonnées et traçons une figure polaire issue d'un pôle P situé sur le prolongement de Ox à une distance quelconque d de Oy.

D'une origine quelconque K sur Oy, traçons un polygone funiculaire, *dont les côtés sont limités aux milieux des intervalles* Δx (voir numérotation des régions). Considérons l'accroissement rm du funiculaire dans la région (3), par exemple.

Les triangles semblables rnm et POa′ donnent :

$$\frac{nm}{O\ a'} = \frac{rn}{OP} = \frac{\Delta x}{d}$$

Or Oa′ = $\overline{ca}$ = valeur moyenne de y' dans l'intervalle considéré, donc :

$$\overline{nm} = (y' \cdot \Delta x)\ \frac{1}{d}$$

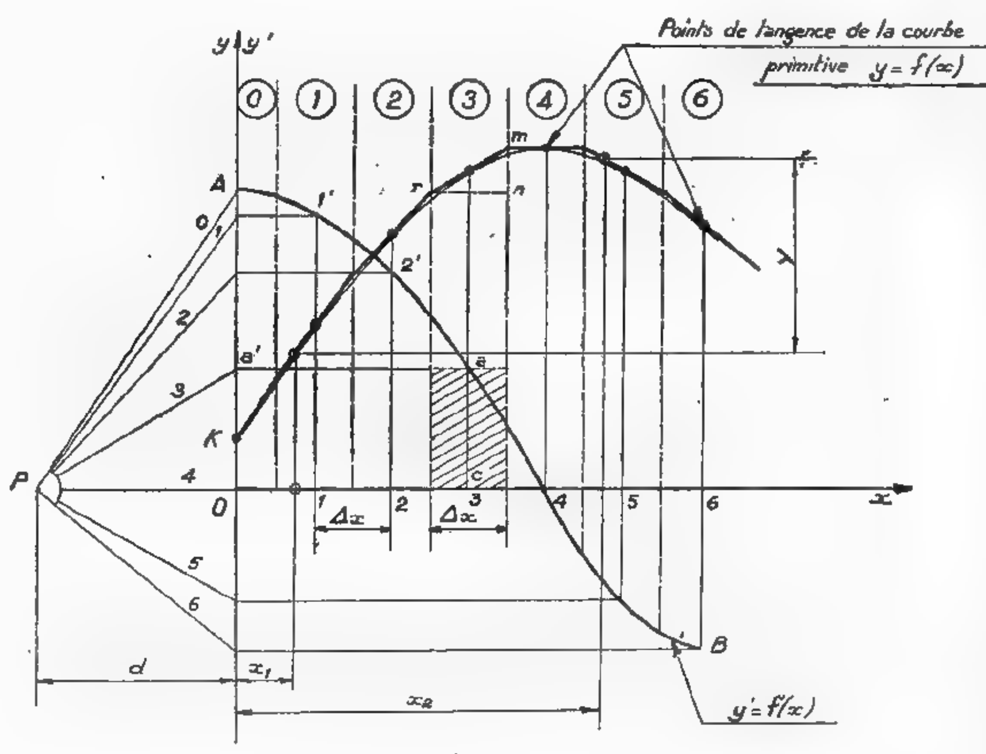


FIG. 21.

On voit donc que le polygone funiculaire répond à la propriété de la courbe primitive dont il donne le polygone circonscrit à une échelle égale à celle de y' multipliée par d et par l'échelle des abscisses (voir ci-dessous).

Les *valeurs exactes* de y sont obtenues sur les verticales des points 1, 2, 3... 6. On a, pour l'exemple choisi, sept points et sept tangentes pour tracer la courbe y (analogie avec les courbes funiculaires de charges réparties du paragraphe **6.43** ci-dessus).

Les propriétés de y', par rapport à y se vérifient bien par l'allure des deux courbes (voir chapitre I, § **4.2**).

La valeur de *l'intégrale définie* : $Y = \int_{x_1}^{x_2} y'\, dx$ est donnée par la différence des ordonnées de la courbe y entre les deux abscisses x_1 et x_2 (à l'échelle indiquée ci-dessous).

Echelles. — Si la courbe y' a été tracée à des échelles telles que :

1 mm des ordonnées $= n$ unités de la fonction y',
1 mm des abscisses $= n'$ unités de la variable x,

la courbe y et les intégrales définies Y seront à une échelle telle que :

1 mm des ordonnées $= n \cdot n' \cdot d$ unités de la fonction y.

DEUXIÈME PARTIE

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX GÉNÉRALE

Nous avons groupé, dans cette deuxième partie, onze chapitres traitant des problèmes courants de la résistance des matériaux, dite « générale » ou « élémentaire ».

Nous avons, autant que possible, orienté leur exposé et leurs applications vers un but d'utilisation directe en construction aéronautique.

Cette considération nous a conduit à développer, plus spécialement, les problèmes relatifs à la flexion et à la torsion des éléments minces. Ces connaissances préliminaires particulières permettront un exposé plus rationnel de la quatrième partie de cet ouvrage.

CHAPITRE V

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

Essais Mécaniques des Matériaux

0. INTRODUCTION

Comme toute science physique, la résistance des matériaux est à la fois *expérimentale* et *rationnelle*, c'est-à-dire qu'elle utilise, conjointement à des résultats expérimentaux, des connaissances théoriques qui sont fournies ici notamment, par la mécanique rationnelle et la *théorie de l'élasticité*.

Nous verrons ci-après qu'elle ne constitue pas une science mathématiquement exacte. Elle doit faire appel à quelques *hypothèses fondamentales* dont le but essentiel est de simplifier les théories générales (théorie de l'élasticité en particulier) afin de les rendre directement utilisables dans le domaine industriel.

Le but de la résistance des matériaux est de déterminer la *forme*, les *dimensions* et la *matière* des pièces entrant dans une construction de telle façon que ces pièces résistent aux efforts qui leur sont appliqués. Cette notion de *résistance* implique non seulement que les pièces étudiées *ne se rompent pas*, mais aussi qu'elles n'atteignent pas des *déformations prohibitives*.

C'est pourquoi l'étude de la *résistance* proprement dite sera toujours menée de pair avec celle des *déformations*.

En *construction aéronautique*, la résistance des matériaux joue un rôle d'autant plus important qu'il s'agit de construire *léger* pour des *nécessités vitales* (telles que possibilité d'envol et de transport de charge utile) et non plus seulement pour de simples considérations d'économie de matière. Nous verrons que, par surcroît, les éléments d'un avion peuvent être soumis à des *coefficients de charge* considérables, ce qui accroît la nécessité d'un calcul aussi exact que possible de la résistance de ces éléments.

Cette notion de *légèreté* impliquera celle d'*homogénéité* entre les différents éléments d'une structure ou plus simplement entre les différentes sections d'un même élément. On dit que ces éléments devront être *d'égale résistance*.

Remarques. — *a*) Les coefficients de charge dont il est question ci-dessus seront, en général, inclus dans un *coefficient de calcul* qui tiendra compte également d'un certain *coefficient de sécurité* dont nous verrons plus loin la nécessité.

b) Les calculs de résistance sont fréquemment vérifiés par des *essais statiques* poussés généralement jusqu'à la rupture des éléments essayés ; mais il convient de remarquer que de tels essais donnent, en général, des rensei-

gnements assez imprécis sur *l'homogénéité* des structures qui reste un facteur déterminé essentiellement par les calculs.

1. EFFORTS INTERNES APPLIQUÉS AUX SECTIONS

1.0 POSITION DU PROBLÈME.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici (notamment au chapitre III) que de l'*équilibre externe* des éléments étudiés qui ont toujours été supposés *indéformables*. Nous étudierons maintenant ce qui se passe à l'*intérieur* de ces éléments en équilibre externe et ceci en y effectuant des *sections*, c'est-à-dire des *coupures fictives*.

1.1 DÉFINITION DES EFFORTS INERNES.

Considérons un corps quelconque en équilibre externe sous l'action d'un système de forces F_1, F_2, F_3... (fig. 1). Supposons une section plane S quelconque qui sépare ce corps en une partie droite et une partie gauche. Si l'on veut supprimer, par exemple, la partie gauche, la partie droite ne restera en équilibre que si on lui applique, à travers la section S, un système de forces équivalent aux actions extérieures que subissait la partie gauche.

Ces actions extérieures de gauche se traduisaient par une résultante R_g (*résultante des forces de gauche*). Transportons R_g en un *point caractéristique* de la section S que nous supposerons, par exemple ici, être le centre de gravité G de cette section.

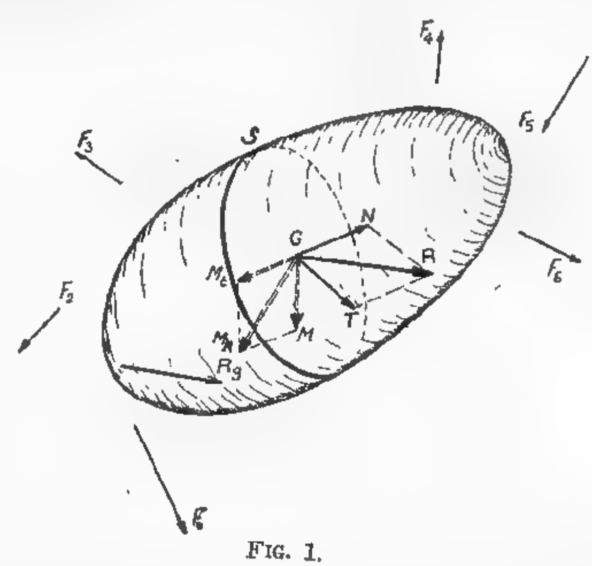


FIG. 1.

Nous obtenons en G une *force* R égale et parallèle à R_g et un *moment de transport* M_R dont le vecteur représentatif est dirigé normalement au plan formé par R_g et le point G (voir chapitre II, § 1.33 et 5).

Décomposons la force R en une composante T contenue dans le plan de la section S et une composante N normale au plan de cette section.

T est l'*effort tranchant*	appliqués à la section S.
N est l'*effort normal*	

On voit que l'effort tranchant tend à produire un *glissement* le long de la section S, de la partie gauche sur la partie droite tandis que l'effort normal tend, selon son sens, à *rapprocher* ou à *séparer* les parties gauche et droite à travers la section S.

Décomposons de même le vecteur-moment M_R en un vecteur M contenu

dans le plan de la section S et en un vecteur M_t normal au plan de cette section.

M est le *moment fléchissant* (ou *moment de flexion*) } appliqués à la section S.
M_t est le *moment de torsion* (ou *moment tordant*) }

Le vecteur moment M, contenu dans la section S, peut être considéré comme le moment d'un couple dont les *composantes* sont *normales* à S et qui vont donc tendre à *raccourcir* ou *allonger* les parties de la pièce sur lesquelles elles sont appliquées.

M_t produit un couple dont les *composantes* seraient *contenues dans la section* S. Il tend à faire *tourner* la section S sur elle-même, c'est-à-dire à faire *glisser par rotation* la partie de gauche sur la partie de droite.

On se rend compte ainsi, dès maintenant, de l'analogie qui existe entre les effets de l'effort tranchant et du moment de torsion qui tendent à faire *glisser*, et entre ceux de l'effort normal et du moment de flexion qui tendent à *allonger* ou à *raccourcir* les éléments du corps.

1.2 REMARQUE TRES IMPORTANTE.

Nous avons conservé la partie de droite et remplacé la partie de gauche par la résultante R_g des forces qui lui sont appliquées. Nous n'avons donc considéré que les forces situées à gauche de la section et ce sont ces forces qui nous ont conduit aux notions de T, N, M_t, M.

Le problème aurait pu être considéré en conservant la partie de gauche. Un raisonnement identique au précédent aurait conduit à considérer la résultante R_d des forces situées à droite de la section. Les résultats auraient été les mêmes que précédemment *au signe près*, la résultante R_d étant, par définition (corps en équilibre) égale et opposée à la résultante R_g.

Ceci conduit aux remarques essentielles suivantes [1] :

— *Pour déterminer les efforts agissant dans une section d'un corps en équilibre, ne considérer que les forces situées d'un même côté de la section envisagée.*

— *En considérant les forces situées de l'autre côté on trouve les mêmes valeurs changées de signe.*

1.3 NOTATIONS, DÉFINITIONS GÉNÉRALES ET SENS POSITIFS.

Nous continuerons, d'une façon générale, à utiliser les notations définies ci-dessus pour les quatre types d'*efforts internes* sollicitant une section d'un système en équilibre, soit :

T = *effort tranchant* = somme des projections sur le plan de la section de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de cette section ;

N = *effort normal* = somme des projections normales au plan de la section de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de cette section ;

M = *moment fléchissant* = somme des moments, par rapport à un axe contenu dans le plan de la section, de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de cette section ;

M_t = *moment de torsion* = somme des moments, par rapport à un axe normal au plan de la section, de toutes les forces extérieures situées d'un même côté de cette section.

Remarques. — *a*) Les définitions précises de M et M_t exigeraient que l'origine de leurs vecteurs (c'est-à-dire de leurs axes de mesure) soit égale-

1. — Nous avions déjà été conduits à constater cette propriété au chap. IV, § 6.0 lors de la détermination graphique des moments fléchissants agissant le long des poutres droites. On se rend compte maintenant, d'une façon plus précise, que ces « moments en un point de la poutre » concernaient, plus exactement, les moments fléchissants agissant sur une section droite de cette poutre passant par le point considéré.

ment précisée. Contentons-nous ici d'assimiler ce point au *centre de gravité* de la section. Nous reviendrons ultérieurement sur cette définition.

b) Toutes les sommes ci-dessus sont évidemment des *sommes algébriques*.

Sens positifs. — On affecte très souvent de sens positifs les quatre efforts définis ci-dessus. Ces sens positifs sont généralement difficiles à observer dans tous les cas et leur considération n'offre qu'un intérêt limité. Aussi, nous contenterons-nous simplement de les préciser dans les cas particuliers où leur emploi sera utile. Il est plus pratique généralement de « réaliser physiquement » le sens des déformations que ces efforts tendent à engendrer.

1.4 CALCUL PRATIQUE DES EFFORTS APPLIQUÉS AUX SECTIONS

On voit, d'après les définitions ci-dessus, que ce calcul revient simplement à des opérations plus ou moins compliquées de *transports de forces et de moments*, telles qu'elles ont été définies au paragraphe **5.** du chapitre II.

Dans le cas général d'efforts orientés d'une façon quelconque par rapport aux sections étudiées, il est avantageux d'utiliser un *système d'axes rectangulaires* (c'est-à-dire de projections) relié directement à ces sections.

Exemple. — Si l'on avait à étudier les efforts internes dans une *section droite* (c'est-à-dire normale à l'axe longitudinal OZ) de la jambe d'atterrisseur envisagée au chapitre II, paragraphe **5.3**, on considérerait des axes parallèles à OX, OY et OZ et passant par le centre de gravité de la section étudiée (voir fig. 22, chap. II).

La composante F_Z donnerait l'*effort normal* N.
La résultante de F_X et F_Y donnerait l'*effort tranchant* T.
Le moment M_Z donnerait le *moment de torsion* M_t.
La composition des moments M_X et M_Y donnerait le *moment de flexion* M.

1.5 COURBES DES EFFORTS APPLIQUÉS LE LONG D'UN ÉLÉMENT.

En envisageant des *sections mobiles* le long de l'élément étudié, on définit ainsi des *courbes* des efforts appliqués à cet élément. C'est ce que nous avons fait, implicitement, au chapitre IV, paragraphe **6.**, lors de la détermination, par la statique graphique, des courbes de moments fléchissants appliqués aux poutres droites.

1.6 APPLICATION NUMÉRIQUE.

Afin de concrétiser au maximum les définitions et règles générales énoncées ci-dessus, nous donnons, **Planche 10**, une application numérique concernant le *calcul des efforts appliqués le long d'un arbre de renvoi de commande de vol* sollicité par un système d'efforts se projetant suivant trois axes (*système à trois dimensions*).

Cet exemple constitue également une application de mise en équilibre extérieur des systèmes à trois dimensions (chap. III).

Pour différencier cette application des précédentes, nous avons effectué tous les calculs *algébriquement*. Le lecteur aura intérêt à répéter ces opérations par la statique graphique (en opérant les tracés dans chaque projection).

Il est évident qu'il suffit, dans cet exemple, d'évaluer les efforts internes au niveau de sections situées à chaque *point d'introduction de force* (points A, B, C et E).

En effet, les charges étant *concentrées*, les variations des efforts sont *linéaires* entre ces charges [1].

---

1. — Il y aurait tout juste lieu, pour une représentation très exacte, de corriger les charges sous les éléments tels que leviers et paliers pour tenir compte de l'effet réel de *répartition* des efforts appliqués. Une telle correction n'est ordinairement pas nécessaire industriellement, d'autant plus que ces parties ne sont pas justiciables de calculs de résistance précis.

Il est essentiel, pour le lecteur, de bien se familiariser (à l'aide de nombreux exemples), avec ces problèmes de recherche d'efforts appliqués le long des éléments. Nous reviendrons, du reste, sur ces calculs, lors de l'étude particulière de la résistance des pièces à chacun de ces efforts (chap. VI à XIII).

2. ÉQUILIBRE INTERNE. CONTRAINTES

2.0 POSITION DU PROBLÈME.

Nous avons défini, ci-dessus, les *efforts internes totaux* appliqués à une section donnée d'un élément en équilibre externe. Nous avons vu que ces efforts se réduisaient, *dans le cas général*, à quatre composantes : T, N, M et M_t que nous savons calculer. Il s'agit, maintenant, de déterminer la façon dont ces efforts seront transmis à l'intérieur de cet élément, c'est-à-dire de rechercher *l'équilibre interne* de chaque section. C'est le problème fondamental de la Résistance des matériaux.

2.1 PRINCIPE DE L'ÉQUILIBRE : COHÉSION.

Reprenons le corps quelconque de la figure 1 séparé en deux parties : droite et gauche par la section S.

On conçoit que ce qui reliait précédemment (avant la coupure) ces deux parties entre elles, c'était la *cohésion* du matériau constituant le corps. Cette cohésion se manifeste physiquement par des forces d'attraction des différentes molécules entre elles (*cohésion moléculaire*) qui existent tant que les efforts appliqués à la section ne deviennent pas prohibitifs (il y a alors *rupture*, c'est-à-dire dépassement de la cohésion moléculaire).

On voit donc ainsi qu'il se produit (avant rupture) un *état d'équilibre interne* entre les forces de cohésion et les forces internes totales agissant sur la section. En d'autres termes, les forces de cohésion sont les multiples composantes (ou équilibrantes) de ces forces internes résultantes.

Considérons la section de coupure S reproduite figure 2 et isolons un élément ΔS de cette section, suffisamment petit pour qu'il ne recueille qu'une seule force de cohésion. Désignons cette force élémentaire par ΔF. C'est donc l'ensemble de ces forces ΔF qui équivaut à la force R et au moment M_a appliqués en G.

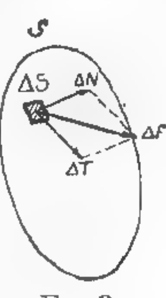


Fig. 2.

2.2 DÉFINITION DES CONTRAINTES.

On désigne par *contrainte moyenne* de l'élément ΔS, le rapport $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ (c'est-à-dire la force de cohésion par unité de surface). Si ΔS devient infiniment petit ce rapport tend vers une limite appelée *contrainte en un point*.

La force ΔF peut se décomposer en : ΔN normal à la section S et ΔT contenu dans la section S.

La contrainte précédemment définie est donc la composition de

$$n = \frac{\Delta N}{\Delta S} \text{ quand } \Delta S \text{ tend vers } 0$$

et de

$$t = \frac{\Delta T}{\Delta S} \text{ quand } \Delta S \text{ tend vers } 0.$$

La contrainte n qui résulte d'une sollicitation normale à S est appelée *contrainte normale* (ou encore contrainte axiale). La contrainte t qui résulte d'une sollicitation tangentielle est appelée *contrainte tangentielle* (ou de cisaillement). La contrainte normale résulte donc d'une tendance à séparer

ou écraser l'élément de section considéré tandis que la contrainte tangentielle résulte d'une tendance à faire glisser cet élément de section sur son vis-à-vis. On conçoit que les contraintes normales résisteront à N et à M tandis que les contraintes tangentielles résisteront essentiellement à T et à M_t.

2.3 DIMENSIONS DES CONTRAINTES. UNITES.

Une contrainte est le quotient d'une force par une surface ; elle est donc de *dimension* $\frac{F}{S}$ analogue à celle d'une *pression.*

Nous utiliserons donc, pour évaluer les contraintes, des *unités de pression.* Dans le système courant que nous employons, ces unités seront, par exemple :

le kg/mm^2 (kilogramme par millimètre carré),
le kg/cm^2 (kilogramme par centimètre carré).

Compte tenu de l'ordre de grandeur des contraintes atteintes pour les matériaux qui nous occupent, nous n'utiliserons, en principe, que le kg/mm^2.

2.4 REMARQUES.

a) Il est tout à fait incorrect de désigner une contrainte par une simple indication de force (contrainte de 20 kg par exemple). Il convient toujours de préciser l'unité de surface à laquelle cette contrainte se rapporte.

b) Les notations adoptées ci-dessus :

t = contrainte tangentielle,
n = contrainte normale,

seront celles que nous continuerons à employer par la suite. Ces notations seront simplement affectées d'un indice propre à chaque cas particulier étudié.

c) La décomposition géométrique ci-dessus, qui a permis de faire apparaître n et t n'autorise pas à *composer* de la même façon ces contraintes, car nous verrons que les matériaux ne réagissent pas de la même manière pour l'une et pour l'autre. Ce problème de composition des contraintes normales et tangentielles sera traité au chapitre XV.

d) Les mots *contrainte, fatigue* ou *tension* sont synonymes. Nous continuerons de préférence à utiliser le premier pour les raisons suivantes :

Le mot « *tension* » implique automatiquement l'idée d'une traction, alors que les contraintes peuvent également agir en compression ou cisaillement.

Le mot « *fatigue* » risque de prêter à confusion avec la « limite de fatigue » (aux efforts alternés) dont nous parlerons plus loin.

2.5 TRAVAIL INTERNE.

Les forces appliquées aux différentes sections d'un élément sont donc équilibrées par des efforts internes qui donnent lieu aux contraintes de cet élément. Ces efforts internes donnent lieu également, comme nous le verrons ci-après, à des *déplacements internes* des éléments sur lesquels ils sont appliqués.

Il y a donc efforts et déplacements d'où *travail* (voir chapitre II, § **1.4**). Ce travail, engendré par l'équilibre statique intérieur lui-même, est appelé *travail interne* ou *énergie interne* ou encore *potentiel interne.* Nous donnerons, dans les chapitres suivants, son expression particulière à chaque cas de sollicitation étudié.

3. HYPOTHÈSES GÉNÉRALES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

3.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Ainsi que nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, la résistance des matériaux repose essentiellement sur la *théorie de l'élasticité*, dont elle constitue une application simplifiée grâce à des *hypothèses particulières*.

Les hypothèses entrant en jeu, dans les théories de la résistance des matériaux, comprendront donc : les hypothèses de la théorie de l'élasticité elle-même et les hypothèses particulières simplificatrices.

3.1 HYPOTHÈSE FONDAMENTALE DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ.

Sous l'action d'un effort, même très faible, un corps quelconque se déforme. Ces déformations peuvent être :

a) soit des *déformations permanentes*, c'est-à-dire qui subsistent entièrement après disparition de l'effort (corps *mous* ou *plastiques*) ;

b) soit des déformations *temporaires* (ou subpermanentes), c'est-à-dire qui disparaissent, soit complètement, soit en partie, au bout d'un temps plus ou moins long après la cessation de l'effort.

La théorie de l'élasticité ne s'occupe, en principe, que d'un cas particulier de ces déformations temporaires : les *déformations élastiques*.

Leur appellation suffit en partie à définir les propriétés de ces déformations élastiques : ce sont des déformations qui disparaissent *entièrement* et dans un *temps très bref* après cessation de l'effort.

La théorie de l'élasticité admet, en supplément, que *ces déformations sont des fonctions bien déterminées des contraintes pour un matériau donné*. Nous verrons que la résistance des matériaux complète encore cette hypothèse.

3.2 HYPOTHÈSES SIMPLIFICATRICES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

Ces hypothèses peuvent être groupées en : hypothèses concernant la structure des corps et hypothèses concernant les déformations de ces corps.

3.21 Hypothèses concernant la structure des corps. — La résistance des matériaux courante ne s'applique qu'aux corps *prismatiques* et *isotropes*.

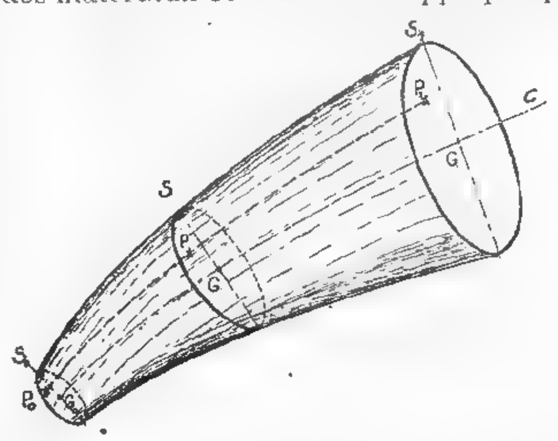


FIG. 3.

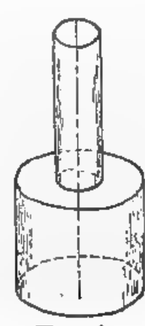


FIG. 4.

3.211 *Corps prismatiques.* — Un corps prismatique est, par définition, engendrée par une surface plane quelconque S (fig. 3) qui est assujettie à se déplacer tout en restant normale à une courbe C *continue* (c'est-à-dire

sans point anguleux) et de *faible courbure*. La surface S peut, de plus, se dilater ou se contracter, *à condition que ces variations soient progressives.*

La courbe C que l'on assimile généralement à la trajectoire des centres de gravité des surfaces est appelée *fibre moyenne* du corps. Un point quelconque P décrit de même une trajectoire P_0 P P_1 appelée *fibre relative au point* P.

Remarque. — Cette notion de fibre est purement théorique (et en désaccord apparent avec la condition d'isotropie énoncée ci-dessous. Il suffit simplement d'assimiler ces fibres à des lieux théoriques qui ne doivent pas être interrompus brutalement le long du corps étudié.

Exemple. — La figure 4 fournit un exemple de pièce non prismatique pour laquelle les formules simplifiées de la résistance des matériaux courante ne sauraient s'appliquer, tout au moins au voisinage immédiat de son changement de forme brutal où les « fibres » se trouvent coupées.

3.212 *Corps isotropes.* — La définition générale des corps isotropes peut ici se simplifier de la façon suivante :

Les corps étudiés doivent avoir les mêmes caractéristiques de résistance dans tous les sens pour un même type de sollicitation.

On assimile, en général, les métaux cristallins à des corps isotropes [1].

Nous verrons que les bois, par exemple, qui sont des corps fibreux (corps orthotropes) ne peuvent être étudiés que moyennant certaines corrections, par les théories de la résistance des matériaux.

3.213 *Poutres prismatiques, plaques.* — La résistance des matériaux s'occupe plus particulièrement d'une catégorie de corps prismatiques appelés *poutres*. On désigne ainsi des corps possédant des *dimensions longitudinales très importantes vis-à-vis de leurs dimensions transversales.*

Nous verrons ultérieurement que si une seule dimension transversale est faible, les corps prennent le nom de *plaques* (ou membranes ou voiles minces). La résistance des matériaux courante ne s'applique, qu'après corrections, à ces catégories de corps.

3.22 Hypothèses concernant les déformations des corps.

3.221 *Hypothèse de Bernoulli ou de la conservation des tranches planes.*

Cette hypothèse, qui constitue une simplification considérable à la théorie générale de l'élasticité, peut s'énoncer ainsi :

Dans un corps prismatique se déformant sous l'action de forces extérieures, une section plane quelconque normale à la fibre moyenne avant déformation reste plane, perpendiculaire à la fibre moyenne et conserve ses dimensions après la déformation du corps.

C'est ce que représente la figure 5 *a* dans le cas d'une pièce fléchie.

La figure 5 *b* représente, par contre, un exemple où l'hypothèse de Bernoulli n'est visiblement pas satisfaite : c'est celui d'une feuille de caoutchouc serrée entre les mors d'un étau et sollicitée en A par un effort de trac-

1. — Les opérations de forgeage ou de laminage apportées à ces matériaux engendrent, cependant, des fibres internes d'orientation bien définie et, par suite, des directions de résistance prépondérantes. On convient, généralement, de leur appliquer encore les théories de la résistance des matériaux, comme si les pièces étaient isotropes, mais il importe, en pratique, de tenir compte de l'orientation de leurs fibres qui doivent être dirigées dans le sens des sollicitations prépondérantes.

tion. Cette feuille se déforme sans que ses sections restent planes et de mêmes dimensions.

Il convient de remarquer, du reste, que l'hypothèse de Bernoulli constitue un « *état idéal* » qui n'est jamais réalisé rigoureusement. Ainsi que nous le verrons au paragraphe suivant, les déformations agissent toujours suivant les trois dimensions des corps, mais les variations des sections droites, dans le cas des matériaux courants, sont généralement suffisamment faibles pour être négligées lors de l'étude des poutres [1].

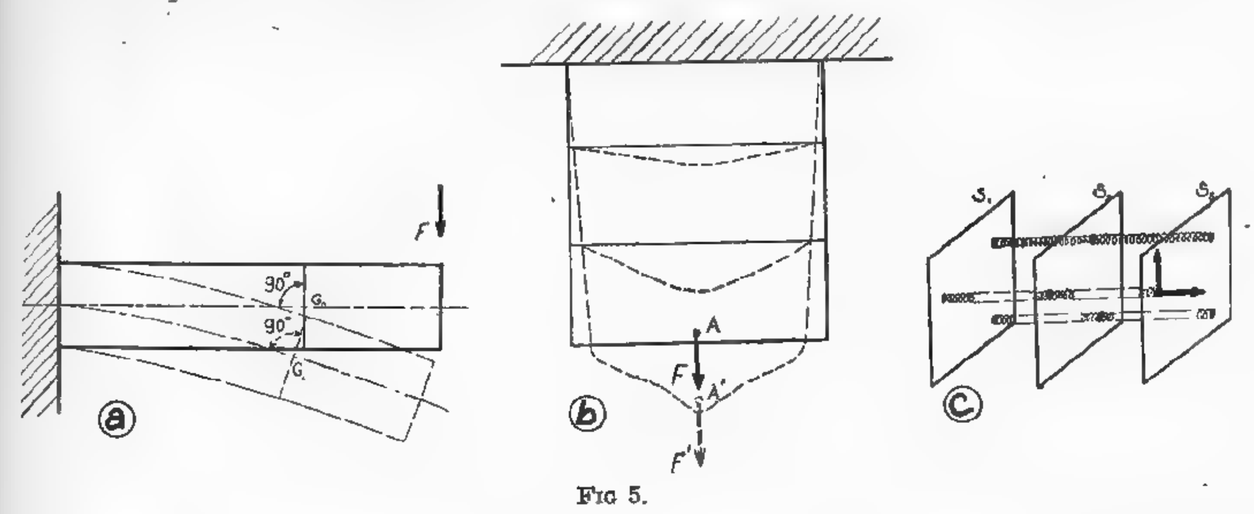


Fig 5.

D'une façon imagée, l'hypothèse de Bernoulli assimile les poutres à une succession de plaques rigides orientées normalement à la fibre moyenne et reliées entre elles par des ressorts s'opposant à des variations de distance et à des glissements entre ces plaques. C'est ce que représente la figure 5 *c*.

Remarque. — C'est cette hypothèse qui conduit à toujours considérer, en résistance des matériaux, des sections normales à la ligne longitudinale moyenne (fibre moyenne) des poutres étudiées. Ces sections sont appelées *sections droites* de ces poutres.

3.222 *Hypothèse de proportionnalité des efforts et déformations : Loi de* Hooke.

Nous avons vu au paragraphe **3.1** que la théorie de l'élasticité admettait une relation déterminée entre les déformations élastiques et les contraintes appliquées à un même corps.

En résistance des matériaux, on admet que cette relation constitue une simple proportionnalité, c'est-à-dire une *loi linéaire*.

Cette hypothèse essentielle est appelée *loi de* Hooke. Nous l'étudions d'une façon détaillée au paragraphe **4.** ci-après.

3.3 APPROXIMATION DE CALCUL.

On admet en général, en résistance des matériaux, que les déformations d'ensemble des corps étudiés sont suffisamment faibles pour être négligées lors de l'évaluation des efforts appliqués aux sections.

On admet, par exemple, dans une pièce fléchie telle que celle de la figure 6 où une section S est venue en S_1 après déformation, que le nouveau

1. — Il ne peut plus en être de même pour l'étude des plaques, comme nous le verrons ultérieurement.

bras de levier d_1 de la force F par rapport à cette section, est égal à son bras de levier primitif d.

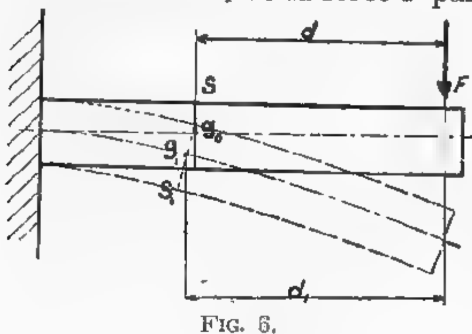


Fig. 6.

Cette approximation est tout à fait raisonnable dans les cas courants étant donnée la faiblesse relative des déformations. Nous rencontrerons cependant quelques cas où cette approximation n'est plus valable (notamment pour les systèmes souples). Il faut alors effectuer des *calculs par approximations successives*.

4. EXPOSÉ IMAGÉ DE LA LOI DE HOOKE MODULE D'ÉLASTICITÉ

4.1 DIAGRAMMES DE TRACTION. LIMITE ÉLASTIQUE.

(Voir ci-après : Essais des métaux.)

Si l'on tire entre les mors d'une machine d'essai une éprouvette prismatique d'un matériau courant, on constate que, sous l'action d'un effort F, la longueur initiale L de l'éprouvette est devenue L'>L d'où un *allongement réel*

$$l = L' - L.$$

Si l'on porte en abscisses les allongements l et en ordonnées les efforts correspondants F on obtient un diagramme ayant généralement l'allure de celui de la figure 7.

Le point le plus caractéristique de ce diagramme est le point A qui délimite une *partie initiale linéaire* OA *d'une partie courbe* AR allant jusqu'à la rupture de l'éprouvette.

C'est ce point A qui caractérise la *limite élastique* du matériau. Dans la partie OA, les allongements sont *élastiques*, c'est-à-dire qu'ils disparaissent lorsque l'on supprime l'effort. Ensuite les allongements sont *permanents*.

Le point A délimite deux domaines du matériau :

le domaine élastique (ou *période élastique*) : partie OA,
le domaine plastique (ou *période plastique*) : partie AR.

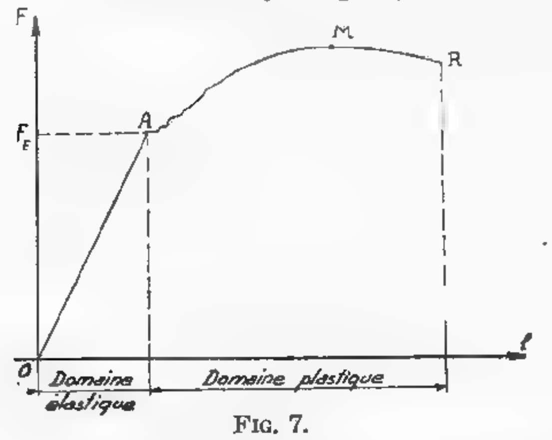


Fig. 7.

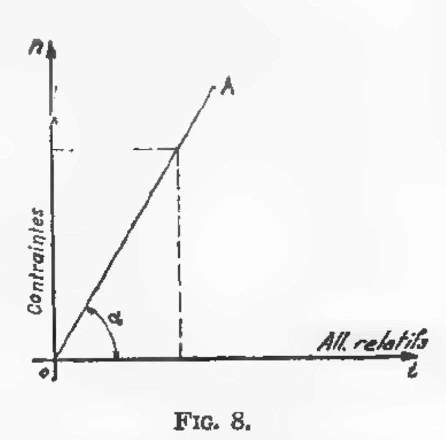


Fig. 8.

Les formules usuelles de la résistance des matériaux s'appliquent à ce premier domaine : domaine élastique, et c'est par convention qu'on les étend jusqu'à la limite de rupture. Les calculs de *déformations*, en particulier, n'ont plus aucune valeur au delà de la limite élastique.

Remarque. — L'allure du diagramme de la figure 7 correspond, en fait, au cas des aciers doux. Pour la plupart des métaux utilisés en construction aéronautique (alliages légers, aciers trempés) le point A se situe de façon beaucoup moins nette et l'allure générale de la courbe est continue. (voir ci-après § 5.15 et chap. XVI § 3.).

4.2 MODULE D'ÉLASTICITÉ LONGITUDINAL.

On constate dans l'essai précédent que, tout au moins dans le domaine élastique, les *allongements* sont, à charge égale, *proportionnels à la longueur initiale* L de la base de mesure et, qu'à allongement égal, les efforts F sont proportionnels aux *sections initiales* S des éprouvettes.

On peut donc transformer la partie OA du diagramme, figure 7 (domaine élastique), selon la représentation de la figure 8.

On porte en abscisses les *allongements proportionnels* (ou relatifs)

$$i = \frac{l}{L} = \frac{L' - L}{L}$$

et en ordonnées les *charges par unité de section initiale*

$$n = \frac{F}{S};$$

i représente donc *l'allongement de l'unité de longueur* et n la *contrainte moyenne* de la section initiale S.

On obtient une *droite* inclinée sur l'axe des abscisses d'un angle α.

On désigne par *module d'élasticité longitudinal* (ou module d'Young), le coefficient angulaire de cette droite :

$$E = tg\,\alpha = \frac{n}{i}.$$

d'où la formule fondamentale exprimée par la *Loi de* Hooke :

$$\boxed{n = E\,i.}$$

« *En période élastique, les contraintes sont proportionnelles aux allongements relatifs, le coefficient de proportionnalité étant le module d'élasticité du matériau* » [1].

Dimension du module d'élasticité. — On voit donc que le module d'élasticité est homogène à une *contrainte*, c'est-à-dire qu'on l'exprime par une *force par unité de surface.*

Exemples : Aciers courants : E = 20000 kg/mm².
Duralumin (AU4G) : E = 7000 kg/mm².

4.3 GENERALISATION DE LA LOI DE HOOKE.

On constate que la loi de Hooke s'applique également dans les essais de *compression.* Pour les matériaux courants, le module d'élasticité en com-

1. — On peut encore définir le module d'élasticité longitudinal par la contrainte (généralement fictive) que subirait un corps pour que sa longueur soit doublée par déformation élastique.

On a en effet :

$$n = E\,i = E\,\frac{L' - L}{L}.$$

Si le corps doublait élastiquement de longueur on aurait L' = 2 L d'où :

$$n = E\,\frac{2\,L - L}{L} = E\,\frac{L}{L} = E.$$

pression est le même qu'en traction. C'est une condition d'*isotropie* du corps (voir ci-dessus).

On constate également que le cisaillement (et la torsion) sont régis par une loi analogue quoique la limite élastique apparaisse souvent d'une façon beaucoup moins nette. Dans un essai de torsion, par exemple, la courbe de l'angle de torsion θ d'un cylindre, en fonction du couple de torsion M_t, affecte l'allure générale donnée figure 9.

D'une façon générale, si l'on désigne par t la *contrainte tangentielle* (voir ci-dessus § **2.2**) et par j *l'angle de glissement* que nous définirons ultérieurement (chapitre VIII), on a :

$$\boxed{t = G\,j.}$$

G est le *module d'élasticité transversal* du matériau (ou module d'élasticité au cisaillement).

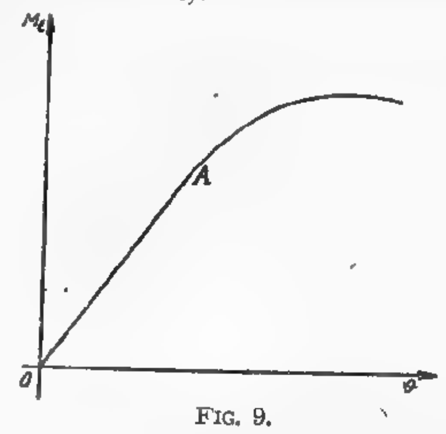


FIG. 9.



FIG. 10.

4.4 RELATION ENTRE E ET G : COEFFICIENT DE POISSON.

On démontre, en élasticité, que G et E sont reliés entre eux par l'expression simple ci-dessous :

$$G = \frac{E}{2\,(1+\sigma)}$$

σ étant un coefficient connu sous le nom de *coefficient de* POISSON. Ce coefficient est le rapport de l'allongement relatif longitudinal i d'un corps à sa contraction relative transversale i' *pendant la période élastique*.

Cette contraction relative a pour valeur

$$i' = \frac{L'_1 - L_1}{L_1}$$

en désignant par (voir fig. 10) :

L_1 la dimension transversale initiale ;

L'_1 la dimension transversale en un instant de la déformation élastique. (Voir notes [1] et [2] ci-dessous.)

1. — Dans un essai de compression on obtient un phénomène analogue : i devient un raccourcissement longitudinal relatif et i' une dilatation transversale relative. Dans un corps isotrope, les coefficients de Poisson de traction et de compression sont égaux.

2. — Cette constatation d'un phénomène de déformation transversale nous éloigne de l'hypothèse simplificatrice de Bernoulli énoncée ci-dessus au paragraphe 3.221. On se rend compte que cette hypothèse ne constitue bien qu'une « convention idéale », ainsi que nous l'avions annoncé. On convient malgré tout, en résistance des matériaux courante pour étudier les *poutres prismatiques*, d'utiliser les valeurs de G et de E définies par la loi de Poisson tout en négligeant le phénomène qui donne lieu à leur relation. Ce phénomène de déformation transversale est souvent appelé « *Effet de Poisson* ». Il n'est plus négligeable pour les éléments minces tels que les *plaques* (Chap. XVII et XIX).

Valeurs de σ et de G. — Pour les *aciers courants* on a :

$$\sigma = 0{,}25$$

d'où

$$G = \frac{E}{2\,(1+0{,}25)} = \frac{E}{2{,}5} = \frac{2}{5}E = 0{,}4\ E$$

soit

$$G = 20000 \cdot 0{,}4 = 8000\ \text{kg/mm}^2.$$

Pour le *duralumin* AU4G et, en général, pour tous les alliages légers à base d'aluminium, on admet généralement :

$$\sigma = 0{,}3$$

d'où

$$G = \frac{E}{2\,(1+0{,}3)} = \frac{E}{2{,}6} = 0{,}385\ E$$

soit

$$G = 7000 \times 0{,}385 = 2700\ \text{kg/mm}^2.$$

4.5 INSTRUMENTS DE MESURE DIRECTE DES CONTRAINTES ELASTIQUES.

La *loi de proportionnalité* existant entre les contraintes et les déformations élastiques des matériaux courants (*Loi de* Hooke) permet la détermination expérimentale directe de ces contraintes à l'aide d'instruments de précision mesurant les *déformations élastiques* correspondantes au cours d'un essai.

Ces instruments sont appelés *tensomètres* (ou *extensomètres*). On distingue deux catégories *principales* de tensomètres. Les *tensomètres mécaniques* et les *tensomètres électriques* [1].

a) Tensomètres mécaniques : Leur principe, très simple, est le suivant :

Deux pointes distantes entre elles d'une certaine *base de mesure* connue (20 mm environ pour les tensomètres Huggenberger qui sont les plus utilisés) sont assujetties à suivre les allongements ou raccourcissements élastiques de l'élément considéré, dans la direction étudiée. Un dispositif amplificateur de grande précision permet la lecture directe de ces déplacements. Par une simple proportion où entre le module d'élasticité du matériau, on obtient les contraintes élastiques correspondantes, soit en *traction* (allongement de la base de mesure), soit en *compression* (raccourcissement de cette base).

b) Tensomètres électriques : Le principe de ces instruments repose sur la variation de résistance électrique d'un fil métallique soumis à un allongement ou raccourcissement.

Cette variation, très faible, est mesurée par un montage électrique amplificateur, et, éventuellement, enregistreur. Le détecteur lui-même se présente sous forme d'un sachet plat ayant à peu près les dimensions d'un timbre-poste, contenant le fil métallique témoin. Ce détecteur est collé sur l'élément étudié dans le sens de l'allongement (ou contrainte) à mesurer [2].

Une boîte réceptrice, reliée par des fils électriques à chacun des détecteurs utilisés centralise, à distance, les indications de chacun d'eux.

---

1. — Il existe également des instruments basés sur une difficulté d'écoulement d'un fluide à travers un orifice étroit dont l'importance varie avec les déformations élastiques du corps étudié (*tensomètre Solex*). Ils ne constituent cependant que des instruments de laboratoire, alors que ceux des deux autres catégories sont utilisés industriellement au cours des *essais statiques*.

2. — Il existe des détecteurs à trois branches (en Y ou Δ) permettant donc la mesure des contraintes dans trois directions connues autour du point étudié.

L'emploi de ces appareils, connus sous le vocable anglais de « *Strain-gauge* » se répand de plus en plus depuis quelques années. Ils présentent, en effet, sur les tensomètres mécaniques, des avantages considérables parmi lesquels nous mentionnerons : sensibilité accrue, possibilité de lecture centralisée et à distance, encombrement très réduit et prix de revient faible des détecteurs eux-mêmes qui demeurent jusqu'à rupture de l'élément d'essai.

5. ESSAIS DES MÉTAUX

5.0 BUT ET CLASSIFICATION.

Les essais des métaux ont pour objet la détermination de leurs caractéristiques de résistance, indispensables à connaître pour leur utilisation rationnelle.

On peut distinguer : les essais mécaniques, les essais ou examens optiques et les essais chimiques.

Nous ne nous occuperons que du premier groupe : les *essais mécaniques* qui sont les plus utilisés industriellement.

Ces essais peuvent être divisés en :

a) *Essais mécaniques courants :* Traction lente, résilience, dureté.

b) *Essais mécaniques spéciaux :* Flexion alternée, usure, pliage, etc...

5.1 ESSAIS DE TRACTION LENTE.

5.11 Principe. — On tire entre les mors d'une *machine d'essai* des *éprouvettes* prélevées sur la pièce ou le lot de pièces à essayer. La vitesse d'écartement des mors de la machine doit être *très faible* d'où le nom de *traction lente* [1].

5.12 Machines d'essai. — Les machines d'essai comprennent :

Des machines à main avec volant et vis sans fin donnant une très grande démultiplication. Ces machines sont généralement dotées d'un dispositif de mesure des efforts genre bascule (machine Falcot).

Des machines à fluide où l'effort moteur est produit, comme dans une presse, par l'action d'un liquide sur un piston. Les plus répandues sont les *Machines Amsler*. Elles permettent généralement les essais en traction et en compression et ont, de plus, l'avantage d'inscrire automatiquement sur un tambour, le *diagramme charge-course*, c'est-à dire la courbe analogue à celle reproduite figure 7.

5.13 Eprouvettes. — On distingue les *éprouvettes cylindriques* qui sont les plus courantes et les *éprouvettes plates* qui servent pour essayer les tôles.

Eprouvettes cylindriques. — Elles affectent la forme générale reproduite figure 11, la partie cylindrique de diamètre d étant calibrée et soigueusement rectifiée.

On marque, avant essai, sur le corps cylindrique de l'éprouvette, deux *repères a* et *b* distants d'une longueur L qui servira de *base de mesure* pour les allongements.

---

1. — On adopte généralement, pour les métaux, une vitesse maximum de l'ordre de deux centimètres par minute.

Le tableau ci-après résume les dimensions des éprouvettes utilisées industriellement. La plus répandue est l'éprouvette de diamètre $d = 13,8$ mm.

DÉSIGNATION	DIAMÈTRE d mm	SECTION S mm²	L mm	D mm
Norme AIR 0810	4	12,56	28,8	33
Eprouvettes ordinaires	13,8 15,96 22,57	150 200 400	100 115 165	130 147 210

On peut remarquer que la longueur L est reliée à la section S par la relation :

$$L = \sqrt{66,67\ S.}$$

Cette relation est nécessaire pour que les *allongements à rupture* soient comparables (voir ci-après).

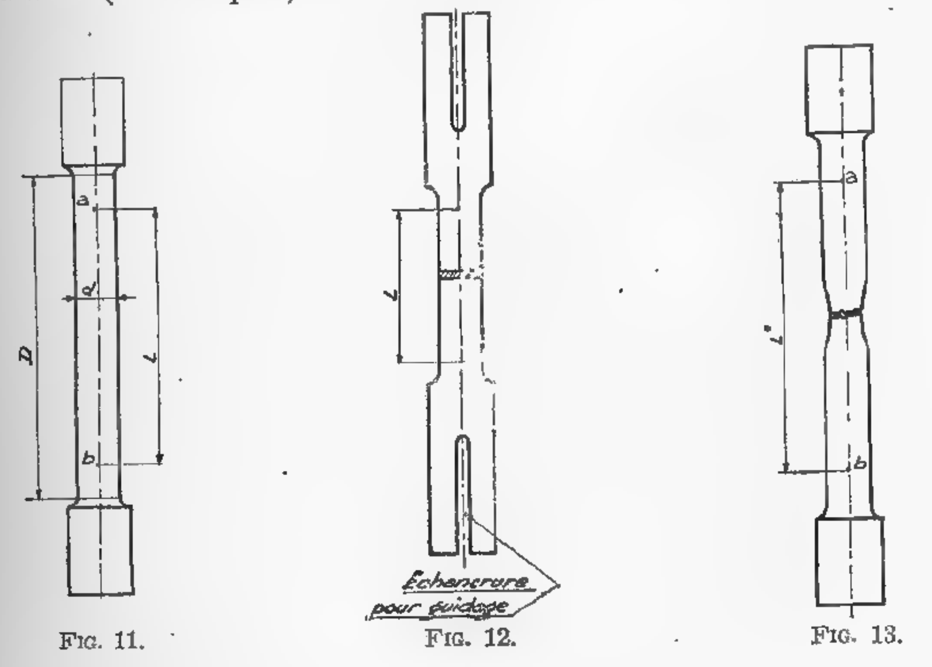


Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.

Eprouvettes plates (essais de tôles). — Elles affectent la forme représentée par la figure 12.

La section et la longueur entre repères doivent également être reliées entre elles par la relation indiquée ci-dessus.

5.14 **Diagrammes d'essais.** – Nous avons déjà décrit au paragraphe 4.1 l'allure générale des diagrammes des allongements en fonction des efforts (voir fig. 7).

5.15 **Limite élastique.** -La charge de limite élastique est théoriquement celle définie par le point A du diagramme, mais par suite de la difficulté rencontrée pour situer exactement ce point, notamment pour les métaux trempés, on convient d'une *limite élastique conventionnelle* définie ci-dessous [1] :

1. — Cette limite conventionnelle est, généralement, celle que l'on considère en résistance des matériaux. Nous verrons cependant ultérieurement que, pour certaines études, il y a lieu de distinguer la *limite de proportionnalité réelle,* de cette limite conventionnelle (voir chap. XVI, § 3).

Cette limite correspond à la charge qui, appliquée pendant 10 secondes, donne un *allongement relatif* permanent égal à 1/500, c'est-à-dire, avec les notations du paragraphe **4.1** :

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{500}.$$

On désigne souvent la contrainte correspondante par la lettre E (ne pas confondre cette valeur avec le module d'élasticité longitudinal du matériau). Pour éviter cette confusion, nous la désignerons par L_E dans les tableaux ci-après.

5.16 **Limite de rupture.** — Elle est donnée par la *charge la plus élevée* atteinte au cours de l'essai (point M, fig. 7). Cette charge est généralement supérieure à celle enregistrée en fin d'essai.

La contrainte correspondante (ramenée à la section initiale S) s'appelle *contrainte de rupture* et se désigne habituellement par la lettre [1] R.

5.17 **Allongement à rupture.** — Après rupture de l'éprouvette, on rapproche les deux parties et l'on mesure la distance existant entre les repères *a* et *b* (fig. 13). En désignant par L′ cette nouvelle distance, initialement égale à L, on appelle *allongement à rupture* le rapport :

$$A\ \% = 100\,\frac{L' - L}{L}.$$

C'est donc l'allongement subi par une longueur de 100 mm de l'éprouvette.

Nous avons déjà dit que pour pouvoir comparer les valeurs de A entre divers essais, les éprouvettes devaient satisfaire à la condition :

$$L = \sqrt{KS} \qquad \text{avec} \qquad K = 66{,}67.$$

Cette valeur de K est celle adoptée en France.

La valeur adoptée pour K est différente dans certains autres pays, notamment en Angleterre, en Amérique et en Allemagne. Un même acier donne donc des valeurs apparentes d'allongement à rupture différentes des valeurs françaises. En particulier, les valeurs américaines sont plus élevées [2].

Les valeurs de A donnent un premier indice de la *fragilité* du métal : les métaux fragiles ont un allongement plus faible. Cette indication est moins formelle que celle donnée par l'essai de résilience (voir plus loin).

5.18 **Striction.** — Au cours de l'essai de traction, quand le métal est entré en période plastique, on observe un étranglement assez local de la section de l'éprouvette. La section initiale S diminue sensiblement sur une certaine longueur. C'est ce qui explique l'allure finale descendante des courbes charges-allongements (voir fig. 7). *En réalité, la contrainte ramenée à la section réelle continue de croître jusqu'à la rupture.*

On désigne par *coefficient de striction* la valeur :

$$\Sigma = 100\,\frac{S - S'}{S}$$

avec : S = section initiale ; S′ = section après rupture.

---

1. — Pour les métaux courants on a généralement $R \leqslant 1{,}5\ L_E$. Pour certains aciers trempés les deux valeurs R et L_E sont très voisines.

2. — Cette variation de A en fonction des dimensions des éprouvettes pourrait, à première vue, sembler en désaccord avec la loi de Hooke. Ne pas oublier que cette loi n'est valable que jusqu'à la limite élastique, et par contre, l'allongement A est mesuré après rupture, c'est-à-dire en fin de la période plastique.

C'est donc la diminution, en pour cent, de la section initiale S. Le coefficient Σ donne un indice caractérisant la *malléabilité à froid* du métal essayé [1].

5.19 **Observation concernant les essais de traction : Ecrouissage.** — Supposons qu'au cours d'un essai de traction on ait dépassé légèrement la limite élastique. Le diagramme est OAD (fig. 14). Si l'on diminue progressivement la charge, la machine trace le graphique rectiligne DO, mettant en évidence l'existence d'un *allongement résiduel* OO_1 pour une charge nulle. En faisant croître à nouveau la charge, on obtient le tracé O_1D. *Tout se passe donc comme si la nouvelle limite élastique était au point D, plus élevé que le point A.* Le nouveau travail élastique, représenté par l'aire O_1DD', est plus important que l'ancien, figuré par l'aire[2] OAA'. Par contre, le travail à absorber avant rupture est plus faible. Le métal est donc devenu *plus résistant*, mais aussi *plus fragile*. On dit qu'il s'est *écroui*. L'écrouissage qui se produit au cours du travail à froid des métaux (pliage, emboutissage) peut souvent devenir un danger. On en supprime les effets par le *recuit*. La *trempe* provoque des modifications du même ordre que l'écrouissage. On en supprime totalement ou partiellement les effets par le *revenu*.

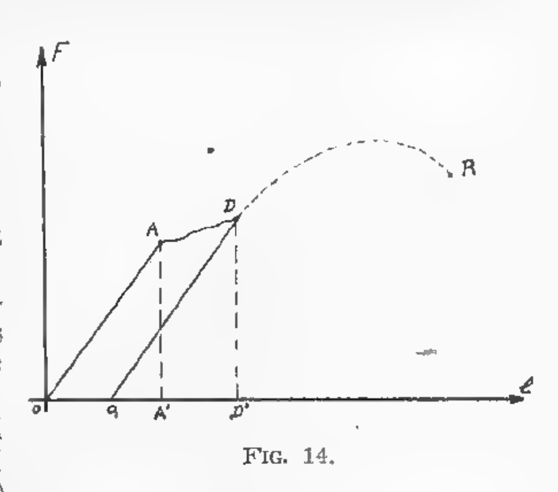


FIG. 14.

5.2 ESSAIS DE FRAGILITÉ OU RÉSILIENCE (RUPTURE AU CHOC).

5.21 **Mode de rupture des métaux.** — On a constaté que la rupture des métaux s'opérait de deux façons différentes :

soit par *glissement* des fibres du métal les unes sur les autres (*cassure fibreuse*) ; c'est généralement le mode de rupture des aciers doux et des alliages légers ;

soit par *éclatement* : rupture brusque, parfois sans déformation appréciable. Ce mode de rupture donne lieu à une *cassure à grains*. Lorsque la structure du métal est extrêmement fine, la cassure est analogue à celle de la porcelaine (cassure des aciers à outils trempés).

Un même métal peut, suivant la façon dont on effectue la rupture, casser par glissement ou par éclatement. Cela peut dépendre de la *forme* de l'éprouvette et de la *brusquerie de l'effort*, mais on constate pour chacun des métaux, suivant leur traitement thermique, une *tendance* à donner l'une ou l'autre cassure. Il est évidemment important d'éviter l'emploi des métaux donnant une cassure brusque, d'où l'idée de mesurer la *fragilité au choc* des métaux.

Influence d'une entaille. — Si l'on essaie à la machine de traction les trois éprouvettes représentées schématiquement figure 15 : l'éprouvette 2 étant identique à l'éprouvette 1 à une entaille près, et l'éprouvette 3 reproduisant la section de l'éprouvette 2 au fond de l'entaille, on obtient :

pour l'éprouvette 1 le diagramme d'allure normale OAR,
2 le diagramme tronqué O A'B,
3 le diagramme d'allure normale OA''R'.

1. — Ne pas confondre le coefficient de striction qui est mesuré après rupture, c'est-à-dire après le domaine plastique, avec le coefficient de Poisson, qui mesure un *phénomène élastique* présentant une certaine analogie.

2. — Travail d'une force se déplaçant sur sa ligne d'action (voir chapitre II, § 6.11).

On voit donc qu'une entaille a pour effet d'avancer considérablement la limite de rupture et surtout de *diminuer énormément le travail absorbé* par l'éprouvette pour se rompre, ce travail étant mesuré par l'aire limitée par le diagramme et la ligne des abscisses.

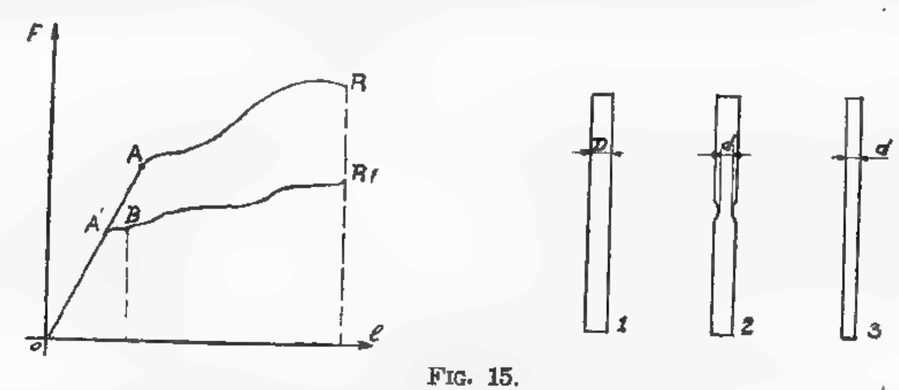


FIG. 15.

Cette propriété caractéristique d'un métal, exprimant sa plus ou moins grande tendance à se rompre sous l'influence d'une entaille, s'appelle la *fissilité* du métal. On la mesure également par l'essai de résilience exposé ci-après.

5.22 **Principe de la méthode d'essai de résilience.** — On brise, par *un seul choc violent*, un *barreau entaillé* prélevé sur le métal à essayer et on mesure le *travail* nécessaire pour produire cette rupture. On rapporte ce travail à l'unité de section du barreau au niveau de l'entaille.

Soit T le travail absorbé en kilogrammètres (kgm) et S la section en mm^2 du barreau au fond de l'entaille, le *coefficient* ou *indice de résilience* est donné par :

$$K=\frac{T}{S}.$$

K est donc mesuré [1] en kilogrammètres par millimètre carré $\left(\frac{kgm}{mm^2}\right)$.

La résilience caractérise la *ténacité* du métal ou, en d'autres termes, son *absence de fragilité* : plus K est grand et plus la fragilité est faible car plus le travail absorbé est grand.

5.23 **Appareils d'essai.** —On peut les diviser en trois groupes. Ils comprennent tous : un mouton, un couteau et un dispositif de mesure de travail.

5.231 *Moutons verticaux* (FRÉMONT, AMSLER). — L'énergie est donnée par un mouton terminé par un couteau, tombant verticalement en chute libre.

Le travail total est égal au produit : poids du mouton par hauteur de chute. Le travail résiduel est mesuré par un dynamomètre ou un dispositif à écrasement taré (crusher). On en déduit par différence le travail utilisé pour produire la rupture du barreau.

La figure 16 représente schématiquement le principe de cette méthode.

5.232 *Moutons rotatifs* (GUILLERY). — L'énergie est donnée par un volant muni d'un couteau éclipsable. On lance le volant à une certaine vitesse

1. — On emploie aussi parfois le symbole ρ pour désigner le coefficient de résilience.

angulaire et on sort le couteau qui vient frapper et briser le barreau (fig. 17).

Un tachymètre (généralement réalisé par une pompe centrifuge agissant

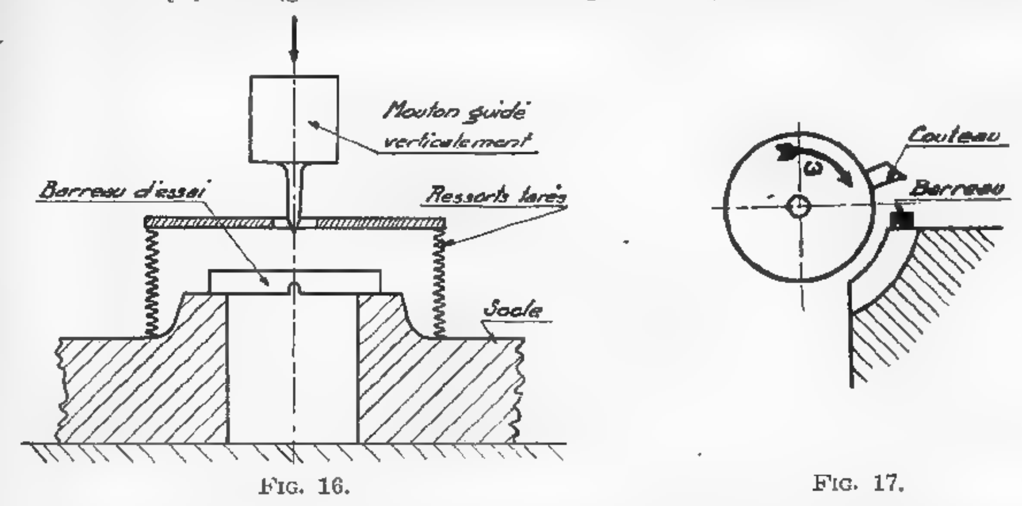


Fig. 16. Fig. 17.

sur une colonne d'eau) mesure la vitesse de rotation immédiatement avant et après la rupture. Connaissant l'inertie du volant, on en déduit le travail absorbé.

5.232 *Moutons pendulaires* (Charpy, Amsler). — Une masse en forme de marteau oscille autour d'un axe.

On la remonte en position haute, on intercale l'éprouvette, en B, sur la trajectoire et on libère la masse (fig. 18).

L'angle de remontée de la masse en arrière de l'éprouvette est inscrit par une aiguille.

On en déduit le travail absorbé pour produire la rupture, par une proportion de la différence des angles de chute et de remontée.

Le dispositif le plus employé et le plus classique est le petit *mouton de* Charpy de 30 kgm.

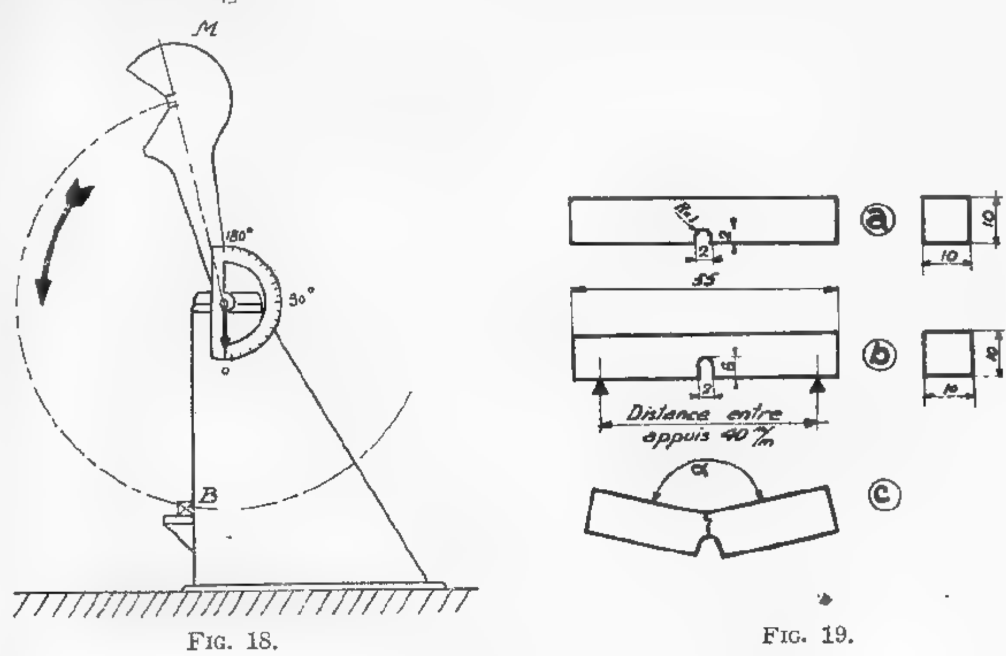


Fig. 18. Fig. 19.

5.24 **Eprouvettes.** — On utilise deux types d'éprouvettes dont les dimensions sont données figure 19 :

figure 19 *a* : éprouvette type Mesnager ;
figure 19 *b* : éprouvette Charpy ou UF (type unifié français).
Cette dernière éprouvette est conforme à la Norme Air 0816.

5.25 **Conditions de comparabilité des essais.** — Pour obtenir des essais comparatifs, il convient d'utiliser toujours le *même type de barreau* et même, de préférence, le même type de mouton.

Sur les tableaux standard de caractéristiques des aciers, on spécifie toujours le type de l'éprouvette :

K M kgm/mm² = résilience Mesnager.
K U F kgm/mm²=résilience U F.

Remarque. — On mesure également après rupture du barreau l'angle α formé en rapprochant les deux morceaux (fig. 19 *c*).

Cet angle donne une indication complémentaire de résilience.

5.3 ESSAI DE DURETÉ.

5.31 **Définition de la dureté.** - La dureté d'un corps est mesurée par la résistance qu'il oppose à un déplacement quelconque de ses molécules *superficielles*.

5.32 **Différentes méthodes de mesure.** — Il existe différentes méthodes de mesure. Nous ne décrirons que les méthodes industrielles qui peuvent être groupées en deux catégories principales.

A. *Méthode de mesure par rebondissement.* — On mesure la hauteur à laquelle rebondit un petit marteau guidé tombant d'une hauteur déterminée sur la face à essayer.

L'appareil, de ce principe, le plus répandu est le *sclérographe* qui se présente sous la forme d'un petit instrument cylindrique de la grosseur d'un stylo.

Les *avantages* de cette méthode sont : le faible encombrement de l'appareil, sa rapidité de mise en œuvre, l'absence de marques sur la pièce d'essai, la possibilité d'opérer sur des pièces à forte température.

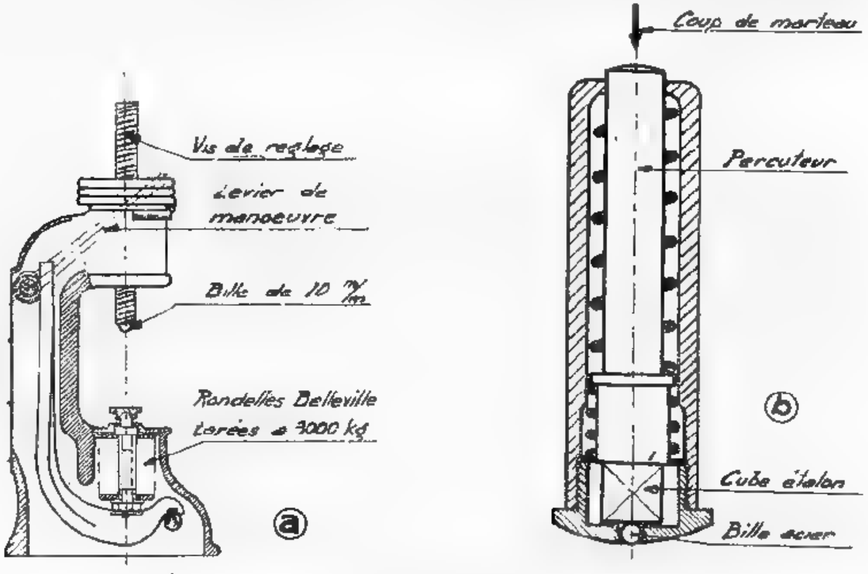


Fig. 20.

Les *inconvénients* sont les risques d'erreur dus aux variations de la verticalité des guides du marteau, du poli de la surface et de la rigidité propre ou de fixation de la pièce à essayer.

B. *Méthodes de mesure par pénétration.* — On mesure l'indice de dureté par la profondeur de pénétration d'un corps dur pressé sur la surface à essayer. On peut distinguer deux variantes :

a) *Pénétration d'un solide de dimensions données sous une pression donnée.*

La pression peut être donnée :

— Soit par une *charge statique* (vitesse négligeable) :

Procédé Brinell : bille sphérique en acier très dur (voir ci-après et fig. 20 *a*).

Procédé Vickers : diamant pyramidal de 136° d'angle au sommet.

— Soit par une *charge dynamique* (choc avec vitesse) : c'est le principe du microbilleur.

b) Mesure par *différence de pénétration* d'un même corps sur la pièce d'essai et un *corps étalon.*

C'est le procédé Rockwell. La figure 20 *b* donne le schéma d'un appareil utilisant ce principe. L'effort donné par un *coup de marteau* est *inconnu* et variable mais on connaît la dureté en comparant les empreintes laissées sur la pièce et le cube-étalon.

5.33 **Dureté Brinell.** — On ramène généralement les indices de dureté donnés par les différents appareils décrits ci-dessus, à un indice commun, le plus utilisé, qui est l'*indice de dureté Brinell.*

Sous la charge connue F, la bille de diamètre D laisse sur la pièce une empreinte de diamètre *d* et de profondeur *h* (voir fig. 21). L'indice de dureté Brinell, désigné par H, est donné par :

$$H = \frac{\text{effort en kg}}{\text{surface empreinte en mm}^2} = \frac{P}{\pi D\, h}$$

La mesure de *d* étant plus aisée que celle de *h* on peut évaluer H en fonction de *d* :

$$H = \frac{P}{\pi D \dfrac{D - \sqrt{D^2 - d^2}}{2}}$$

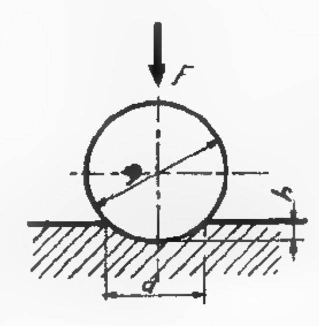


Fig. 21.

Les diamètres D et les charges les plus employées sont :

D = 10 mm	F = 3000 kg
D = 5 mm	F = 1000 kg

La *durée d'application* de la charge doit être de 15 secondes.

5.34 **Tableaux de correspondance.** – Il existe pour chaque type d'appareil des tableaux de correspondance permettant de déduire du paramètre d'essai l'indice de dureté Brinell.

5.35 **Relation entre la durée et la résistance.** – Pour les métaux non cémentés ou à trempe modérée, on a *approximativement* :

$$R = 0{,}35\ H$$

avec R = résistance à la rupture en traction en kg/mm².

5.36 **Avantages de la méthode.** — La mesure de la dureté superficielle présente comme principaux avantages :

l'absence d'éprouvettes (essais sur pièces elles-mêmes) ;

la rapidité de mesure ;

la possibilité d'effectuer des mesures à plusieurs endroits de la pièce.

5.37 Réserves d'utilisation. — Cette méthode ne donne qu'une *approximation.*

Elle ne s'applique pas aux métaux non homogènes et donne des *résultats faussés* par la *trempe* et surtout la *cémentation.*

Pour utiliser le procédé Brinell, il faut meuler la pièce à l'endroit de l'épreuve et éviter d'opérer à faible distance d'un bord ou au niveau d'une section creuse de faible épaisseur.

5.4 ESSAIS DE FLEXION ROTATIVE OU FLEXION ALTERNÉE. LIMITE DE FATIGUE.

5.41 Résistance des métaux à des efforts répétés rapidement. — On a constaté, en soumettant un corps à des efforts se succédant à de courts intervalles, que la rupture se produisait généralement pour des charges nettement *inférieures* à celles que le corps supporterait si ces mêmes charges étaient constantes ou séparées par des intervalles assez longs.

On peut expliquer ce phénomène en supposant qu'entre deux sollicitations, les molécules du corps n'ont pas eu le temps de reprendre leur place primitive, et que les efforts agissent alors sur un corps déjà déformé et, en quelque sorte, *fatigué.*

Ce mode de sollicitation se produisant fréquemment (notamment sur les éléments soumis à des vibrations), il est intéressant de mesurer la résistance des métaux aux efforts alternés.

5.42 Réalisation de l'essai de flexion rotative. — La figure 22 représente le type d'éprouvette conforme à la Norme Air 0830. Cette éprouvette est encastrée dans un mandrin animé d'un mouvement de rotation rapide autour de son axe (vitesse de rotation : 2500 à 3500 tours-minute). Un poids P est suspendu à l'extrémité de l'éprouvette, par l'intermédiaire d'un roulement à billes. Au repos, l'éprouvette se présente donc comme une console encastrée chargée d'une charge verticale P c'est-à-dire dont les fibres supérieures sont tendues et les fibres inférieures comprimées (voir chapitre IX ci-après).

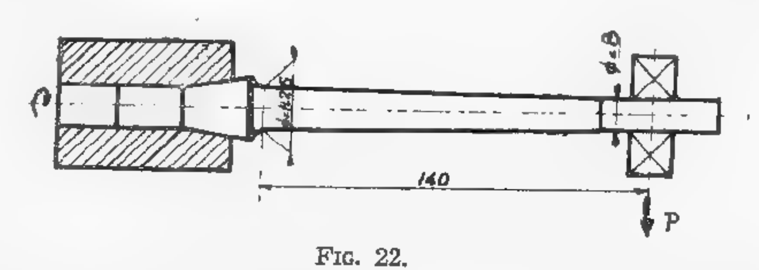


Fig. 22.

En mouvement, la charge P reste verticale, mais les fibres du corps occupent successivement toutes les positions. En particulier une fibre extérieure est soumise dans un même tour aux contraintes maxima de traction et de compression, d'où le nom de *flexion rotative* ou *alternée* donné à cet essai.

Pour différentes charges P, un compte-tours mesure le nombre de tours effectué avant rupture [1].

5.43 Résultats d'essai. — La *limite théorique de fatigue en flexion rotative* pourrait se définir comme la contrainte que pourrait supporter *indéfiniment* sans se rompre l'éprouvette soumise à la flexion rotative.

On voit qu'elle est impossible à mesurer (temps infini).

1. — Les appareils utilisés pour ces essais permettent d'essayer simultanément plusieurs éprouvettes.

On est donc convenu d'une *limite conventionnelle* désignée par le symbole [1] *f*.

Cette limite conventionnelle est la contrainte maximum de flexion que peut supporter l'éprouvette pour que la rupture ait lieu au bout de N alternances (N tours) avec :

N = 100 millions pour les alliages légers, ultra-légers et cuivreux et, N = 30 millions pour les aciers.

La contrainte *f* se calcule par les formules de la flexion plane, compte tenu de l'endroit où s'est produit la rupture.

La norme Air 0830 donne un abaque permettant le calcul rapide de *f*. Elle indique également les diverses précautions à apporter lors de l'usinage des éprouvettes. Le moindre défaut de poli des surfaces a, en effet, une importance considérable pour ces essais.

5.5 ESSAIS D'ENDURANCE (NORME AIR 0830).

Ces essais sont analogues, par leur principe, à ceux de flexion rotative. L'éprouvette (tournée et rectifiée) dont les cotes principales sont données figure 23 est animée d'un mouvement de rotation autour de son axe, cet axe étant incliné d'un angle $\alpha = 11°30'$ sur l'horizontale, ce qui fait que le poids P (monté par roulement et suspension élastique) agit sous ce même angle α par rapport à une normale à l'axe de l'éprouvette. On obtient ainsi une *flexion alternée combinée avec une compression ou une traction.*

On définit, par cet essai, la charge P et la contrainte correspondante que l'éprouvette peut supporter sans se rompre avant 1 million d'alternances. La rupture se produit toujours dans la partie étranglée de l'éprouvette.

Pour les métaux usuels on constate en pratique que, tant que la contrainte résultante maxima (flexion + traction ou compression) ne dépasse pas la contrainte de limite élastique, la contrainte alternée amenant la limite de fatigue demeure constante et égale à la limite *f* trouvée en flexion rotative pure (§ 5.4).

Au contraire, si la contrainte résultante est supérieure à la limite élastique, la contrainte de flexion alternée amenant la limite de fatigue décroît très rapidement.

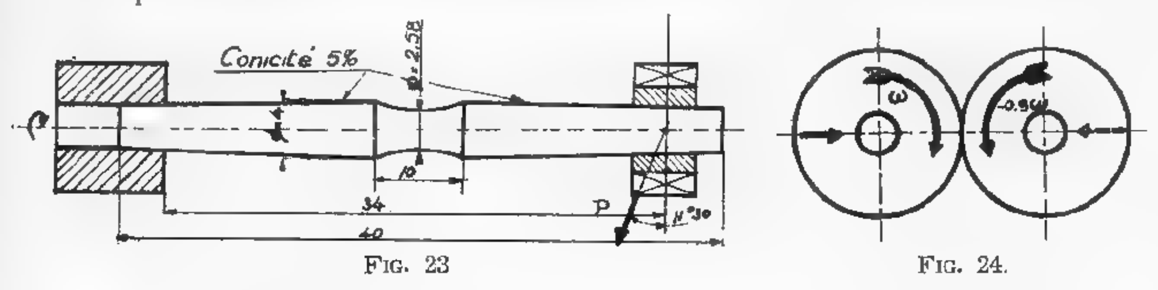


Fig. 23

Fig. 24.

5.6 ESSAIS D'USURE.

Deux rondelles solidaires d'axes parallèles appuient l'une sur l'autre et tournent avec des vitesses de rotation différant de 10 % (fig. 24).

L'une des rondelles est, de plus, animée d'un mouvement alternatif parallèle à l'axe. On peut, à volonté, faire varier la pression d'appui. On mesure exactement le diamètre des rondelles avant et après essai.

Cet essai sert principalement à expérimenter les aciers cémentés notamment en vue de leur utilisation dans la construction d'engrenages.

1. — La limite de fatigue en flexion alternée est parfois désignée simplement par « *fatigue* ». Il importe de ne pas la confondre avec le terme « fatigue » utilisé comme synonyme de « contrainte ».

5.7 ESSAIS DE PLIAGE.

Ces essais consistent à plier sur des cales d'épaisseurs données des éprouvettes plates (tôles, bandes). Il ne doit pas se produire de *criques* (voir Norme Air 0836).

5.8 ESSAIS D'EMBOUTISSAGE.

Ces essais consistent à former dans un élément métallique (tôle ou bande) une calotte sphérique. Cette déformation, obtenue par application d'une charge progressivement croissante (système vis et écrou sollicitant un embout sphérique) est poussé jusqu'à rupture de l'élément (norme Air 0835).

On opère sur des disques de 90 mm de diamètre. On définit ainsi, avec les dimensions propres de l'appareil d'essai, une *charge d'emboutissage.*

5.9 CARACTÉRISTIQUES MÉCANIQUES DES PRINCIPAUX MÉTAUX UTILISÉS EN CONSTRUCTION AÉRONAUTIQUE.

Nous donnons **Planches 11 et 12** des tableaux résumant, avec les notations ci-dessus, les caractéristiques mécaniques essentielles des principaux *aciers et alliages légers utilisés en construction aéronautique.*

Les *symboles* de désignation normalisés indiqués sur ces tableaux ont pour avantage de définir exactement les *qualités* de ces différents alliages, c'est-à-dire le type de leur composition. Leur *état d'utilisation* est défini directement par la caractéristique R de résistance à la traction lente pour les aciers, et en supplément par un *symbole* pour les alliages légers.

Remarque importante concernant les alliages légers de fonderie. — Les caractéristiques de résistance données *Planche* 12 pour les alliages légers de fonderie correspondent à des *lingots-éprouvettes* prélevés dans des jets refroidis de 20 mm. Ces caractéristiques ne constituent, en fait, que des *valeurs d'identification et de contrôle de l'alliage. Les caractéristiques réellement obtenues sur les pièces moulées sont nettement inférieures* et dépendent de la conception et de l'importance de la pièce.

La note STAé. D. M. 520 du 11 janvier 1946, fixe néanmoins les *valeurs minima*, au-dessous desquelles les alliages considérés doivent être considérés comme anormaux et les pièces correspondantes rebutées. Il est prudent de se limiter à ces valeurs inférieures dans l'échantillonnage des pièces [1].

Le tableau ci-dessous fixe ces valeurs minima pour les alliages d'em-

	Désignation normalisée	Caractéristiques d'identification (éprouvettes-lingots)			Caractéristiques minima exigibles sur pièces		
		R	L_E à 1/2000	A %	R′	L'_E	A′%
A base d'aluminium	AU4N (vieilli)	26	19	0,5	24	17	0,5
	AU5GT	32	20	7	25	15	3
	AS9K	24	16	3	20	13	1
	AS10G	24	18	3	20	13	1
A base de magnésium	GA4Z3	17	6,5	5	12	6	2,5
	GA6Z3	16	7,5	3	10,5	7	1,5
	GA9	23	8	7	14	7	4

1. — Il est toutefois possible d'exiger sur « *fiches de fonderie* » des caractéristiques plus élevées notamment en des zones particulières des pièces mais cette exigence doit faire l'objet d'accords particuliers avec les fondeurs.

ploi recommandé par la Note [1] D. M. 520. Nous avons rappelé les caractéristiques R et L_E d'identification (valeurs portées sur la planche 12).

Nous verrons au surplus que, conformément au règlement de calcul des avions (norme 2004 C), les pièces de fonderie doivent comporter des *marges de sécurité particulières* qui obligent à limiter leurs contraintes à des valeurs encore inférieures à celles ci-dessus.

6. ESSAIS DES BOIS

6.1 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

La résistance des bois est beaucoup plus complexe que celle des métaux, du fait même de leur structure fibreuse et hétérogène.

Nous nous limiterons à l'exposé succinct des *essais de réception* des bois, prévus par les *Normes de l'Aéronautique* (normes Air 0610 à 0618).

Ces essais peuvent être groupés en deux catégories principales :

a) Essais en vue de la recherche de *caractéristiques physiques ;*

b) *Essais mécaniques de résistance* proprement dits.

6.2 RECHERCHE DES CARACTÉRISTIQUES PHYSIQUES.

Nous n'en donnerons qu'un exposé très succinct.

6.21 **Détermination de la rétractabilité (norme 0611).** — Cet essai a pour but de mesurer la *variation de volume* d'une éprouvette en fonction de son degré d'humidité.

On détermine la *rétractabilité totale* B % et le *coefficient de rétractabilité* V %.

6.22 **Détermination du degré d'humidité (norme 0612).** — Le degré d'humidité H % correspond au pourcentage de *poids d'eau* contenu dans une éprouvette, ce pourcentage étant évalué par rapport au poids de l'éprouvette à l'état anhydre (absolument sec). On définit ainsi un *degré d'humidité normal* qui est de 15 % et un *« état sec à l'air »* qui correspond à H compris entre 13 et 17 %.

6.23 **Détermination du poids spécifique (norme 0613).** — C'est le poids de l'unité de volume (kg/cm^3).

La Norme donne une formule permettant le calcul du poids spécifique D_{15} dans les conditions normales d'humidité (c'est-à-dire H = 15 %).

6.3 ESSAIS MECANIQUES DE RÉSISTANCE.

6.31 **Essai de compression axiale.** — Cet essai s'effectue sur des éprouvettes parallélépipédiques dont les dimensions sont données figure 25.

On détermine ainsi la *charge de rupture* de l'éprouvette (ou *résistance à la compression axiale*). On ramène cette résistance à celle qui correspond à un degré d'humidité de 15 % (voir norme 0614). On détermine également une *cote statique* et une *cote spécifique* définies par la Norme.

Pratiquement, le chiffre le plus intéressant est la *contrainte de rupture en compression* obtenue en divisant la charge de rupture par la section droite de l'éprouvette (s = 400 mm^2) compte tenu de la correction d'humidité.

Les essais s'effectuent généralement sur des machines spéciales plus sensibles que celles utilisées pour les métaux, par suite de la faiblesse des charges (ordre de grandeur : 1200 à 1500 kg pour le spruce).

1. — Certains de ces alliages ne figurent pas sur le tableau de la Planche 12 qui est de conception antérieure à la note D. M. 520.

La vitesse de compression doit être plus lente que pour les métaux (3 mm par minute environ).

6.32 Essai de flexion statique (norme Air 0615). — Cet essai s'effectue à la machine de compression suivant le schéma de la figure 26 : les réactions

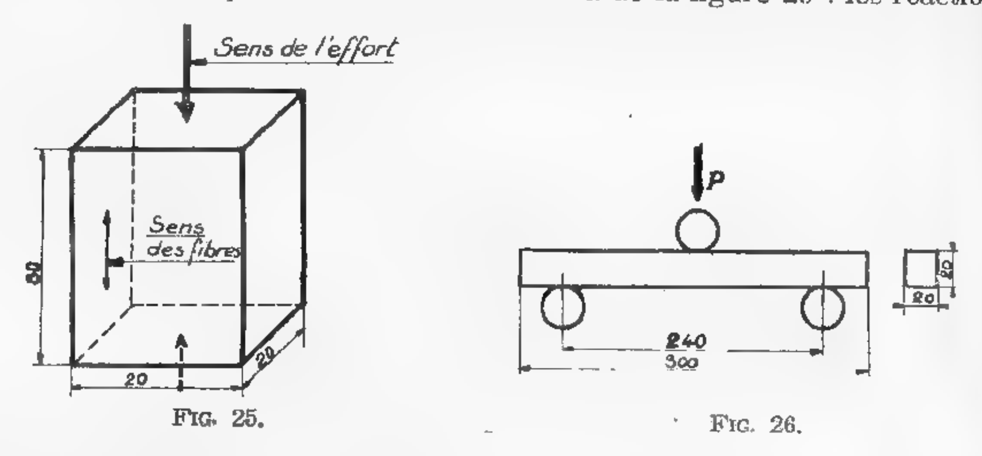


FIG. 25. FIG. 26.

d'appui et la charge P sont appliquées par l'intermédiaire de rouleaux cylindriques de 30 mm de diamètre.

On note la charge de rupture P et on en déduit la *contrainte conventionnelle unitaire à la flexion statique* calculée par une formule de flexion des bois. On corrige ensuite cette contrainte pour la ramener au degré d'humidité nominal de 15 %. On détermine également, par mesure de la flèche, une *cote de raideur* définie par la norme Air 0615.

6.33 Essai de flexion dynamique (norme Air 0616). — C'est un essai analogue à l'essai de résilience des métaux. Il s'effectue au mouton-pendule sur une éprouvette identique à celle des essais de flexion statique, les distances entre appuis et la forme de ces appuis étant les mêmes (fig. 26).

On détermine ainsi la *résilience totale* W (travail de rupture total), le *coefficient de résilience k* et divers autres paramètres définis par la norme.

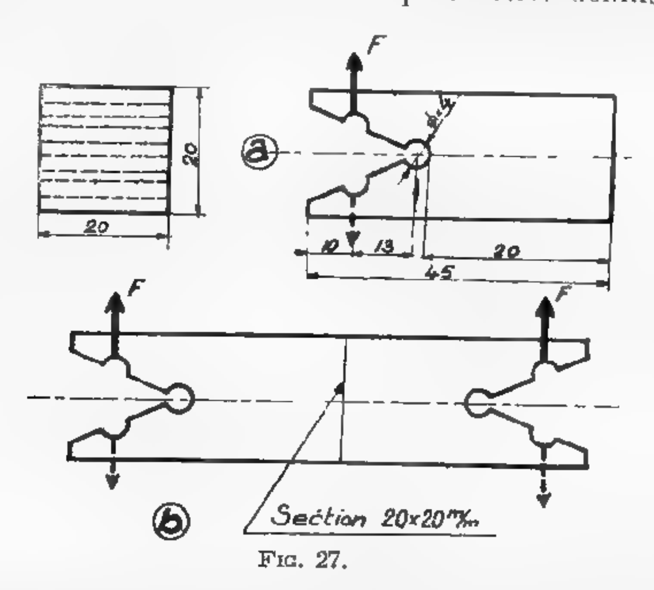


FIG. 27.

6.34 Essai de fendage (norme Air 0617). — Cet essai s'opère sur des éprouvettes découpées suivant figure 27 *a*. On écarte les points A et B à la machine de traction avec des mors spéciaux reprenant les encoches. On détermine ainsi la *résistance au fendage dans le sens radial* et la *cote de fissilité*.

6.35 Essai de traction transversale (norme Air 0618). — Cet essai s'opère sur des éprouvettes découpées suivant figure 27 *b*. On détermine ainsi :

la ***résistance unitaire en traction perpendiculaire,***
la *cote d'adhérence.*

Remarque. — Une valeur très intéressante, pour les calculs de résistance, est la *contrainte de rupture en traction axiale* (dans le sens des fibres). Il n'existe pas d'essai normalisé pour mesurer cette caractéristique. L'essai est très délicat à réaliser, par suite de la tendance des fibres à glisser les unes par rapport aux autres, avant qué la rupture en traction ne se produise. Il faut opérer sur des éprouvettes renforcées aux extrémités et dont la variation de section est très progressive (voir fig. 28). On constate, pour les bois utilisés en aviation (spruce, en particulier), un rapport :

$$\frac{\text{contrainte de rupture en traction}}{\text{contrainte de rupture en compression}} = \text{au moins égal à 2.}$$



Fig. 28.

6.4 CARACTÉRISTIQUES DES BOIS UTILISÉS EN CONSTRUCTION AÉRONAUTIQUE.

Ces caractéristiques seront données au chapitre XII ci-après dont la première partie est consacrée à l'étude des procédés de calculs particuliers aux structures en bois.

CHAPITRE VI

TRACTION ET COMPRESSION SIMPLES

Théorie et Applications

0. INTRODUCTION

La traction et la compression simples constituent les « états de sollicitations » les plus simplifiés de la Résistance des matériaux.

Nous aboutirons donc également aux formules les plus simples. Il convient de signaler que de tels états sont, en toute rigueur, rarement rencontrés en construction. Ils constituent, le plus souvent, des limites théoriques qui demeurent cependant tout à fait acceptables, dans certains cas particuliers, pour des calculs industriels courants.

Nous donnerons aux paragraphes **1** et **2** la théorie sommaire de la traction et de la compression simples. Les paragraphes suivants traiteront de quelques applications classiques dans l'étude des organes de machines et dans la construction aéronautique.

Le chapitre suivant (systèmes articulés) constituera également une application directe de ces théories.

1. THÉORIE DE LA TRACTION OU EXTENSION SIMPLE

1.1 DÉFINITION.

On dit qu'un corps prismatique est soumis à un état de *traction* ou *d'extension simple* quand les efforts qui le sollicitent ne tendent qu'à *allonger* les différentes « fibres longitudinales » constituant ce corps. Il ne doit y avoir aucune tendance au glissement ni à la courbure de ces fibres.

L'exemple le plus simple est fourni par une *barre droite* homogène sollicitée *axialement* par un système de deux forces F et — F se faisant équilibre (fig. 1 *a*). (C'est, par exemple, le cas d'une éprouvette de traction.) L'effort interne total appliqué à une section droite quelconque S de cette barre ne comprend qu'un *effort normal de traction* $N = F$.

Il est facile de se rendre compte qu'il est nécessaire, dans cet exemple, que la barre soit *droite et sollicitée axialement.* La barre cintrée de la figure 1 *b* tendrait à diminuer de courbure et la barre droite sollicitée non axialement de la figure 1 *c* tendrait à prendre une certaine courbure d'équilibre (ces deux phénomènes ayant une tendance commune à aligner la fibre moyenne de la barre sur la direction de l'effort). Ces deux derniers cas ne satisfont donc plus à la définition ci-dessus. Il n'y a plus de traction pure (ou simple). Nous verrons cependant ci-après qu'il peut exister des cas où des

pièces non rectilignes sont soumises à des états de tensions que l'on assimile avec une très bonne approximation à des états de traction simple.

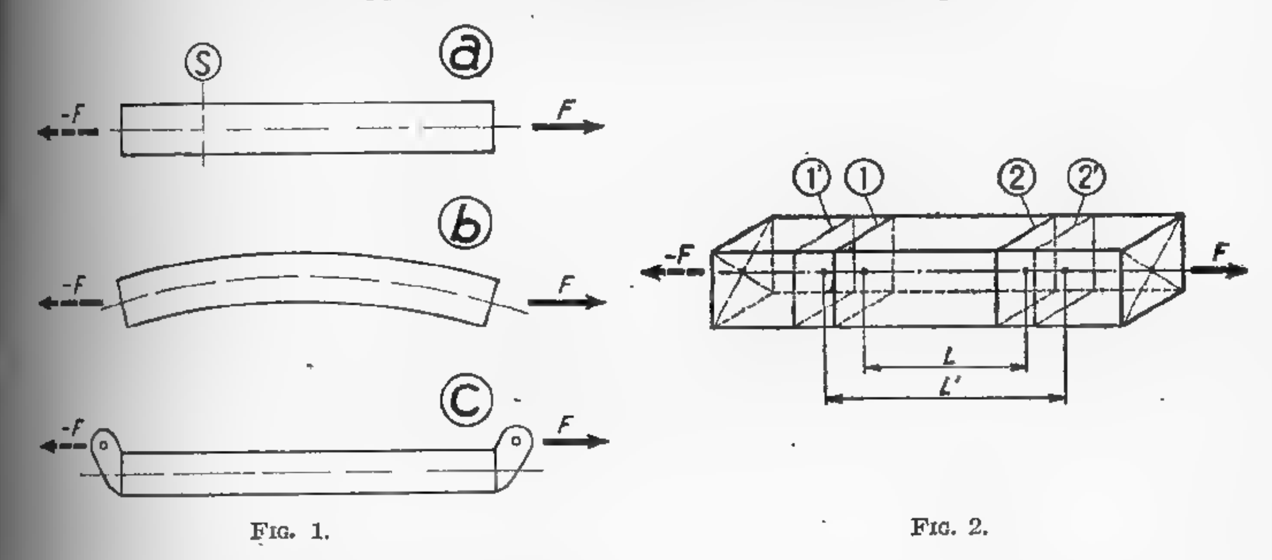


Fig. 1. Fig. 2.

1.2 ÉQUATION DE RÉSISTANCE.

Reprenons (fig. 2) le cas d'une pièce prismatique rectiligne sollicitée axialement par une effort de traction F.

Cet effort de traction est équilibré dans une section droite quelconque de surface S par une série d'*efforts internes* ΔF appliqués aux éléments de surface ΔS constituant cette section et l'on doit avoir (équilibre de projections de forces) :

$$F=\Sigma\Delta F$$

ce qui peut s'écrire :

$$F=\sum\frac{\Delta F}{\Delta S}\cdot\Delta S$$

soit :

$$F=\Sigma n\cdot\Delta S$$

n étant la *contrainte normale de traction en un point* (voir chap. V § **2.2**).

Or, d'après l'hypothèse simplificatrice de Bernoulli (chap. V, § **3.221**) les sections droites sont restées parallèles entre elles. Toutes les « fibres » ont donc subi le même allongement :

$$\Delta L=L'-L$$

en désignant par L la distance initiale et L′ la distance finale entre deux sections droites quelconques 1 et 2 venues en 1′ et 2′ (fig. 2).

Donc, l'allongement relatif $i=\frac{\Delta L}{L}$ est constant en tous les points des sections droites.

Or, d'après la loi de Hooke (chap. V, § **4.2**)

$$n=E\,i$$

E étant constant (corps isotrope), la contrainte n est donc *constante* pour toute la section.

La formule générale d'équilibre donnée ci-dessus se simplifie donc en

$$F=n\,\Sigma\,\Delta S \qquad \text{soit} \qquad F=n\cdot S.$$

On arrive ainsi à *l'équation de résistance de la traction simple* [1] :

$$n = \frac{F}{S}.$$

En désignant par n_a, la *contrainte admissible en traction* du matériau considéré [2], l'équation donnant la section nécessaire correspondante est appelée *équation d'équarissage*, et s'écrit :

$$S = \frac{F}{n_a}.$$

On en déduit directement *l'équation de force admissible :*

$$F_a = n_a \cdot S.$$

1.3 ÉQUATION DE DÉFORMATION.

Elle est donnée directement par la loi de HOOKE :

$$n = E\, i = E\frac{L' - L}{L} = E\,\frac{l}{L}$$

avec :

L : longueur initiale de la pièce tendue considérée,
L' : longueur finale,
l : allongement réel.

D'où l'on tire l'allongement réel :

$$l = \frac{n\,L}{E}$$

et en remplaçant n par la valeur trouvée au paragraphe précédent, il vient

$$l = \frac{FL}{SE}.$$

1.4 TRAVAIL ÉLASTIQUE INTERNE DE TRACTION

Nous avons défini au chapitre V, § 2.5 le travail interne d'un corps.

On appelle *travail élastique* le travail développé par les tensions internes du matériau *pendant la période de déformation élastique.*

Nous avons vu au chapitre II, paragraphe **6.11**, que le travail d'une force se déplaçant suivant sa direction avait pour expression

$$\mathcal{E} = \Sigma\, F\, \Delta L.$$

---

1. — Bien remarquer que la contrainte constante $n = \frac{F}{S}$ n'est obtenue que dans le cas où les hypothèses simplificatrices de la résistance des matériaux sont satisfaites. Nous avons, en effet, fait successivement appel à chacune d'elles pour l'établir.

2. — Les *contraintes admissibles* en traction, n_a, sont évidemment celles qui découlent des essais de traction :

Au « coefficient de calcul à la limite élastique », n_a est égale à la *contrainte de limite élastique* du matériau (valeur L_E des tableaux standard des *Planches* 11 *et* 12 pour les métaux).

Au « coefficient de calcul à rupture », n_a est égale à la *contrainte de rupture* (valeurs R des tableaux standard).

Ces coefficients de calcul utilisés en construction aéronautique seront précisés dans la dernière partie de cet ouvrage.

Nous avons vu également que ce travail était représenté par l'aire délimitée par la courbe des variations de l'intensité de la force en fonction de son déplacement. Or, si nous traçons, dans le cas qui nous occupe, la courbe de F en fonction des allongements (voir fig. 3), nous voyons que pour un allongement nul cette force est nulle : la force croît en même temps qu'elle se déplace.

Le travail développé pour aboutir à un allongement l = OB est donné par l'aire du triangle OAB, soit

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} F\, l$$

et en remplaçant l par la valeur trouvée au paragraphe précédent, il vient :

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{F^2 L}{2\, SE}}$$

expression classique du *travail élastique de traction.*

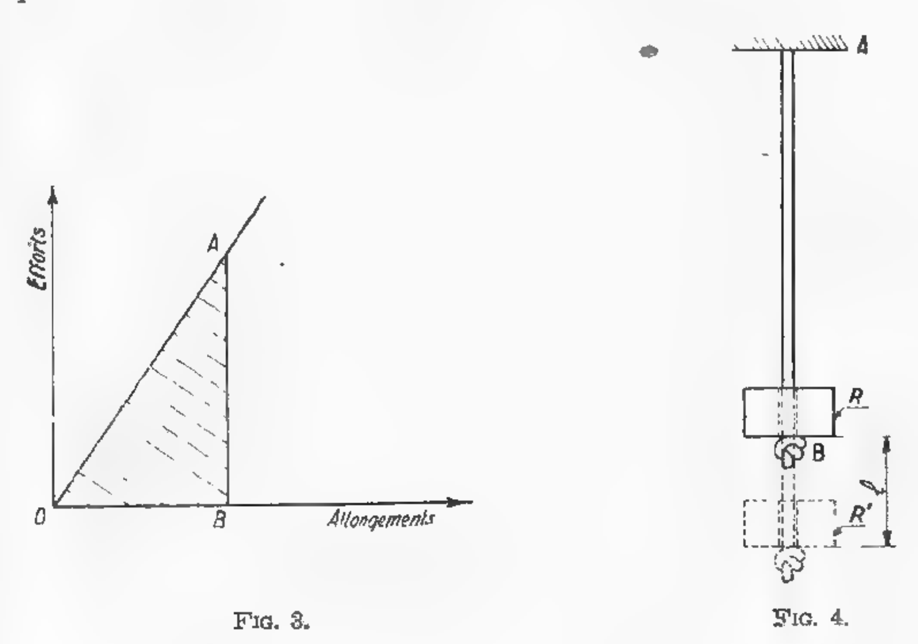


FIG. 3. FIG. 4.

1.5 REMARQUE AU SUJET DES ALLONGEMENTS DYNAMIQUES.

Nous n'avons considéré, pour l'établissement des formules ci-dessus, que des *efforts statiques*, c'est-à-dire appliqués au repos ou très progressivement. Examinons succinctement, par un exemple simple, ce qui se passerait dans le cas d'un effort brutal (ou *dynamique*) c'est-à-dire donnant lieu à un *équilibrage avec mouvement* (équilibrage dynamique). Considérons (fig. 4) une bande de caoutchouc AB maintenue en A et terminée en B par un nœud retenant une rondelle R de poids P qui peut coulisser librement sur la bande AB.

Supposons que la rondelle R soit d'abord supportée immédiatement au contact de B puis lâchée brutalement. Le caoutchouc va s'allonger dynamiquement d'une certaine longueur l (première élongation d'une suite de mouvements alternatifs amortis). Le *travail externe* sera donc pendant ce premier mouvement

$$\mathcal{C}' = Pl$$

et ce travail est égal au *travail élastique interne* qui donne lieu à un effort de traction maximum F tel que :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} F \cdot l = \mathcal{E}'.$$

On en déduit immédiatement en remplaçant $\mathcal{E}$ par sa valeur :

$$P = \frac{1}{2} F$$

soit :

$$F = 2 P.$$

L'effort dynamique est donc, dans ce cas, égal au double de l'effort statique et il en est, par suite, de même de la *contrainte de traction*. Si l'on avait lâché la rondelle R d'une certaine hauteur h au-dessus de B, il aurait fallu équilibrer un travail extérieur accru d'une quantité

$$\mathcal{E}'' = Ph.$$

L'allongement, l'effort et la contrainte dynamique auraient dépassé le double de leurs valeurs statiques.

Il est à remarquer que dans l'un et l'autre cas l'équilibre final (après un certain nombre d'oscillations amorties) s'effectuerait avec un allongement égal à $\frac{l}{2}$ correspondant à un effort de traction F = P (équilibre statique).

Le même phénomène se produit pour un corps moins déformable que le caoutchouc, bien que les déformations soient moins visibles et il existe pour toutes les sollicitations [1].

Le rapport entre la charge dynamique et la charge statique est connu sous le nom de *coefficient de charge*. C'est un des facteurs du *coefficient de calcul* d'un élément.

2. THÉORIE DE LA COMPRESSION SIMPLE

2.1 DÉFINITION.

Cette définition est analogue à celle du paragraphe 1.1 concernant la traction simple : Il suffit d'y remplacer le mot « allonger » par le mot « *raccourcir* ».

Une restriction très importante est cependant à effectuer pour imager le phénomène par l'exemple d'une barre droite soumise à deux charges

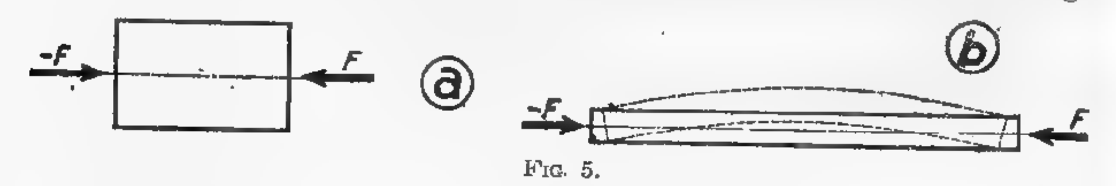


Fig. 5.

axiales égales et opposées (fig. 5 *a*). Il faut, en plus des conditions de la traction, que cette barre soit *courte* et *massive*. Dans le cas contraire, nous verrons au chapitre XVI qu'elle risque de périr par un *phénomène d'instabilité* connu sous le nom de *flambage* (voir fig. 5 *b*). Ce phénomène est évidemment encore facilité par la présence d'une courbure initiale.

1. — L'existence de ces *effets dynamiques* constitue la principale raison pour laquelle on dispose sous les éléments essayés des *vérins de retenue* au cours des différentes mises en charge d'un *essai statique*. Ces vérins sont ensuite desserrés progressivement pour donner lieu à une charge *statique*.

2.2 EQUATIONS.

Les équations s'établissent d'une façon analogue à celles de la traction simple. On arrive à des résultats identiques, soit :

Equation donnant la contrainte : $n = \frac{F}{S}$.

Equation donnant l'allongement : $l = \frac{F\,L}{S\,E}$.

Equation donnant le travail élastique interne : $\mathcal{E} = \frac{F^2\,L}{2\,S\,E}$.

Dans ces équations, F représente cette fois *l'effort normal de compression* appliqué à la section considérée de surface S ; L représente toujours la longueur de base à laquelle se rapportent les allongements, et E le module d'élasticité longitudinal du matériau.

3. APPLICATION AU CALCUL DES ÉLÉMENTS SOUPLES UTILISÉS EN CONSTRUCTION AÉRONAUTIQUE

Nous désignons d'une façon générale par *éléments souples*, les organes présentant une *rigidité négligeable en compression* eu égard à leurs longueurs d'utilisation. Ils comprennent essentiellement les *cordes à piano*, les *haubans* (ronds ou fuselés) et les *câbles* (câbles dits souples ou rigides).

3.1 CORDES A PIANO ET HAUBANS.

Ces éléments étant généralement montés entre articulations ou entre rotules, il est évident qu'ils ne peuvent supporter que des efforts dirigés suivant leurs axes (réactions dirigées) et donc travailler en traction simple, tout au moins en dehors de la proximité immédiate de leurs attaches.

3.11 **Résistance.** — Nous donnons, **Planche 13,** des tableaux résumant les *caractéristiques standard* principales des *cordes à piano* et des *haubans ronds.*

Ces tableaux comportent, en particulier, les *charges de rupture* admises pour ces éléments (à la suite de nombreux essais).

Il est aisé de voir, en leur appliquant la formule de résistance de la traction simple, que les aciers qui les constituent ont toujours une contrainte admissible à rupture :

$$n_a > 150 \text{ kg/mm}^2.$$

Exemples. — *a*) Corde à piano de 2 mm ; S=3,14 mm² ; R=549 kg.

d'où $$n_a = \frac{549}{3,14} = 175 \text{ kg/mm}^2$$

b) Hauban rond de diamètre d=10 mm ; S=78,5 mm².

R=12500 kg.

d'où $$n_a = \frac{12500}{78,5} = 159 \text{ kg/mm}^2.$$

3.12 **Allongements.** — Ils sont donnés par la formule indiquée au paragraphe **1.3** *à condition que la limite d'élasticité ne soit pas dépassée* pour la charge considérée (pour les aciers utilisés ici, la limite élastique est très voisine de la rupture).

On peut adopter un module d'élasticité : E=20000 kg/mm².

Exemple. — Corde à piano de 5 mm et de longueur L=1,200 m supportant une charge F=2000 kg.

Allongement élastique (section de la corde S=19,6 mm²) :

$$l = \frac{F \cdot L}{S \cdot E} = \frac{2000 \cdot 1200}{19{,}6 \cdot 20000} = \frac{2 \cdot 12}{1{,}96 \cdot 2} = 6{,}12 \text{ mm.}$$

Règle pratique. — Il est aisé de voir en faisant $n=20$ kg/mm² et L=1000 mm dans la formule

$$l = \frac{n\,L}{E}$$

que ces éléments s'allongent de 1 mm par mètre de longueur initiale et par 20 kg/mm² de contrainte.

3.2 CABLES SOUPLES ET RIGIDES.

3.21 Constitution. — Les câbles dits « *rigides* » sont constitués par un seul toron composé de fils métalliques (fig. 6 *a*). Le nombre de ces fils est indiqué dans les tableaux correspondants (chaque valeur indiquée correspond au nombre de fils disposés sur une circonférence d'enroulement).

Les câbles dits « *souples* » sont constitués par un assemblage de *torons* autour d'une *âme* centrale elle-même constituée par un toron (fig. 6 *b*).

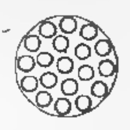






Fig. 6.

Les fils constituant ces câbles peuvent atteindre des résistances à rupture très élevées.

3.22 Résistance à rupture. — Les tableaux standards, *Planche* 13, donnent les chiffres de résistance à rupture admis par le S. T. Aé. pour les câbles de dimensions normalisées.

Il faut surtout bien se garder, en l'absence de ces tableaux, de calculer cette résistance en partant de la section extérieure du câble qui est très supérieure à la section résistante.

Exemple (*Planche 13*). — Câble souple : diamètre extérieur=2 mm. Section extérieure

$$S = 3{,}14 \text{ mm}^2 ;$$

49 fils de 0,22 mm de diamètre.

Section total des fils 1,86 mm².

Charge de rupture R=315 kg.

Contrainte apparente ramenée à la section extérieure :

$$\frac{315}{3{,}14} = 100{,}1 \text{ kg/mm}^2.$$

Contrainte ramenée à la section réelle des fils :

$$\frac{315}{1{,}86} = 169 \text{ kg/mm}^2.$$

3.23 Allongements. — Les allongements des câbles ne doivent se calculer ni avec la section apparente (même raison que ci-dessus), ni même

avec la section de l'ensemble des fils, par suite de la *distorsion* (déroulement des fils ou des torons) qui accompagne l'allongement réel de traction.

Exemple. — Une mesure d'allongements effectuée sur un câble souple du type ci-dessus a donné lieu à des résultats pouvant se traduire par les « *modules d'élasticité apparents* » donnés ci dessous :

Module ramené à la section apparente : 7500 kg/mm².
Module ramené à la section des fils : 2.400 kg/mm².

alors que le module d'élasticité réel des fils est de l'ordre de 20000 kg/mm².

3.24 Câbles d'égale résistance. — Pour les câbles verticaux de grandes longueurs (câbles d'extraction de mines par exemple), le poids propre du câble n'est plus négligeable vis-à-vis de la charge à porter. On constitue alors des câbles de section variable de façon à tendre vers une égale contrainte tout le long de ces câbles. Cette solution est dite d'*égale résistance.*

3.3 REMARQUE AU SUJET DE LA TENSION INITIALE DES ORGANES SOUPLES TENDUS.

Nous avons vu que les cordes à piano, haubans et câbles ne pouvaient travailler qu'en traction, leur résistance en compression pouvant, en effet, être considérée comme nulle avec leur longueur d'utilisation.

La figure 7 *a* représente la « *triangulation* » classique réalisée à l'aide de deux cordes à piano. On donne généralement à ces cordes une *tension initiale* au montage. Ces tensions se traduisent par des *compressions initiales* des longerons et montants (équilibre). Supposons que l'on agisse en B avec une force F. Avant de tendre la corde CD appelée « *corde travaillante* », il faut que l'effort commence par détendre la corde AB qui encaisse ainsi ficti vement un effort de compression. Le calcul montre que l'effort final dans AB (ainsi que dans les autres éléments) est identique à celui que l'on aurait obtenu s'il n'y avait pas eu de tension initiale.

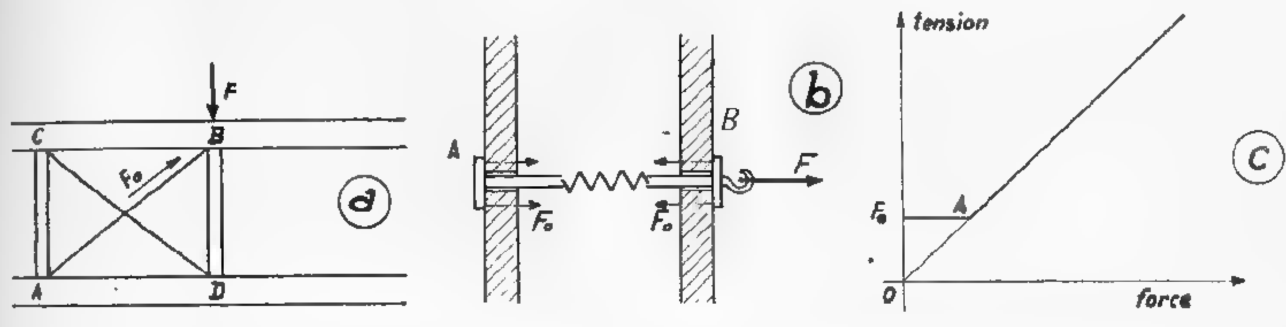


Fig. 7.

Un exemple simple, représenté figure 7 *b*, démontre bien cette proposition : Une corde terminée par deux disques A et B est sollicitée par un ressort donnant une tension initiale F_0 qui applique les disques sur deux murs (réactions internes $\pm F_0$).

Une force F agissant en B ne produira un décollement de ce disque que si son intensité devient supérieure à F_0. L'effort dans la corde en fonction de F varie suivant le diagramme de la figure 7 *c*.

Une tension initiale ne donne donc aucun supplément d'effort dans un organe (à condition toutefois, bien entendu, qu'elle ne soit pas supérieure à l'effort utile à supporter).

4. CALCUL DES ORGANES FILETÉS TENDUS (BOULONS, GOUJONS, TIRANTS, etc...)

On se contente, généralement, d'appliquer la formule ordinaire : $n = \frac{F}{s}$ s figurant ici la *section du noyau*, c'est-à-dire la *section à fond de filet* [1]. Ces sections à fond de filet sont données par les standards (ou curseurs) en usage courant.

Dans le *système international* (S. I.) qui est le plus employé

$$d = D - 1{,}408\ p$$

d étant le diamètre à fond de filetage ; D le diamètre extérieur et p le pas du filetage.

On vérifie que l'on a sensiblement pour les diamètres courants employés en aviation et pour les pas standard correspondants :

$$0{,}75\ D < d < 0{,}8\ D$$

d'où :

$$0{,}56\ S < s < 0{,}64\ S.$$

Pour un *calcul rapide*, on peut donc prendre

$$s = 0{,}6\ S.$$

REMARQUES :

a) Allègement de la partie lisse des tirants. — Pour certains boulons travaillant en traction, on allège la partie lisse (fig. 8) en donnant à cette partie un diamètre d' qui peut être *égal* ou *légèrement inférieur* au diamètre d à fond de filet sans nuire à la résistance.

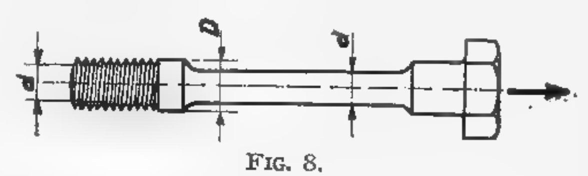


FIG. 8.

Dans le cas de fixation d'une pièce massive, par exemple d'un moteur sur son bâti, l'emploi de ce type de boulons présente, en plus d'un gain de poids, l'avantage de réaliser des fixations plus déformables où les efforts se répartissent mieux sur l'ensemble des boulons de fixation.

b) Serrage des écrous. — Quand les boulons destinés à travailler en traction constituent des attaches vitales, il est indispensable, notamment en construction aéronautique, d'effectuer le serrage de leurs écrous sous un *couple de serrage* connu. Ce serrage s'effectue alors à l'aide de *clefs dynamométriques* (ou *clefs tarées*).

Le couple de serrage M d'un écrou donné peut se déterminer *expérimentalement* en fonction de l'effort de traction F que l'on mesure dans le boulon pour diverses valeurs de M.

A défaut d'essais, on peut utiliser la formule suivante, relative aux *filetages triangulaires* :

$$M = F_0\ d'\ [0{,}5\ tg\ (\rho + \alpha) + 1{,}4\ f']$$

Dans cette formule :

M = Moment (ou couple) de serrage de l'écrou,
F_0 = Effort de traction initial que l'on désire obtenir,
d' = diamètre moyen du filetage $= 0{,}5\ (D + d)$,
α = angle de la tangente à l'hélice moyenne :

$$tg\ \alpha = \frac{p}{\pi d'}$$

ρ = angle défini par : $tg \rho = f \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$

1. — Il y aurait lieu, en réalité, de réduire la contrainte admissible, pour tenir compte de l'*amorce de rupture* créée par le filetage.

avec β = demi-angle au sommet du filet,
et f = coefficient de frottement filet-écrou
f' = coefficient de frottement écrou-rondelle.

Expression simplifiée. — Pour les filetages S. I. ($\beta = 30°$) et avec $f=f'=0,18$ (acier sur acier peu graissé ou dural), on vérifie que l'on obtient, sensiblement, pour les diamètres courants ($6 < D < 30$ mm) et les pas standard utilisés en construction aéronautique

$$\boxed{M=0,23\ F_0\ D}$$

(avec D = diamètre extérieur du boulon).

Il est à recommander, notamment pour les assemblages étanches, d'adopter pour F_0 la valeur qui correspond à « l'effort sûr » appliqué au boulon, c'est-à-dire d'après Norme 2004-c, la moitié de l'effort extrême (ou effort de calcul à rupture) relatif à ce boulon.

On notera que la remarque apportée ci-dessus au paragraphe **3.3** s'applique à l'effort de traction initial F_0 des boulons tendus.

5. CALCUL DES ENVELOPPES SOUMISES A UNE PRESSION INTÉRIEURE

5.1 DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

On désigne par *enveloppe* une surface fermée de forme quelconque emprisonnant un espace clos.

Soit une enveloppe soumise à l'extérieur à une pression p_0 (pression atmosphérique par exemple) et à l'intérieur à une pression p_1 supérieure à p_0. On désigne par *pression effective* la différence

$$p=p_1-p_0.$$

L'enveloppe se comporterait de la même façon si elle se trouvait dans le vide avec une pression intérieure p.

5.2 RÉSULTANTE DES PRESSIONS AGISSANT SUR UNE SECTION.

Considérons une enveloppe soumise à une pression intérieure effective p.

Coupons-la par un plan délimitant dans cette enveloppe une section S (voir fig. 9).

Soit un élément ΔS_1 de la surface intérieure de l'enveloppe. Cet élément est soumis à une force f normale à ΔS qui se décompose en deux forces f_1 et f_2 respectivement perpendiculaire et parallèle à la section S.

Ces forces, appliquées au centre M de l'élément ΔS_1 ont pour valeurs :

$$f=p \cdot \Delta S_1$$
$$f_2=f \cdot \sin \alpha$$
$$f_1=f \cdot \cos \alpha$$

α étant l'angle de f avec f_1 (cet angle est égal à celui du plan tangent en M au corps considéré avec le plan de la section S). Et si ΔS représente la projection de ΔS_1 sur le plan de S on a :

$$\Delta S=\Delta S_1 \cos \alpha$$

d'où $$f_1=p\Delta S_1 \cos \alpha=p\Delta S.$$

D'après ce que nous avons vu au chapitre V, paragraphe **1.2**, pour avoir l'effort sur une section, nous devons prendre la résultante des forces situées *d'un même côté de cette section*. Donc la force normale F_1 agissant sur la section S a pour valeur :

$$F_1=\Sigma f_1=\Sigma p\Delta S=p\Sigma\Delta S$$

soit : $F_1 = pS$

et la force tangentielle F_2 vaut

$$F_2 = \Sigma f_2 = p\Sigma\Delta S_1 \sin \alpha.$$

Considérons tous les éléments ΔS_1 situés d'un même côté d'un plan P normal à S et passant par le sommet de l'enveloppe. Le terme $\Sigma\Delta S_1 \sin \alpha$ relatif à ces éléments représente l'aire délimitée par l'intersection de P avec S et l'enveloppe. Si on considère les éléments situés de l'autre côté de P, on trouve la même surface, mais affectée d'un signe opposé (angles α de signes opposés). On obtient donc, en définitive, pour l'ensemble de la surface d'enveloppe située au-dessus de S :

$$\Sigma\Delta S_1 \sin \alpha = 0 \qquad \text{d'où} \qquad F_2 = 0.$$

L'effort tranchant agissant sur la section S est donc nul.

La résultante générale des forces appliquées est donc égale à la force F_1 : *elle est normale à la section S et a pour valeur*

$$\boxed{F = F_1 = pS.}$$

Comme la force F est la résultante de forces élémentaires proportionnelles aux éléments ΔS de la section S, elle est donc appliquée au *centre de gravité* G de cette section (voir définition du centre de gravité d'une surface, chap. II, § 7.1).

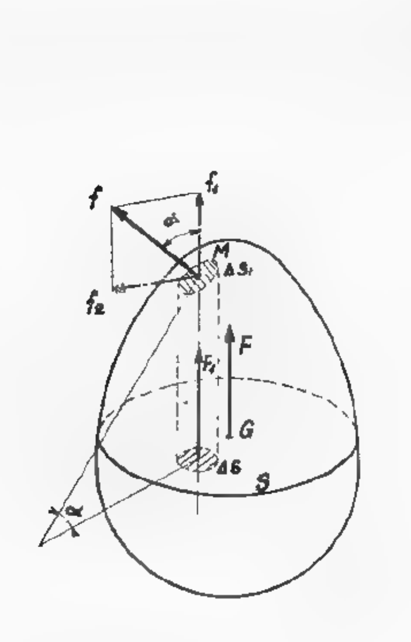


Fig. 9.

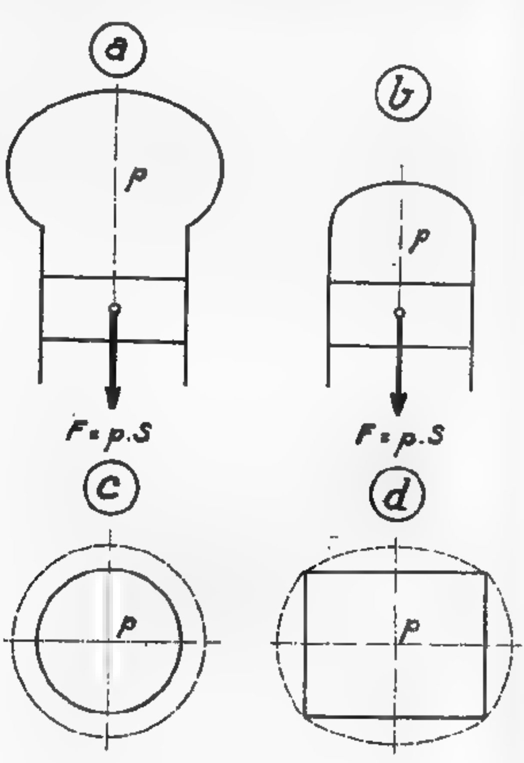


Fig. 10.

5.3 REMARQUES.

a) On voit que la *forme de l'enveloppe* au-dessus de la section considérée *n'a aucune influence sur la grandeur ou la position de la résultante* F

Exemple. — L'effort sur un piston de moteur est indépendant, à pression égale, de la forme de la culasse (fig. 10 *a* et 10 *b*).

b) Par contre, la forme d'une enveloppe influe sur le *type de déforma-*

tion qu'elle subira par suite de la pression. Il est facile de se rendre compte physiquement qu'une enveloppe sphérique restera sphérique et augmentera simplement de rayon (exemple d'une baudruche). De même, la section droite d'une enveloppe cylindrique restera circulaire. On dit que ces formes sont *stables*. Nous verrons qu'elles ne sont pratiquement soumises qu'à des efforts de traction. Par contre, on conçoit que la déformation d'une enveloppe parallélipipédique, par exemple, s'accompagnera d'un bombement des faces (qui engendra des contraintes de flexion). Toutes les formes initiales tendraient, à la limite, vers une forme stable à section circulaire (voir fig. 10 *c* et 10 *d*) Nous n'étudierons, dans ce chapitre, que les enveloppes de formes stables et plus particulièrement les *enveloppes à parois minces.*

5.4 CALCUL DES ENVELOPPES CYLINDRIQUES A PAROIS MINCES.

5.40 Hypothèse de calcul. — Nous supposerons toujours ci-après, que les *enveloppes minces* ne comprennent que la surface enveloppante proprement dite non raidie par des éléments longitudinaux (lisses) ou transversaux (cadres ou frettes). Nous étudierons sommairement l'influence de la présence de ces éléments au chapitre XXII (calcul des fuselages-coques étanches).

Soit une enveloppe cylindrique de longueur L, de diamètre D et d'épaisseur e très faible vis-à-vis de D (fig. 11). Nour pourrons donc confondre le diamètre moyen et les diamètres extérieur ou intérieur pour les démonstrations.

5.41 Equilibre d'une section longitudinale : tensions transversales. — Considérons une section longitudinale faite suivant un plan diamétral.

La résultante des efforts appliqués à cette section a pour valeur :

$$F = pDL \text{ (voir § 5.2).}$$

Fig. 11.

Fig. 12.

L'enveloppe résiste à cette force par une série de tensions réparties égales à f kg par unité de longueur et comme cette enveloppe est mince on

admet que f se répartit uniformément sur son épaisseur e en donnant une contrainte de traction constante

$$n_1 = \frac{f}{e}.$$

La longueur intéressée par les tensions f est 2L.

On a donc $F = pDL = 2\,Lf = 2\,n_1 eL.$

d'où la valeur de la contrainte n_1

$$\boxed{n_1 = \frac{p\,D}{2\,e}} \quad \text{soit} \quad \boxed{n_1 = \frac{p\,R}{e}}$$

avec R = rayon du cylindre.

Cette contrainte s'appelle la *tension transversale* (ou *contrainte d'éclatement*) de l'enveloppe.

5.42 Equilibre d'une section transversale : tensions longitudinales (fig. 12). — La force F a ici pour valeur :

$$F = p \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

(elle provient de la pression sur les fonds qui ont une surface égale à $\frac{\pi D^2}{4}$).

L'équilibre se fait par une contrainte n_2 sur l'anneau circulaire hachuré sur la figure et cette contrainte est supposée, également, uniformément répartie sur l'épaisseur mince de cette section.

La section travaillante a pour valeur :

$$s' = \pi De.$$

On a donc :

$$F = p \cdot \frac{\pi D^2}{4} = n_2 \pi e D$$

$$4\pi e n_2 D = p \cdot \pi D^2$$

$$4 e n_2 = pD$$

soit $\boxed{n_2 = \frac{p\,D}{4\,e}}$ ou $\boxed{n_2 = \frac{p\,R}{2\,e}}$.

expression de la contrainte, ou *tension longitudinale* agissant sur l'enveloppe.

5.43 Conclusion. — La rupture transversale n'est donc pas à craindre pour un matériau isotrope puisque la contrainte correspondante est la moitié de celle correspondant à la section longitudinale [1].

5.44 Applications.

Premier exemple. — Soit à calculer la contrainte maximum subie par un cylindre de diamètre D=1 m d'épaisseur e=5 mm et soumis à une pression interne p=10 kg/cm² (chaudière par exemple). On a d'après § 5.41

$$n_1 = \frac{0,1 \times 1000}{2 \times 5} = 10 \text{ kg/mm}^2.$$

Deuxième exemple. — Soit à calculer les contraintes de la tôle de revêtement d'un fuselage cylindrique d'avion stratosphérique de diamètre D=3 m et d'épaisseur e= 1 mm, volant à une altitude de 10.000 m avec une pression intérieure correspondant à celle existant à l'altitude de 2.000 mètres.

1. — Les deux contraintes n_1 et n_2 ne se combinent pas entre elles ainsi que nous le verrons au chap. XV.

Pression à 10.000 m

$$p_0=0{,}26\ \text{kg/cm}^2.$$

Pression à 2.000 m

$$p_1=0{,}80\ \text{kg/cm}^2.$$

On a donc une *pression interne effective*

$$p=p_1-p_0=0{,}8-0{,}26=0{,}54\ \text{kg/cm}^2=0{,}0054\ \text{kg/mm}^2$$

et une contrainte

$$n_1=\frac{0{,}0054\cdot 3000}{2}=8{,}1\ \text{kg/mm}^2 \text{ dans le sens transversal}$$

et $n_2=4{,}05$ kg/mm² dans le sens longitudinal [1].

5.5 CALCUL DES ENVELOPPES MINCES CYLINDRIQUES A FONDS SPHÉRIQUES.

Pour réaliser les fonds des enveloppes cylindriques (chaudières, fuselages d'avions stratosphériques, etc...), il est avantageux d'utiliser des *calottes sphériques* qui constituent elles aussi des formes stables.

5.51 **Contrainte.** — Soit un cylindre de rayon R et d'épaisseur e, terminé à ses extrémités par deux calottes sphériques de rayon R′ et d'épaisseur e', devant supporter une pression effective p. Soit à calculer la contrainte sur ces fonds (fig. 13). Considérons le cône de demi angle au sommet β qui a pour trace sur un fond une circonférence de rayon ρ.

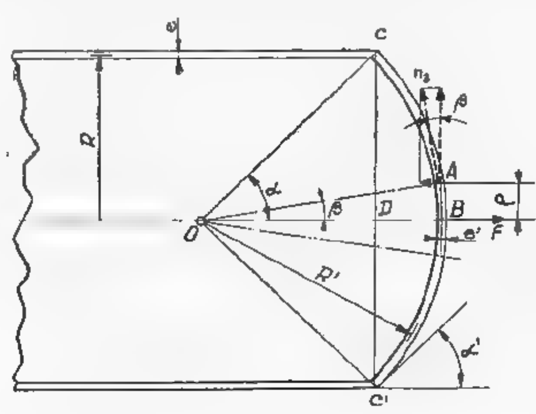


FIG. 13.

D'après la formule trouvée au paragraphe 5.2, la force F due à la pression agissant sur cet élément de fond a pour valeur :

$$F=pS=p\cdot\pi\rho^2$$

et elle est dirigée suivant l'axe du cône.

On adopte l'hypothèse suivante : L'équilibre se fait par une tension constante n sur la surface de section du cône par l'anneau sphérique. Nous assimilerons cette surface à un cylindre de rayon ρ et de hauteur e'. Cette tension est dirigée normalement à la génératrice du cône. C'est sa projection sur l'axe horizontal qui équilibre la force F. On a donc :

$$F=p\pi\rho^2=n_3\sin\beta\ 2\pi\rho e'.$$

En simplifiant

$$p\cdot\rho=2.\,e'\,n_3\sin\beta$$

1. — Un tel calcul est *théorique*, car il suppose le revêtement absolument libre de se dilater alors que les lisses et les couples forment un système qui s'y oppose.

d'où

$$n_3 = \frac{p\,\rho}{2\,e' \sin\beta}.$$

Mais dans le triangle OBA nous avons la relation :

$$\rho = R' \sin\beta.$$

En remplaçant ρ par sa valeur dans l'expression de n_3 trouvée précédemment on arrive à la valeur suivante de la contrainte de traction n_3 :

$$\boxed{n_3 = \frac{pR'}{2\,e'}.}$$

Cette valeur de contrainte est valable pour tout le fond sphérique (l'angle β s'est éliminé). Elle représente également la *contrainte d'une enveloppe sphérique mince* de rayon R'.

5.52 Angle de raccordement optimum au corps cylindrique (fig. 13).

CONDITION. — *Cet angle doit être tel qu'il se conserve après déformation.*
Dans le triangle OCD on a, avant déformation :

$$CD = OC \sin\alpha \qquad \text{soit} \qquad R = R' \sin\alpha$$

en désignant par α l'angle COB qui est égal au complément de l'angle de raccordement α'.

Après déformation, la contrainte n_1 sur les parois latérales du cylindre a produit un allongement relatif i.

Le rayon R est devenu

$$R_1 = R + iR.$$

Or, d'après la loi de HOOKE :

$$n_1 = Ei \qquad \text{d'où} \qquad i = \frac{n_1}{E}.$$

En remplaçant i par sa valeur dans l'expression ci-dessus on obtient :

$$R_1 = R + \frac{n_1}{E}\,R$$

soit

$$R_1 = R\left(1 + \frac{n_1}{E}\right).$$

On démontrerait de même que R' devient

$$R'_1 = R'\left(1 + \frac{n_3}{E}\right).$$

Après déformation, l'angle α est devenu α' et sa valeur est donnée par :

$$R_1 = R'_1 \sin\alpha'$$

d'où

$$\sin\alpha' = \frac{R_1}{R'_1} = \frac{R\left(1 + \frac{n_1}{E}\right)}{R'\left(1 + \frac{n_3}{E}\right)}.$$

Or, nous ne devons pas avoir de déformation d'angle. On doit donc avoir $\alpha = \alpha'$ et

$$\sin\alpha' = \sin\alpha$$

soit
$$\frac{R\left(1+\frac{n_1}{E}\right)}{R'\left(1+\frac{n_3}{E}\right)}=\frac{R}{R'}$$

d'où
$$1+\frac{n_1}{E}=1+\frac{n_3}{E}$$

ce qui entraîne nécessairement :

$$n_1=n_3 \quad \text{(contraintes égales)}$$

c'est-à-dire :
$$\frac{p\,R}{e}=\frac{pR'}{2\,e'}$$

ou
$$\frac{R}{e}=\frac{R'}{2\,e'}$$

et en remplaçant R' par sa valeur : $\frac{R}{\sin\alpha}$, on arrive à

$$\frac{R}{e}=\frac{R}{2e'\sin\alpha}$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{e'=\frac{e}{2\sin\alpha}}\,.$$

Formule générale reliant entre elles les épaisseurs des parois et des fonds en fonction de l'angle α pour satisfaire à la condition recherchée [1].

Cas particulier. — Si l'on a $e'=e$, il faut une valeur de l'angle α telle que

$$e=\frac{e}{2\sin\alpha} \qquad \text{ou} \qquad 2\sin\alpha-1$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

ce qui correspond à $\alpha=30°$, c'est-à-dire à un angle de raccordement de 60°.

5.53 Equilibre du raccordement des fonds avec le corps cylindrique. — Un élément de longueur Δl de la circonférence CC' de raccordement est soumis de la part du fond à une sollicitation tangentielle (fig. 14)

$$f=n_3 s=n_3 e'\Delta l$$

soit, en remplaçant n_3 par sa valeur déduite du paragraphe 5.51,

$$f=\frac{p\,R'}{2\,e'}\,e'\Delta l=\frac{1}{2}\,p\,R'\Delta l.$$

Cette force se décompose en

$$f'=f\sin\alpha=\frac{1}{2}\,pR'\,\Delta l\,\sin\ ,$$

$$f''=f\cos\alpha=\frac{1}{2}\,pR'\Delta l\,\cos\alpha.$$

1. — Cette condition de conservation d'angle est surtout importante pour les fonds soudés.

Cette force se répartit en deux forces de compression $\frac{F}{2}$ agissant sur chaque section de l'élément de bordure :

$$\frac{F}{2} = \frac{f''}{\Delta l} R$$

soit
$$\frac{F}{2} = \frac{p R'}{2} R \cos \alpha = \frac{1}{2} p RR' \cos \alpha.$$

Or, d'après la figure 14,

$$\cos \alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{d'}{R'}$$

d'où
$$\boxed{\frac{F}{2} = \frac{p R d'}{2}}.$$

En divisant cette valeur par la *section droite* de l'élément de bordure, on obtient la *contrainte de compression* que cet élément supporte du fait de la brisure du raccordement [1].

5.533 *Application numérique.*

Reprenons le cas du fuselage-coque d'avion stratosphérique étudié au paragraphe 5.44 (exemple 2). Supposons que le fond soit réalisé par une calotte sphérique d'un rayon R'=2 mètres.

$$d' = \sqrt{R'^2 - R^2} = \sqrt{2^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{1{,}75}$$
$$= 1{,}322 \text{ m.}$$

Le *couple de fuselage* situé à l'aplomb du raccordement (plan CC' de la fig. 14) encaissera un effort de compression

$$\frac{F}{2} = \frac{0{,}0054 \cdot 1500 \cdot 1322}{2} = 5360 \text{ kg.}$$

Si ce couple a une *section droite* de 500 mm², par exemple, il subira une *contrainte de compression* [2].

$$n_c = \frac{5360}{500} = 10{,}7 \text{ kg/mm}^2.$$

5.6 CALCUL DES ENVELOPPES SPHÉRIQUES A PAROIS MINCES.

On ferait un calcul analogue à celui que nous venons de voir dans le cas des enveloppes cylindriques à fonds sphériques (§ 5.5).

On obtient de même :

$$\boxed{n = \frac{p D}{4 e} = \frac{p R}{2 e}} \quad \text{(dans toutes les directions).}$$

5.7 CALCUL DES ENVELOPPES CYLINDRIQUES A PAROIS ÉPAISSES : FORMULES DE LAMÉ.

Les théories précédentes sont mises en défaut quand l'épaisseur des parois n'est plus négligeable devant le rayon du cylindre : l'épaisseur est trop importante pour que l'hypothèse d'une répartition uniforme des contraintes reste valable et l'étude des contraintes agissant sur les divers éléments de l'enveloppe ne peut plus s'effectuer par de simples considérations

---

1. — Cette contrainte est évidemment nulle quand le fond se raccorde tangentiellement au cylindre (c'est-à-dire quand la distance d' est nulle).

2. — Une partie des efforts f'' est, en réalité, équilibrée directement par des actions radiales dirigées vers l'extérieur dues à la déformabilité relative du revêtement par rapport aux couples qui constituent, à cet égard, une succession d'anneaux rigides.

d'équilibre, comme dans les cas ci-dessus. Cette étude se traite à l'aide de la théorie générale de l'Elasticité et son exposé déborde le cadre de notre ouvrage.

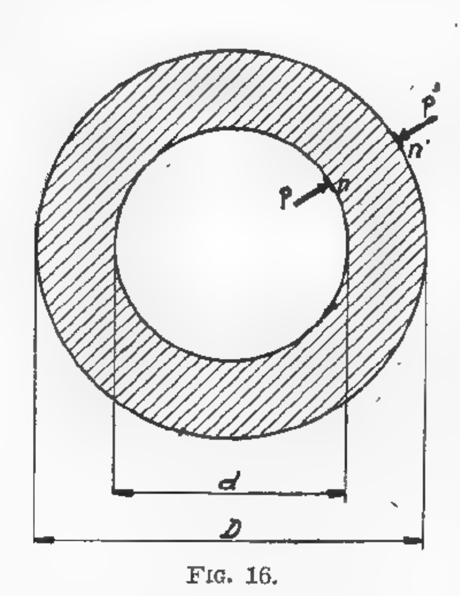


FIG. 16.

Nous donnerons simplement les résultats pratiques auxquels on aboutit.

Désignons par D et d les diamètres extérieur et intérieur et par p et p' les pressions intérieure et extérieure (fig. 16). Les *contraintes normales maxima* ont lieu dans le *sens transversal* (ou d'éclatement) comme pour les enveloppes minces, et elles concernent les *fibres intérieures* de l'enveloppe, c'est-à-dire les éléments situés sur la circonférence de diamètre d.

La valeur de ces contraintes (tangentes à la circonférence interne) est donnée par l'expression simplifiée suivante des *formules de Lamé* :

$$n = \frac{2\,p'\,D^2 - p\,(D^2+d^2)}{D^2 - d^2}$$

dans laquelle n est *positif* dans le sens d'une *compression* et *négatif* dans le sens d'une *traction.*

CAS PARTICULIERS. — *a*) Supposons la *pression extérieure p' nulle* ou négligeable devant p. On obtient alors :

$$\boxed{n = -p\,\frac{D^2+d^2}{D^2-d^2} \quad \text{(traction)}}$$

b) Dans le cas contraire d'une *pression intérieure p nulle*, on a

$$\boxed{n = p'\,\frac{2\,D^2}{D^2-d^2} \quad \text{(compression)}}$$

On voit que, dans ces deux cas, *la contrainte maximum n est toujours supérieure à la pression appliquée.*

Remarques. — *a*) La contrainte transversale n' agissant sur la *paroi extérieure* de l'enveloppe (circonférence de diamètre D) a pour expression :

$$n' = \frac{p'\,(D^2+d^2) - 2pd^2}{D^2-d^2}.$$

Pour $p'=0$ on obtient donc : $n' = -2\,p\,\frac{d^2}{D^2-d^2}$ (traction)

et pour $p=0$:

$$n' = p'\,\frac{D^2+d^2}{D^2-d^2} \quad \text{(compression)}$$

b) Supposons l'épaisseur e de l'enveloppe faible, on a sensiblement :

$$D^2 - d^2 = (D-d)\,(D+d) = 2e \cdot 2D = 4e\,D$$
$$D^2 + d^2 = 2D^2.$$

Dans le cas où $p'=0$, on retrouve donc bien l'expression relative aux enveloppes minces (§ 5.41)

$$n = -p\,\frac{2D^2}{4eD} = -p\,\frac{D}{2e} = -p\,\frac{R}{e}.$$

Frettage. — Le principe du frettage des cylindres épais soumis à une pression interne (donc tendus par cette pression) consiste à donner au cylindre une *compression initiale* qui viendra en déduction de la traction due à la pression interne.

C'est le cas des *canons* où cette compression initiale est obtenue par des manchons (frettes) emmanchés à chaud sur les tubes. Les manchons sont, par contre, soumis à des *tractions initiales* auxquelles viennent s'ajouter celles dues à la pression. Mais les tensions correspondantes sont nettement moins élevées qu'à l'intérieur du tube et il arrive que le même acier puisse convenir pour le tube et les manchons.

De toute façon, ce procédé permet d'éviter des tensions prohibitives à l'intérieur des tubes.

5.8 REMARQUE : ENVELOPPES MINCES SOUMISES A UNE PRESSION EXTÉRIEURE.

C'est, par exemple, le cas des coques de sous-marins ou des tubes de chaudière. Le calcul est exactement le même que dans le cas des enveloppes minces soumises à une pression interne à ceci près que les parois travaillent en compression au lieu de travailler en traction, ce qui conduit, généralement, à considérer des limites de contrainte par *instabilité* (flambage).

Nous avons vu, également, le cas d'une pression extérieure pour les cylindres épais.

6. PRESSIONS D'APPUI DES CORPS CYLINDRIQUES : MATAGE

6.1 DEFINITION.

Considérons un arbre cylindrique reposant dans un palier, tel que le représente la figure 17.

Supposons que cet arbre soit soumis à une force F normale à son axe.

Cette force se traduit par une pression radiale que l'on peut admettre uniforme (jeux négligés).

D'après ce que nous avons vu au paragraphe **5.2** on doit avoir : $F = p \cdot S$

S étant, comme dans le cas des enveloppes, la *surface projetée*. C'est la section d'un rectangle ayant pour côtés la longueur l et le diamètre d du cylindre.

On en tire :

$$F = p\ l\ d$$

soit :

$$\boxed{p = \frac{F}{l\ d}}.$$

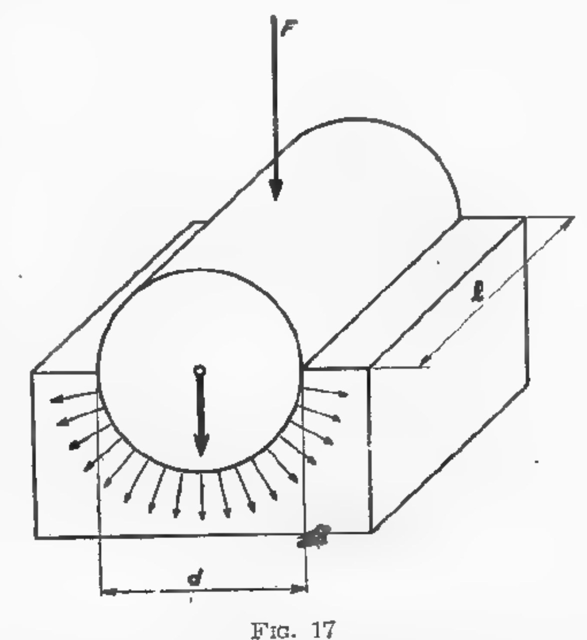


Fig. 17

C'est pour cette raison que l'on parle de la « *pression de matage* » : elle est égale à la force agissante divisée par la projection sur un plan normal à cette force, de la surface d'appui.

6.2 PRESSIONS ADMISSIBLES.

Les pressions de matage admissibles p_a se mesurent en fonction des valeurs des contraintes normales admissibles n_a.

Pour les boulons qui sont peu serrés, le frottement intervient peu et on doit prendre sensiblement : $p_a = 1,1\ n_a$.

Par exemple, pour le Duralumin AU4G, on admet une pression

$p_a = 45$ kg/mm² au coefficient de rupture (matage plastique).

Pour les rivets, le frottement des têtes intervient dans la valeur de la pression admissible.

On admet en général :

$$p_a = 1,5\ n_a \text{ à la rupture.}$$

Par exemple, pour le Duralumin AU4G, on peut admettre :

$$p_a - 60 \text{ kg/mm}^2.$$

On ne doit pas oublier de vérifier, dans tous les cas, si les éléments assemblés par des boulons ou par des rivets tiennent au matage. Cette condition est particulièrement importante pour les éléments minces fréquemment utilisés en construction aéronautique (voir chapitre VIII).

7. CALCUL SIMPLIFIÉ DE LA JANTE D'UN VOLANT (fig. 18).

7.1 DONNÉES.

Considérons un volant dont la jante a un rayon moyen R, une largeur l et une épaisseur e, que nous supposerons très faible vis-à-vis de R (ce qui nous permettra d'assimiler la jante à un élément d'enveloppe cylindrique à paroi mince).

Ce volant est soumis à une *vitesse angulaire* de rotation *constante* ω autour de son centre O (voir chap. II, § **1.272**).

La jante est constituée par un matériau de densité d, c'est-à-dire de *masse spécifique*.

$$\rho = \frac{d}{g}$$

avec $g = 9,81$ m /sec² = accélération de la pesanteur (chap. II, § **1.1** et **1.22**).

7.2 ÉQUATION DE RÉSISTANCE.

Isolons un petit élément de longueur ΔL de la jante.

Cet élément a un volume

$$v = l\ e\ \Delta L$$

d'où une masse

$$m = \rho\ v = \rho\ l\ e\ \Delta L.$$

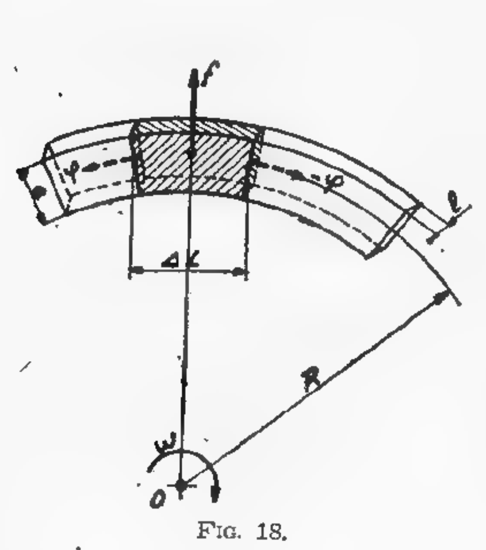


Fig. 18.

Il est soumis, du fait de la rotation, à une *force centrifuge*

$$f = m\ \omega^2\ R \qquad \text{(chap. II, § 1.274)}$$

soit

$$f = \rho\ l\ e\ \omega^2\ R\ \Delta L.$$

Assimilons cette force à la résultante d'une « *pression intérieure* ».

Elle agit sur un élément de surface égal à

$$s = l\ \Delta L \quad \text{(surface projetée de l'élément).}$$

La pression intérieure fictive produisant le même effet aurait donc pour expression :

$$p = \frac{f}{s} = \rho\ e\ \omega^2\ R.$$

D'après le paragraphe 5.41, cette pression engendre une *contrainte transversale*.

$$n = \frac{p\,R}{e}$$

soit

$$\boxed{n = \rho\ \omega^2\ R^2.}$$

(Cette *contrainte de traction* produirait sur l'élément deux résultantes des forces de liaison φ et — φ (fig. 18). Il est facile de démontrer que la composition de ces forces équilibre bien la force *f* appliquée.)

On peut également exprimer cette contrainte en fonction de la *vitesse tangentielle* V de la jante, en utilisant la relation :

$$V = \omega\ R \qquad \text{(chap. II. § 1.273),}$$

d'où

$$\boxed{n = \rho\ V^2}$$

7.3 VITESSE LIMITE DU VOLANT.

En faisant $n = n_a$ = contrainte limite de traction admissible (compte tenu d'un coefficient de sécurité) on obtient les *valeurs limites* ω_l ou V_l de la vitesse angulaire ou de la vitesse tangentielle.

$$n_a = \rho\ \omega^2_l\ R^2$$

d'où

$$\boxed{\omega_l = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{n_a}{\rho}}} \qquad \text{(en radians/sec)}$$

ou

$$n_a = \rho\ V^2_l$$

d'où

$$\boxed{V_l = \sqrt{\frac{n_a}{\rho}}}$$

7.4 APPLICATION NUMÉRIQUE.

Soit à calculer la *vitesse limite* d'un volant en acier coulé, de rayon R = 3 m pour lequel on s'est fixé une contrainte limite $n_a = 15$ kg/mm². Densité de l'acier $d = 7{,}8$.

Nous réduirons toutes les unités dans le système : kg, mètre, seconde.
Masse spécifique de l'acier :

$$\rho = \frac{\text{poids du m}^3\text{ d'acier}}{9{,}81\ \text{m/sec}^2} = \frac{7{,}8 \cdot 10^3}{9{,}81} = 795 \text{ (unités M. Kp. S)}$$

Contrainte admissible : $n_a = 15 \cdot 10^6$ kg/m².

Vitesse angulaire limite

$$\omega_l = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{15 \cdot 10^6}{795}} = \frac{137{,}2}{3} = 45{,}73 \text{ rad/sec}$$

soit un *nombre de tours limite :*

$$N_l = \frac{45{,}73}{2\ \pi} = 7{,}28 \text{ tours par seconde}$$

ou

$$N_l = 7{,}28 \times 60 = 437 \text{ tours par minute.}$$

Vitesse tangentielle limite correspondante :

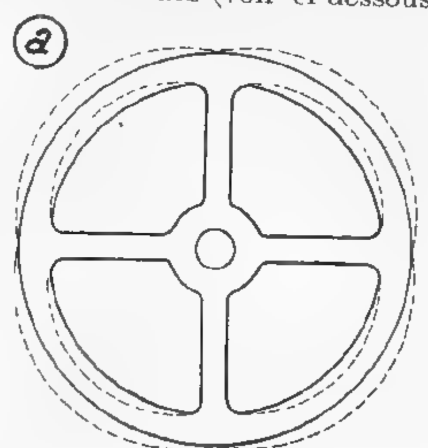
$$V_l = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^6}{795}} = 137{,}2 \text{ m/sec.}$$

7,5 REMARQUE.

Dans tous les calculs simplifiés ci-dessus, nous avons négligé l'influence des *rayons* du volant.

Si ceux-ci sont *rectilignes*, ils peuvent être considérés comme pratiquement indéformables vis-à-vis de la jante et ils imposent à celle-ci une déformation du type de celle schématisée sur la figure 19 *a* (au lieu d'une simple dilatation de diamètre). Il en réulte des *contraintes supplémentaires de flexion* de la jante, au niveau des bras ce qui accroît la nécessité d'un coefficient de sécurité pour évaluer la contrainte admissible à utiliser selon les procédés de calcul ci-dessus.

On réalise souvent des *bras courbes*, selon figure 19 *b*. Cette disposition diminue considérablement les contraintes supplémentaires de la jante. Elle favorise, au surplus, les *retraits* consécutifs au refroidissement des volants coulés ou soudés (voir ci-dessous).



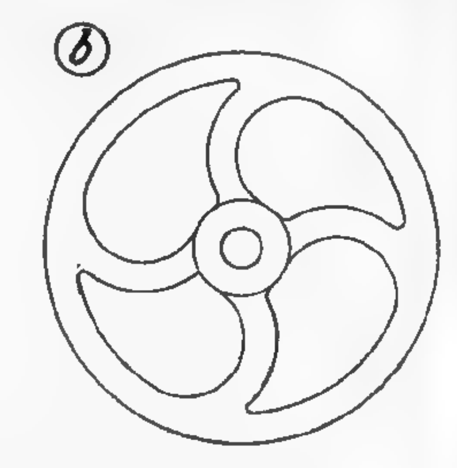


Fig. 19.

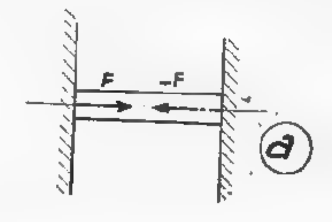
8. TENSIONS DUES A DES VARIATIONS DE TEMPÉRATURE

8,1 DÉFINITION.

Considérons une barre de longueur L à la température t (en degrés centigrades). Portons-la à une température $t + \theta$. Elle s'allonge d'une quantité l telle que

$$l = \alpha\,\theta L$$

avec α = *coefficient de dilatation* du matériau constituant cette barre. Si on



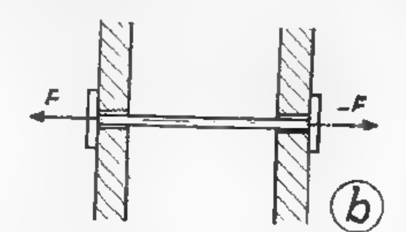


Fig. 20.

empêche cette dilatation (fig. 20 *a*), la barre se trouve *comprimée*. Elle supporte une contrainte de compression n_c déduite directement de la loi de Hooke :

$$n_c = E\,i = E\,\frac{l}{L}$$

soit :

$$n_c = \frac{E\alpha\,\theta L}{L} = E\alpha\,\theta.$$

Supposons maintenant que nous laissions refroidir une barre de longueur L de la température $t + \theta$ à la température t. Elle se raccourcit d'une quantité l telle que

$$l = \alpha \theta L$$

α étant le même coefficient que dans le cas précédent.

Si on empêche la contraction (fig. 20 *b*), la barre est *tendue*. La barre supporte une *contrainte de traction* n_t égale en valeur absolue à celle du cas de la compression :

$$n_t = E \alpha \theta.$$

8.2 REMARQUES.

a) La contrainte est indépendante de la longueur de la barre (voir formules).

b) Le déplacement $l = \alpha\theta$ L est proportionnel à la longueur.

c) L'effort $F = n\, S = E\, S\, \alpha\, \theta$ est proportionnel à la section et indépendant de la longueur.

d) Le travail $\mathcal{E} = \frac{1}{2} Fl = \frac{1}{2} E \alpha^2 \theta^2 \cdot S L = \frac{1}{2} E \alpha^2 \theta^2 \cdot V$

est proportionnel au volume V de la barre.

e) Ces formules ne sont valables que dans le domaine élastique.

8.3 APPLICATION NUMERIQUE.

Pour redresser les murs des édifices importants on dispose souvent des barres intérieures selon figure 20 *b*, que l'on chauffe et qu'on laisse refroidir après avoir emprisonné leurs extrémités dans des ferrures d'appui extérieures aux murs.

Soit une de ces barres en acier d'un diamètre de 40 mm ($S = 1260$ mm²) et d'une longueur de 20 mètres, à laquelle on fait subir un écart de température $\theta = 200°$.

Coefficient de dilatation : $\alpha = 1{,}16 \cdot 10^{-5}$.
Module d'élasticité : $E = 20.000$ kg/mm².
Si les murs étaient inébranlables, la contrainte de traction de la barre serait :

$$n = 20.000 \cdot 1{,}16 \cdot 10^{-5} \cdot 200 = 46{,}4 \text{ kg/mm}^2$$

et la force engendrée :

$$F = n \cdot S \cdot = 46{,}4 \cdot 1260 = 58500 \text{ kg.}$$

Le travail élastique interne, et donc le travail de redressement externe, ont pour valeur

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\, 20000 \cdot \overline{1{,}16^2} \cdot 10^{-10} \cdot \overline{200^2} \cdot 1260 \cdot 20000$$

$$= 1358 \cdot 10^3 \text{ kgmm} = 1358 \text{ kgm.}$$

8.4 CONCLUSION.

Nous voyons donc, par cet exemple simple, que les variations de température peuvent engendrer des contraintes et des efforts très importants.

C'est ce qui explique les déformations (ou même les ruptures) des *assemblages par soudure autogène* au cours de leur exécution surtout si ces assemblages constituent des ensembles non librement dilatables (voir chapitre suivant). C'est également ce qui explique les *tensions internes* des pièces de fonderie et les *jeux de dilatation* prévus dans les constructions ou entre les rails de chemins de fer.

9. ÉQUILIBRE D'UN FIL TENDU SOUMIS A UNE CHARGE CONCENTRÉE NORMALE A SA DIRECTION

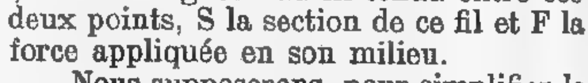
9.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Le problème que nous traitons ci-dessous présente peu d'intérêt industriel. Son but est de mettre en évidence une mise en défaut de l'approximation ordinaire des calculs qui consiste à négliger les déformations pour la recherche de l'équilibre externe (voir chap. V, § 3.3).

Il est à remarquer que le système étudié n'est autre, en réalité, qu'un système hyperstatique simple (1er degré de surabondance) et nous verrons au chapitre XVIII que les conditions de déformations sont nécessaires pour la mise en équilibre de ces systèmes.

9.1 DONNÉES.

Plaçons-nous dans le *cas simple d'un fil chargé en son milieu* (voir fig. 21).

Soient A et B deux points fixes, 2 L la longueur du fil tendu entre ces

deux points, S la section de ce fil et F la force appliquée en son milieu.

Nous supposerons, pour simplifier le problème, que *le fil n'a aucune tension initiale* et que sa *rigidité de flexion est nulle.* Sous l'action de la force F, le fil s'allonge et prend la forme d'une ligne brisée AP′B.

Nous nous proposons de calculer l'effort de traction X engendré dans le fil et la contrainte correspondante.

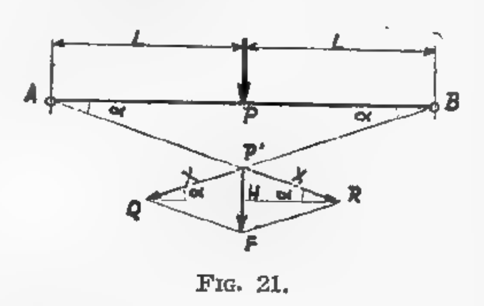


FIG. 21.

9.2 ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRE.

Cet effort X doit être tel que l'on ait la décomposition de forces représentée figure 21 (équilibre).

Par raison de symétrie $\overline{P'H} = \overline{HF} = \frac{F}{2}$.

Dans le triangle rectangle P′HQ

$$P'H - \overline{QP'} \sin \alpha$$

soit :

$$\frac{F}{2} = X \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad X = \frac{F}{2 \sin \alpha} \quad (1)$$

Dans le triangle rectangle APP′

$$AP = AP' \cos \alpha$$

d'où

$$AP' = \frac{AP}{\cos \alpha} = \frac{L}{\cos \alpha}.$$

L'allongement réel l d'une moitié de fil est égal à

$$l = AP' - AP = \frac{L}{\cos \alpha} - L = L\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right)$$

et l'allongement relatif i :

$$i = \frac{l}{L} = \frac{1}{\cos \alpha} - 1.$$

La contrainte de traction vaut donc, d'après la loi de HOOKE :

$$n = Ei = E\left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1\right).$$

Mais elle a aussi pour valeur

$$n = \frac{X}{S}.$$

On a donc :

$$X = nS,$$

soit :

$$X = ES\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \qquad (2)$$

Des équations (1) et (2) on déduit la relation :

$$\frac{F}{2\sin\alpha} = ES\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$$

soit : $$\frac{F}{2\,ES} = \sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha \qquad (3)$$

α est un angle très petit. On démontre alors mathématiquement (en développant en série et en se limitant aux premiers termes) que l'on a très sensiblement :

$$\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha = \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^3}{6} = \frac{\alpha^3}{2}.$$

Ce qui donne dans l'équation (3) :

$$\frac{F}{2\,E\,S} = \frac{\alpha^3}{2}$$

d'où l'on tire :

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{F}{E\,S}} \qquad \text{(en radians),}$$

soit :

$$\alpha = 57{,}3\sqrt[3]{\frac{F}{E\,S}} \qquad \text{en degrés.}$$

On voit donc que cet angle est *indépendant de la longueur* L.
Pour les petits angles, sin α est sensiblement égal à α (en radians).
On a donc un effort de traction X dans le fil égal à :

$$\boxed{X = \frac{F}{2\sqrt[3]{\dfrac{F}{E\,S}}}}$$

et une flèche

$$f = PP' = L\sin\alpha = L\alpha = L\sqrt[3]{\frac{F}{E\,S}}.$$

La flèche est donc proportionnelle à la longueur du fil.

9.3 APPLICATION.

Soit à caculer la force de traction et la contrainte d'un fil d'acier tendu de section $S = 10$ mm² chargé en son milieu par une force $F = 100$ kg.
Module d'élasticité : $E = 20000$ kg/mm².
Angle de déviation :

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{100}{2\times10^4\cdot 10}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\times10^3}} = 0{,}0794 \text{ rad} = 4°30'.$$

Effort de traction :

$$X = \frac{100}{2\times0{,}0794} = 630 \text{ kg.}$$

Contrainte : $n_t = 63$ kg/mm².

CHAPITRE VII

SYSTÈMES ARTICULÉS

0. INTRODUCTION

L'étude des *systèmes articulés* constitue à la fois une application des principes d'équilibres extérieur et intérieur des systèmes (chap. III et V) et des théories de la traction ou de la compression simples (chap. VI).

Nous verrons également que les équilibres intérieurs peuvent être résolus élégamment pour ces systèmes par des méthodes graphiques directes faisant appel aux notions exposées au chapitre IV (Statique graphique).

1. — GÉNÉRALITÉS

1.1 DEFINITION.

On désigne par *système articulé* un ensemble d'éléments généralement rectilignes appelés *barres* réunis entre eux par des *articulations* en leurs points de rencontre appelés *nœuds*.

1.2 CLASSIFICATION.

On peut distinguer trois grandes catégories de systèmes articulés :

a) les systèmes articulés *déformables ;*

b) les systèmes articulés *strictement indéformables*, c'est-à-dire les systèmes articulés à nombre de barres tout juste suffisant pour qu'ils soient indéformables ;

c) les systèmes articulés *indéformables à barres surabondantes* [1].

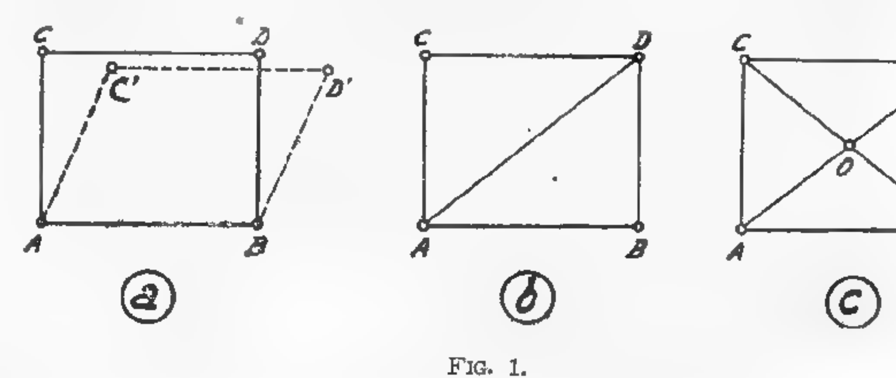


FIG. 1.

1. — Il est évident que la déformabilité dont il est question dans ces définitions, ne concerne que la possibilité de déformations extérieures sans effort. Les systèmes dits indéformables restent sujets à des déformations élastiques internes sous l'action des charges qu'ils supportent.

Nous donnons, figure 1, l'exemple d'un rectangle articulé en ses quatre sommets :

a) sans diagonale ;
b) avec une diagonale ;
c) avec deux diagonales.

Ce rectangle appartient successivement aux trois catégories *a*, *b* et *c*.

Nous pouvons remarquer que les systèmes *a* et *b* sont des systèmes *librement dilatables*. Il est, en effet, possible d'allonger ou de raccourcir la longueur de l'une quelconque des barres, en ne provoquant que des rotations aux nœuds. Par contre, le système *c* s'oppose à toute déformation *isolée* d'un élément et est donc *indilatable*.

Le système *c* est également un système *hyperstatique intérieur* (ou de structure) : voir chapitre III, paragraphe 4.6.

Les catégories de systèmes articulés les plus utilisées en construction sont les catégories *b* et *c* auxquelles appartiennent les *systèmes triangulés* simples (catégorie *b*) ou hyperstatiques (catégorie *c*).

Nous nous limitons à l'étude succincte de quelques cas particuliers de systèmes articulés déformables pour examiner ensuite les systèmes triangulés qui présentent le plus grand intérêt en construction aéronautique.

2. — SYSTÈMES ARTICULÉS DÉFORMABLES

2.1 FIGURE D'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME, COMPOSÉ DE BARRES ARTICULÉES BOUT A BOUT, CHARGÉ PAR UN SYSTÈME DE FORCES CONCENTRÉES AUX DIFFÉRENTS NŒUDS : POLYGONE DE VARIGNON.

Soit (fig. 2), à déterminer la figure d'équilibre d'un système articulé composé des barres AB, BC, CD, DE fixé à ses extrémités A et E et soumis aux trois forces quelconques F_1, F_2, F_3 appliquées aux nœuds B, C et D.

Supposons le problème résolu et soit ABCDE la figure d'équilibre.

Le sommet B est en équilibre sous l'action de la force appliquée F_1 et des réactions R_1 et R_2 fournies par les tensions internes des barres AB et BC, ces réactions étant respectivement dirigées suivant les axes de ces barres (articulations). D'où la décomposition figurée au nœud B.

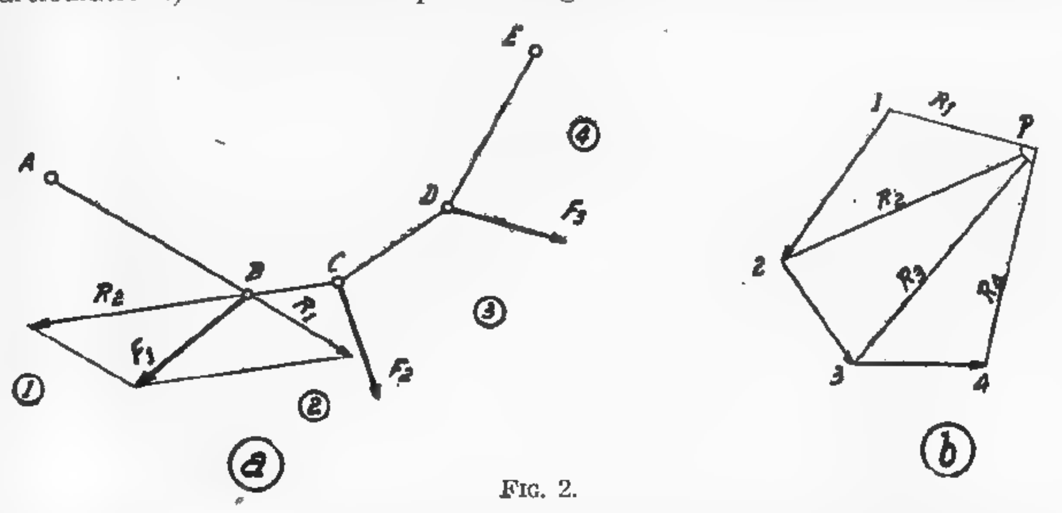


Fig. 2.

Traçons le dynamique des forces F_1, F_2, F_3 et des extrémités 1 et 2 de F_1 menons les parallèles à R_1 et R_2 qui déterminent le point P (voir notations chap. IV).

En raisonnant de même au nœud C on voit que F_2 doit être équilibrée par R_2 et une force inconnue R_3 agissant suivant CD.

• Sur le dynamique, cette force est obligatoirement figurée par le vecteur P — 3 (triangle des forces) ; donc, P — 3 doit être parallèle à CD. On démontre ainsi, en considérant finalement le nœud D que :

La figure d'équilibre d'un système articulé déformable est donnée par un polygone funiculaire des forces appliquées.

Le pôle P est tel que le polygone funiculaire passe par A et E et que la longueur de chaque côté soit égale à la longueur de la barre correspondante.

La construction de la figure d'équilibre peut se faire par approximations successives en se donnant différents pôles.

Cette construction s'appelle le *polygone de* VARIGNON.

On voit également que les rayons polaires de ce polygone funiculaire mesurent les réactions fournies par chacune des barres c'est-à-dire les *efforts internes* agissant dans chacune d'elles. Ce sont, dans le cas de la figure, des efforts de traction.

Les réactions extérieures en A et E sont données par les vecteurs R_1 et R_4.

Remarque. — Il existe, en réalité, deux figures d'équilibre pour le système étudié ; la deuxième présentant une allure convexe au lieu d'une allure concave, c'est-à-dire que les points B, C et D seraient situés au-dessus de la base AE.

Cette deuxième figure constitue un état d'*équilibre instable.* Dès que le système est écarté de cette position, il tend à s'effondrer et à venir se stabiliser suivant la forme d'équilibre concave.

Dans la figure d'équilibre instable, les barres seraient comprimées au lieu d'être tendues.

2.2 APPLICATION AUX SYSTÈMES FLEXIBLES.

2.21 Définition. — On désigne par *système flexible* (ou *système souple*) un système ne présentant pas de rigidité appréciable dans un sens normal à son axe longitudinal (fil, corde, câble souple, courroie, etc...).

Un tel système peut être assimilé à un système articulé déformable dans lequel les barres ont une longueur infiniment courte (nombre d'articulations infini).



FIG. 3.

2.22 Pont suspendu. — Une application directe de la théorie précédente est fournie par la recherche de la *figure d'équilibre* d'un câble de pont suspendu soumis à des charges localisées dues aux brins de suspension du tablier du pont (fig. 3).

Etant données les charges sur chaque brin, on trouve (par approximations successives) un polygone funiculaire qui passe par les deux origines connues (attaches extrêmes A et B du câble considéré sur les montants du pont) et dont la longueur développée doit être égale à celle du câble.

Dans le cas de charges égales et de brins équidistants, ce qui revient à une charge uniformément répartie en projection, on démontre que le polygone d'équilibre est l'enveloppe d'une *parabole.*

Si une des charges augmente (passage d'un véhicule par exemple), la forme d'équilibre du câble se modifie de telle façon qu'elle reste toujours le polygone funiculaire des charges. C'est ce qui explique le « mouvement de vague » facilement observable pour le tablier d'un pont suspendu, au moment du passage d'un véhicule lourd.

2.23 Figure d'équilibre d'un fil pesant. — Sous l'action de son poids propre, un fil accroché en deux points et non tendu, prend une figure d'équilibre qui est la courbe funiculaire de la charge répartie due à son poids (charge uniformément répartie le long du fil, c'est-à-dire de la figure d'équilibre elle-même).

On démontre mathématiquement que cette courbe d'équilibre est une *chaînette.* Elle est d'autant plus voisine d'une parabole que la flèche (c'est-à-dire la courbure) est faible.

2.24 Tensions dans les conducteurs aériens.

2.241 *Définition* (fig. 4 *a*). — Soit un conducteur aérien de densité linéaire p (c'est-à-dire dont l'unité de longueur pèse un poids p) accroché en deux points A et B, distants de 2L.

Nous supposerons que la flèche f est suffisamment petite pour que la figure d'équilibre du conducteur considéré puisse être assimilée à une parabole.

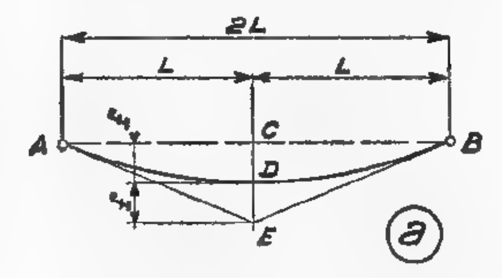
Traçons les tangentes à cette courbe en A et B.

D'après une propriété de la parabole, ces tangentes se coupent sur la verticale de C en un point E tel que

$$CD = DE = f.$$

La charge appliquée totale est le poids du fil soit :

$$P = 2\,pL$$



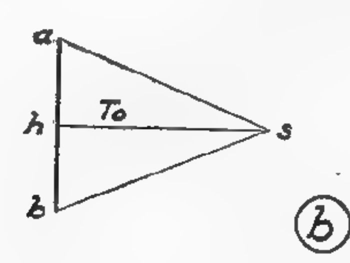


Fig. 4.

Traçons le dynamique des forces appliquées au fil. Son enveloppe est représentée par le triangle abS (fig. 4 *b*) déterminé par ab égal au poids P (à l'échelle des forces) et par les parallèles aS, bS à AE et EB, respectivement égales aux réactions en A et B. La hauteur Sh représente la tension T_0 au point D puisque c'est le rayon polaire correspondant à ce point qui est le plus bas de la courbe.

Considérons les triangles semblables BCE et Shb :

$$\frac{Sh}{BC} = \frac{hb}{CE} \qquad \text{soit} \qquad \frac{T_0}{L} = \frac{pL}{2f}.$$

D'où on déduit :

$$T_0 = \frac{pL^2}{2f}.$$

Soit ω le poids spécifique du matériau constituant le conducteur. On a

$$p = \omega S.$$

S étant la section du fil ; la tension en D, qui est la tension minimum supportée par le fil, sera donc égale à

$$T_0 = \frac{\omega S L^2}{2f}.$$

Sur la figure, nous avons exagéré la courbure de la courbe pour la commodité du dessin.

En réalité, la flèche est très petite et la tension maximum en A et B diffère peu de cette valeur (l'angle $\widehat{aSb}$ est très aigu).

La tension dans le fil est inversement proportionnelle à la flèche et proportionnelle au carré de la longueur.

2.242 *Flèche minimum.* — Il existe donc une *flèche minimum* f_m au-dessous de laquelle il y aurait rupture. Cette valeur est atteinte lorsque la contrainte de traction $n = \frac{T_0}{S}$ est égale à la contrainte admissible n_a. On a donc, dans ce cas

$$n_a = \frac{T_0}{S} = \frac{\omega L^2}{2 f_m}$$

d'où

$$\boxed{f_m = \frac{\omega L^2}{2\, n_a} = \text{flèche minimum.}}$$

2.243 *Application numérique.*

Soit un câble de cuivre de poids spécifique $\omega = 9$ kg/dm³. On se limite, par suite des surcharges dues à la neige, à la glace et au vent, à une contrainte admissible $n_a = 6$ kg/mm². La portée est de 100 m. Calculer la flèche minimum.

$$n_a = 6 \text{ kg/mm}^2 = 6 \cdot 10^6 \text{ kg/m}^2.$$

$$L = \frac{100}{2} = 50 \text{ m},$$

$$\omega = 9 \text{ kg/dm}^3 = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

La flèche minimum est donc égale à :

$$f_m = \frac{9 \cdot 10^3 \quad 50^2}{2 \quad 6 \quad 10^6} = 1{,}875 \text{ m}.$$

4.43 **Remarques.** — La flèche totale du câble se compose d'une flèche due à la *forme d'équilibre* elle-même (le câble étant supposé infiniment rigide en traction) et d'une *flèche supplémentaire due à la déformation élastique* du câble sous les efforts qu'il subit. La flèche minimum calculée est, en réalité, la somme de ces deux termes.

3. SYSTÈMES TRIANGULÉS PLANS

3.1 DÉFINITION.

On désigne par *système triangulé plan* (ou *réticulaire*) un système articulé constitué par une juxtaposition de triangles, chaque triangle successif étant construit *en utilisant comme base l'un des côtés des triangles précédents* (voir fig. 5).

Le système obtenu est bien indéformable ; chaque sommet étant défini en position par la longueur des barres qui ont servi à le déterminer (point de rencontre de deux arcs de cercle). Il est *strictement* indéformable car si l'on supprime l'un des côtés, il devient déformable.

3.2 RELATION ENTRE LES NOMBRES DE NŒUDS ET DE BARRES.

Partons d'un triangle de base ABC (fig. 5) et ajoutons-lui successivement d'autres triangles pour former le système.

Désignons par :

N le nombre total de triangles ;
b le nombre total de barres ;
n le nombre total de nœuds.

Le premier triangle possède trois barres et trois nœuds.

En ajoutant un triangle on ajoute deux barres et un nœud. Les N-1 triangles ajoutés au premier, pour donner N triangles, ont donc ajouté :

2 (N-1) barres et (N-1) nœuds.

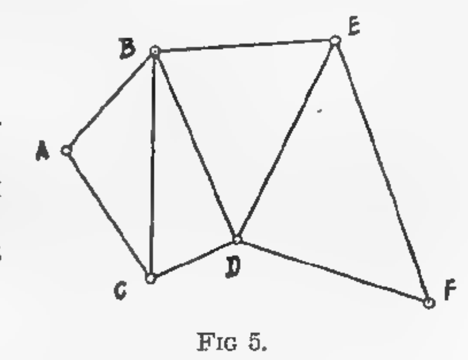


Fig 5.

On a donc :

$$b=3+2(N-1) \qquad (1)$$
$$n=3+(N-1) \qquad (2)$$

De (2) on tire $N-1=n-3$

d'où en remplaçant dans (1)

$$b=3+2\,(n-3)=3+2n-6$$

soit :

$$\boxed{b=2\,n-3.}$$

Règle. — *Le nombre de barres d'un système triangulé plan isostatique est égal au double du nombre de nœuds diminué de trois unités.*

On appelle cette règle la *condition de triangulation* des systèmes plans.

3.3 EXAMEN CRITIQUE DE LA CONDITION DE TRIANGULATION.

Quand un système est *réellement triangulé*, c'est-à-dire composé de triangles juxtaposés suivant la méthode définie ci-dessus, la condition $b=2n-3$ est *nécessaire* et *suffisante* pour obtenir un système strictement indéformable, c'est-à-dire sans surabondance (système isostatique).

Cette condition ne doit pas s'appliquer avec rigueur à un système non formé de triangles, car elle donnerait alors parfois des résultats erronés.

Exemple. — Le système de la figure 6 *a* possède sept nœuds et onze barres. Il répond donc à la condition : $b=2n-3$, et cependant il est visible

que la partie ABCD peut se déformer en parallélogramme. Cette partie est déformable et la partie CDEF est triangulée surabondante ($n=5, b=8$).

L'ensemble n'est pas triangulé et est déformable.

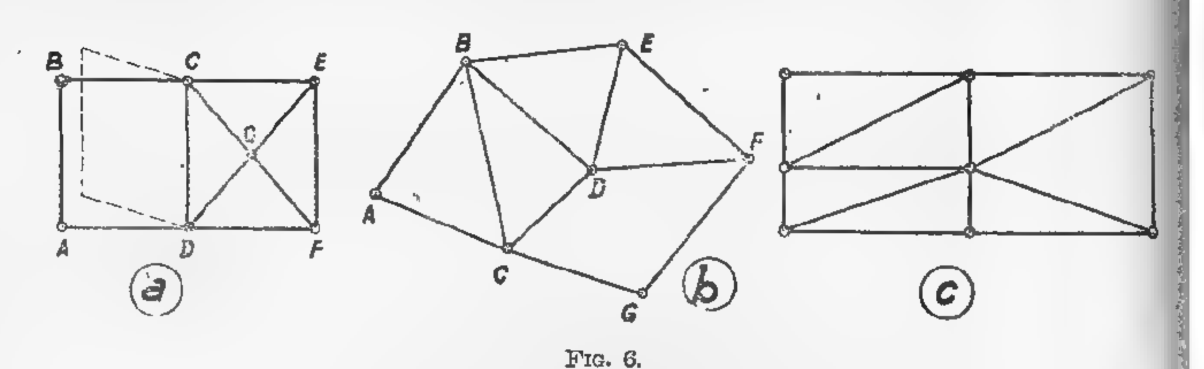


Fig. 6.

Remarque. — Il existe cependant des systèmes strictement indéformables et non réellement triangulés ; on en trouvera un exemple figure 6 *b*. Ce système répond à la loi $b = 2n - 3$ bien que l'espace CDFG ne soit pas un triangle et l'on voit aisément qu'il est indéformable.

Conclusion. — Il faut donc simplement retenir que la loi ($b = 2n - 3$) s'applique *sans restriction à un système réellement triangulé*, mais qu'il faut l'appliquer *avec prudence à un système présentant un ou plusieurs espaces non triangulaires.*

Exemples de systèmes triangulés surabondants. — En ajoutant la barre DG au système de la figure 6 *b* on obtiendrait un système réellement triangulé (tous les intervalles sont bien triangulaires) avec une barre surabondante.

On aurait, en effet

$$n=7 \quad \text{d'où} \quad 2\,n-3=11 \quad \text{et} \quad b=12>11.$$

La figure 6 *c* donne un autre exemple de système triangulé à une barre surabondante : huit nœuds et quatorze barres.

La figure 7 donne un exemple de système triangulé plan avec quatre barres surabondantes : douze nœuds et vingt-cinq barres.

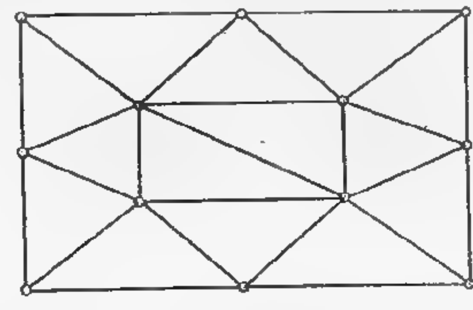


Fig. 7.

3.4 HYPOTHÈSES GÉNÉRALES ADMISES POUR LE CALCUL DES SYSTÈMES TRIANGULÉS.

3.41 Hypothèse concernant la structure. — Par définition, nous avons admis que les systèmes triangulés étaient une catégorie de systèmes *articulés*, c'est-à-dire que toutes les barres étaient reliées entre elles par des *articulations*.

En réalité, les éléments longitudinaux sont, la plupart du temps, *continus* et les assemblages sont rarement réalisés par des articulations pures, mais le plus souvent, par des goussets rivés ou boulonnés ou encore par soudure autogène ou soudure électrique (poutres en treillis).

Les méthodes de calcul que nous exposons ci-après supposeront toujours les barres articulées aux nœuds.

L'expérience prouve que cette hypothèse est très admissible si les barres sont longues (grand élancement), c'est-à-dire si elles ont une rigidité de flexion faible, vis-à-vis de leur rigidité en traction ou compression axiales.

Dans le cas contraire, il y aurait lieu d'apporter des *corrections de rigidité des nœuds* qui sortent du programme de notre exposé.

3.42 Hypothèse concernant les charges appliquées. — Nous supposerons toujours également que *les charges extérieures* (actions et réactions) *sont appliquées aux nœuds* des systèmes. Il arrive parfois que le point d'application réel est différent, ce qui crée dans les barres des *efforts secondaires* que nous examinerons ultérieurement (chap. XVIII).

En règle générale, pour obtenir légèreté et rigidité maxima, éviter ces efforts secondaires. En particulier, faire converger les axes des barres d'un nœud *en un même point* (nœud théorique).

La figure 8 donne deux exemples de montage d'une rotule servant à fixer un système triangulé (bâti-moteur par exemple).

Le montage (*a*) plus simple, présente l'inconvénient de créer un *moment secondaire* dû à l'excentricité *d* du nœud théorique et du centre de la rotule où sont appliquées les réactions.

Le montage (*b*) est plus correct du point de vue des charges dans les barres. La perturbation disparaît (théoriquement) à la sortie du gousset.

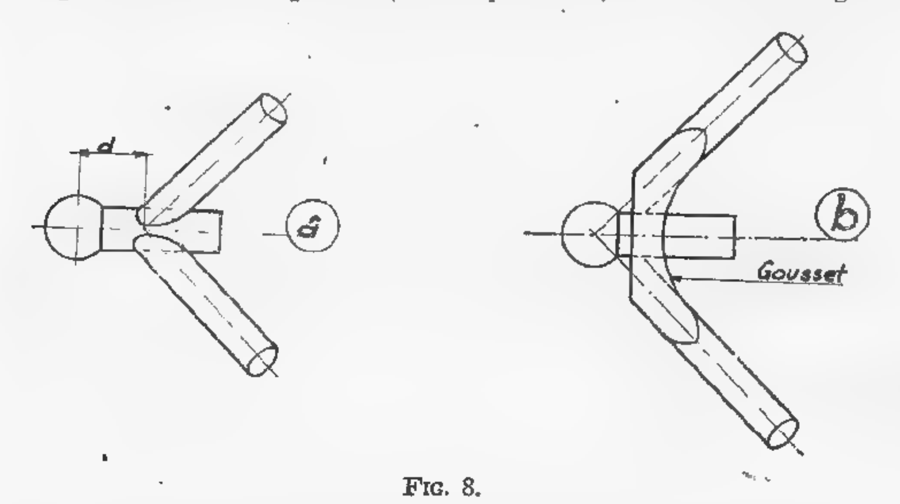


Fig. 8.

3.43 Efforts internes. Convention de signes. — Dans les hypothèses ci-dessus, les barres d'un système triangulé ne sont donc soumises qu'à des *efforts dirigés suivant leurs axes.*

Ces efforts agissent en *traction* (tendance à allonger les barres) ou en *compression* (tendance à les raccourcir).

Nous conviendrons du signe

+ pour les efforts de compression,
— pour les efforts de traction.

3.44 Méthodes de résolution. — Résoudre un système triangulé consiste à déterminer les efforts internes agissant dans ses barres. Nous exposons ci-après les méthodes de résolution les plus classiques.

3.5 METHODE DE CRÉMONA.

3.51 Principe de la méthode. — La méthode de résolution des systèmes triangulés plans, dite *méthode de* Crémona est basée sur *l'équilibre des nœuds*.

Chaque nœud constitue un système d'efforts convergents en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qui lui sont appliqués d'une part (actions et réactions) et des efforts internes (ou efforts dans les barres) d'autre part.

Les *forces connues* appliquées à un nœud se réduisent à une résultante qu'il s'agit de décomposer suivant les directions des barres à calculer (barres inconnues).

Le problème n'est donc déterminé, dans le plan, que si le nœud présente au plus deux barres inconnues (voir chap. II, § 4). On effectue alors la décomposition classique d'une force en deux directions.

La figure 9 donne l'exemple d'un nœud O sollicité par les forces extérieures F_1, F_2 et par la tension T de la barre OC (fig. 9 *a*).

La résultante R de ces forces est à décomposer suivant les directions des barres inconnues OA et OB, ce qui peut se faire des deux façons représentées sur la figure 9 *b* (vecteurs *ac* et *cb* ou *c'b* et *ac'*). Ces deux façons donnent des *résultats identiques*. Le problème est donc bien déterminé.

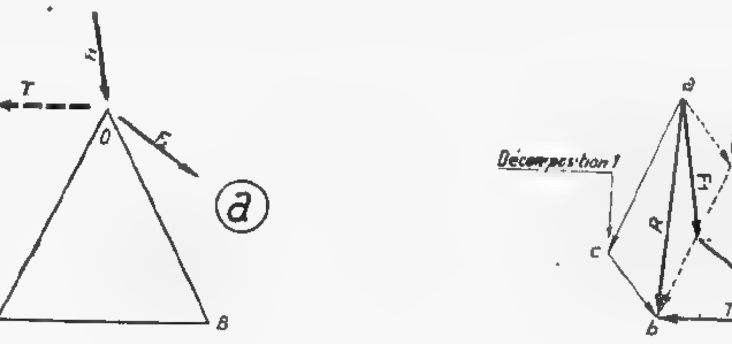


Fig. 9.

3.52 Règle de Crémona. Notations. — Le *tracé de Crémona* permet d'opérer *par un seul tracé* toutes les décompositions successives aux nœuds et a, de plus, l'avantage de donner une vérification dite : *vérification de fermeture*.

C'est la méthode de résolution la plus pratique, elle est donc à conseiller d'une manière générale. Son emploi est facilité par le système de notations que nous exposons ci-après (système analogue à celui déjà utilisé en Statique graphique).

Nous allons exposer la méthode de Crémona en l'appliquant à la détermination des efforts dans les barres de la ferme représentée figure 10 (système plan reposant sur deux appuis simples A et H).

Il y a lieu d'effectuer successivement les opérations suivantes :

a) *Mettre le système en équilibre.* — Pour cela, il suffit de déterminer les réactions sur appuis soit par le calcul, soit par application de la statique graphique. Dans le cas particulier qui nous occupe, la ferme étant symétrique et symétriquement chargée, on voit que les réactions en A et B sont toutes deux égales à

$$-\frac{4\ F}{2} = -2\ F.$$

(Les appuis A et H étant simples, ils ne peuvent réagir que normalement à la direction AH.)

b) *Se donner un sens positif de rotation* qui est, sur la figure 10, celui

indiqué par la flèche. Ce choix est purement arbitraire mais le sens positif choisi doit être conservé par la suite.

c) *Numéroter ensuite tous les intervalles entre les forces* extérieures (actions et réactions) et entre les barres. L'ordre du numérotage est sans importance.

d) *Tracer, ensuite, le dynamique des forces appliquées et des réactions.* La ferme étant en équilibre, ce dynamique doit se fermer, ce qui constitue une première vérification de calcul des réactions (somme des projections nulles).

e) *Commencer alors le tracé de Crémona par un nœud ne comportant que deux barres.* Dans tout ce qui suivra, nous conviendrons d'indiquer en *italique* les barres subissant des efforts inconnus à déterminer par le tracé.

Partons du nœud A. La force appliquée se lit 5 — 1 (réaction $R_A =$ — 2F) et les barres inconnues sont

1—6 et *6—5.*

Nous lirons cet ensemble (dans le sens positif choisi)

5—1, *1—6*, *6—5.*

On part du point 5 du dynamique construit (opération *d*). On suit 5 1 sur ce dynamique (c'est-à-dire la force — 2F). A partir du point 1, on trace une droite parallèle à la barre *1 — 6* (barre AB) et, à partir du point 5 une droite parallèle à la barre *6 — 5* (barre AD). Le point de concours de ces droites donne le point *6* cherché. Les longueurs *1 — 6* et *6 — 5* représentent (à l'échelle des forces), les efforts dans les barres *1 — 6* et *6 — 5*. (Cocher ces barres sur le tracé de la poutre pour se rappeler qu'elles sont déterminées.)

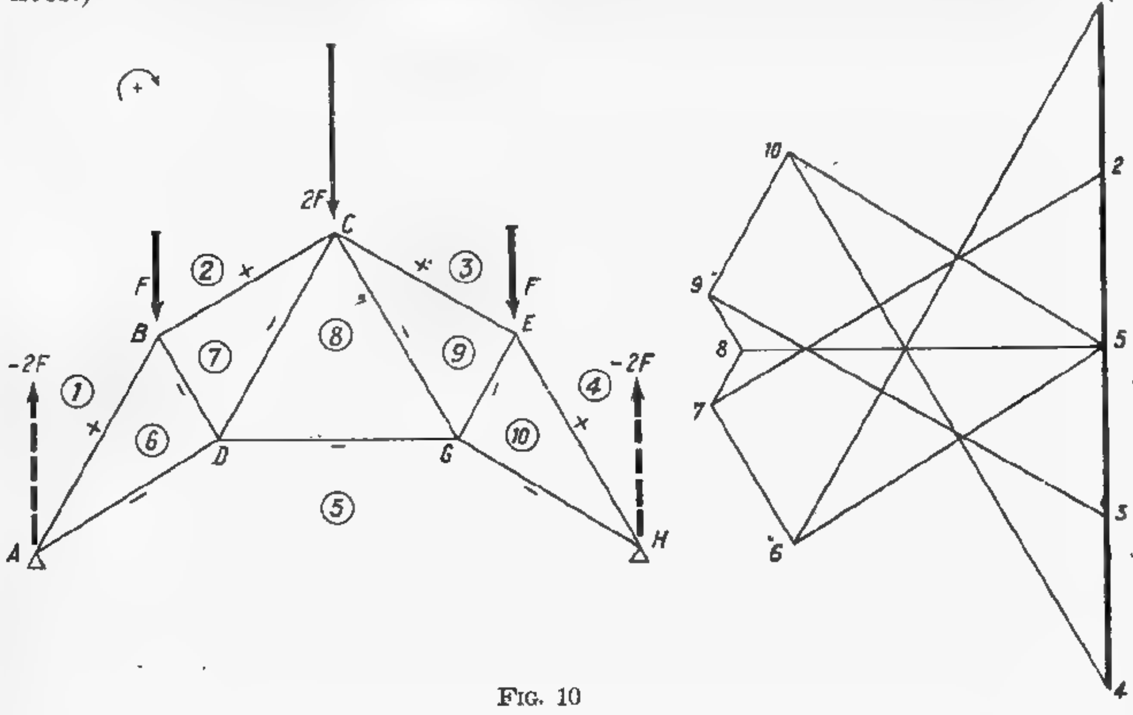


Fig. 10

f) *Continuer ensuite le tracé en passant à un autre nœud ne comportant que deux barres inconnues.* Nous prendrons donc ici le nœud B. Ce nœud comporte comme inconnues, lues dans le sens de rotation positif indiqué, les barres *2 — 7* et *7 — 6*: Lire successivement, dans le sens positif choisi, tous les éléments (forces et barres) intéressant le nœud considéré en commençant par le *numéro de l'intervalle qui suit immédiatement la dernière*

barre inconnue rencontrée en tournant autour de ce nœud dans le sens positif. Nous commencerons donc ici (nœud B) par l'intervalle 6 qui suit la barre *7 — 6* et nous lirons

6—1, 1—2, 2—7, 7—6.

A partir du point 6 précédemment déterminé sur le tracé, nous suivons 6 — 1, 1 — 2, nous traçons une droite parallèle à la barre *2 — 7* passant par 2 et une droite parallèle à la barre *7 — 6* passant par 6. Le point d'intersection de ces deux directions nous donne le point 7 cherché ;

g) On continue de même selon ci-dessous :

Nœud D :	5-6,	6-7,	*7-8,*	*8-5,*		on obtient le point	8 ;
Nœud C :	8-7	7-2,	2-3	*3-9,*	*9-8*	»	9 ;
Nœud E :	9-3,	3-4,	*4-10,*	*10-9,*		»	10.

h) Les deux nœuds restants G et H ne comportent plus qu'une seule barre inconnue qui est la barre *10 — 5* (barre GH).

Or, les points 10 et 5 sont déjà déterminés. Il faut donc que la droite qui joint ces points soit parallèle à la barre *10 — 5*, ce qui constitue la *vérification de fermeture du tracé de Crémona.*

Cette fermeture constitue non seulement une vérification du graphique, c'est-à-dire du parallélisme des barres et des vecteurs, mais une vérification des réactions (vérification de l'équilibre des moments).

i) Le tracé de Crémona étant achevé, nous connaissons, avec l'échelle des forces, la *valeur des efforts* dans les différentes barres du système. Il faut maintenant déterminer le *sens de ces efforts*, c'est-à-dire savoir si les barres sont comprimées ou tendues. La méthode de numérotation adoptée donne une règle de discrimination très pratique.

Déterminons, par exemple, la nature de l'effort dans la barre CD. Cette barre, considérée comme appartenant au nœud C (c'est à-dire en supposant un observateur situé à ce nœud C) se lit, dans le sens de rotation positif adopté, barre 8 — 7. Le tracé de Crémona indique que l'effort 8 — 7 est dirigé dans le sens $\overline{CD}$ sur la figure. La barre 8 — 7 *tire* donc *sur le nœud* C ; c'est une barre *tendue.*

Si nous avions considéré cette barre comme appartenant au nœud D, nous l'aurions lue 7 — 8. Le diagramme de Crémona indique alors que 7 — 8 est dirigé suivant DC, donc que la barre *tire* également sur le nœud D et est par suite tendue. On peut donc considérer l'une ou l'autre extrémité de la barre à condition de respecter le sens de rotation adopté.

En nous plaçant en B, la barre BA se lit 6 — 1. Cette direction lue sur le Crémona *pousse sur le nœud.* La barre BA est donc *comprimée.*

Règle. — *Une barre est comprimée quand la direction matérialisée par sa lecture pousse sur le nœud considéré.*

Une barre est tendue quand cette direction tire sur le nœud considéré.

Avec la convention de signes du paragraphe 3.43, la figure 10 donne le sens des efforts dans toutes les barres de la ferme.

3.53 Cas particuliers. Application. — La méthode de Crémona ne peut s'appliquer qu'à des nœuds ne comportant que deux barres inconnues au maximum. Dans l'exemple précédent, le cas de trois barres inconnues s'est présenté au nœud C après avoir calculé les nœuds A et B. La difficulté a été résolue en calculant le nœud D, ce qui a permis de déterminer une barre du nœud C.

Parfois il est impossible de continuer le tracé de Crémona en considérant les nœuds voisins de celui où s'est trouvé la difficulté ; il est alors nécessaire de recommencer le Crémona en considérant l'autre extrémité de figure. C'est le cas de la *poutre de fuselage* étudiée **Planche 14.**

En partant à l'origine de l'avant, on aboutit aux nœuds E et M qui possèdent chacun trois barres inconnues.

En partant uniquement de l'arrière on aurait trouvé la même difficulté en C, D et M.

Mais les barres FC et AM ayant été déterminées en partant de l'avant, il est possible, si l'on a effectué les deux départs, de terminer le tracé de Crémona.

C'est la méthode qui a été utilisée *Planche* 14 pour opérer ce tracé.

Nous avons également indiqué sur cette Planche les grandeurs des efforts internes agissant dans toutes les barres ainsi qu'un résumé des opérations de mise en équilibre externe de la poutre.

3.54 Impossibilité d'emploi de la méthode de Crémona. — Parfois, il y a impossibilité de résoudre le problème par la méthode de Crémona tout en ayant affaire à un système triangulé non surabondant ; c'est le cas de la ferme Polonceau à six contrefiches représentée figure 12 ci-après. Arrivé aux nœuds D et E on trouve trois barres inconnues à chacun de ces nœuds (en partant de l'une et l'autre extrémité) et cependant le système est bien triangulé simple, car $n = 14$ et $b = 25 = (2n - 3)$.

Nous indiquons plus loin le moyen de résoudre le problème (3.63).

3.6 MÉTHODE DES MOMENTS OU DE RITTER.

3.61 Avantages de la méthode.— Cette méthode est très utile lorsqu'on désire connaître les efforts dans une barre sans avoir à calculer les efforts agissant sur toutes les autres, ce que ne permet pas la méthode de Crémona.

3.62 Méthode. — Soit à déterminer l'effort dans une barre BC (fig. 11) d'un système triangulé en équilibre. Imaginons une section *mn* ne rencontrant que trois barres du système.

Soient X, Y et Z les efforts supportés par les trois barres coupées par cette section. Ces forces, appliquées à la partie située à droite de la section, doivent être équivalentes aux forces extérieures appliquées à gauche de cette section, puisque le système est en équilibre statique.

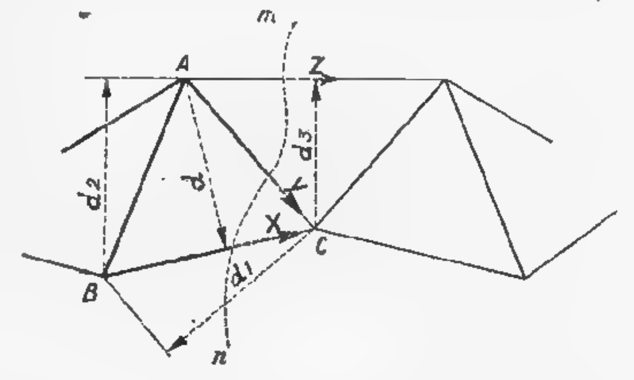


Fig. 11.

On doit donc avoir, d'après la propriété essentielle des systèmes en équilibre : somme des moments (par rapport à un point quelconque) des forces extérieures de gauche = somme des moments (par rapport au même point) des forces intérieures X, Y et Z.

Afin d'éliminer Y et Z, nous évaluerons les moments par rapport au point de concours de deux barres, c'est-à-dire par rapport au nœud A.

Les moments de Y et Z par rapport à ce point sont évidemment nuls. Nous devons donc avoir

$$X\ d = -M_A \quad \text{d'où} \quad X = -\frac{M_A}{d}$$

M étant le moment par rapport à A des *forces extérieures de gauche*.

Si l'on désire connaître Y et Z, il suffit de prendre les moments par rapport à B et C.

On a alors :

par rapport à C

$$Z\ d_3 = -M_C \qquad \text{d'où} \qquad Z = -\frac{M_C}{d_3}$$

par rapport à B

$$Z\ d_2 + Y\ d_1 = -M_B \qquad \text{soit} \qquad Y\ d_1 = -M_B + \frac{M_C \cdot d_2}{d_3}$$

$$Y = -\frac{1}{d_1}\left(M_B - M_C\ \frac{d_2}{d_3}\right).$$

Remarques. — *a*) On aurait pu également, pour le calcul de Y, écrire l'équilibre des projections suivant la direction Y, des forces extérieures de gauche et des efforts X et Z ;

b) On peut se donner pour X, Y et Z des *sens arbitraires*, le signe du résultat indique si ce sens est le sens réel (signe +) ou si le sens réel est opposé à ce sens arbitraire (signe —).

3.63 **Application à la ferme Polonceau à six contrefiches.** — Nous avons vu au paragraphe 3.54 précédent qu'aux nœuds D et E (fig. 12), la méthode de Crémona se révélait inapplicable.

La méthode de Ritter va nous permettre de résoudre le problème et de poursuivre le Crémona. Pour cela, faisons la section indiquée sur la figure 12. En appliquant la méthode de Ritter et en prenant les moments par rapport au point K, on détermine l'effort X dans la barre EE'. Le nœud E ne compte donc plus que deux barres inconnues et l'on peut continuer le tracé de Crémona.

On peut d'ailleurs déterminer le vecteur représentant l'effort X par la *statique graphique*. Construisons un funiculaire des forces extérieures en prenant *l* comme distance polaire et soit MN le segment intercepté par le polygone funiculaire sur la verticale passant par K (fig. 12 *a*) (*l* : distance de K à EE').

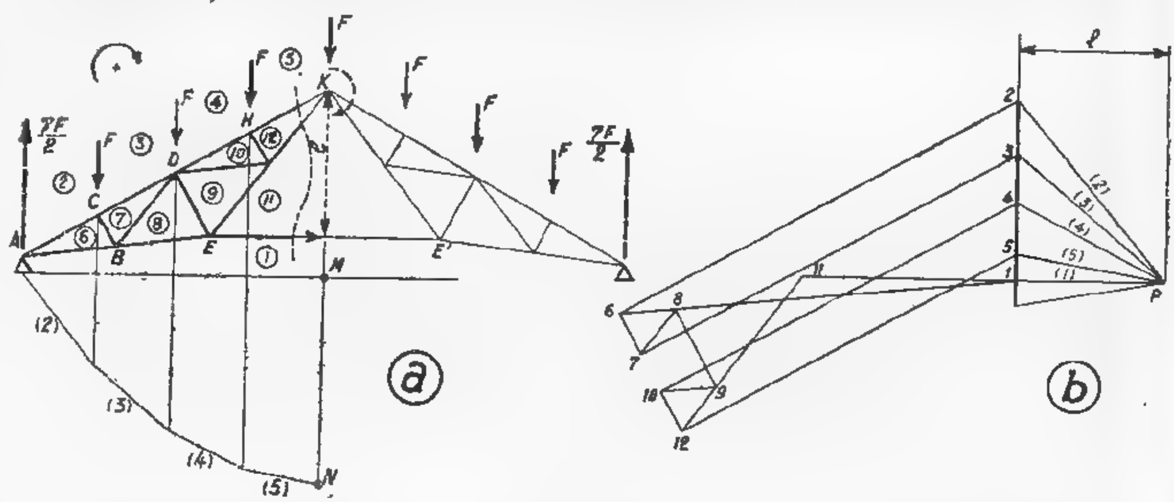


Fig. 12.

En désignant par M_K le moment résultant par rapport à K des forces extérieures appliquées aux nœuds A, C, D, H (ou le moment par rapport à K de la résultante R de ces forces extérieures) on a :

$$(n \cdot X) \cdot (e \cdot l) = -M_K$$

e étant l'échelle des longueurs (telle que 1 mm tracé$=e$ mm réels) et *n* étant l'échelle des forces (telle que 1 mm dynamique$=n$ kg).

Or, on sait (chap. IV, § 4.) que le moment M_K par rapport au point K des forces 1 à 5 est donné par

$$M_K = \overline{MN} \cdot e \cdot n \cdot l.$$

Des deux relations précédentes on tire

$$n \cdot X \cdot e \cdot l = -\overline{MN} \quad e \cdot n \cdot l$$

d'où

$$X = -\overline{MN}.$$

Il suffit donc de porter un vecteur (1 — 11) égal à $\overline{MN}$ (fig. 12 *b*) dirigé dans le sens de l'effort X (barre EE'). Or, on voit aisément que le sens du moment de R par rapport à K est celui indiqué par la flèche marqué en K. Pour réagir à ce moment, X doit avoir le sens indiqué sur la figure 12 *a*. C'est donc un *effort de traction.*

Le tracé de Crémona peut alors se continuer normalement. La figure 12 *b* donne l'ensemble de ce tracé pour une demi-ferme.

3.7 METHODE DES SECTIONS OU DE CULMANN.

C'est une méthode presque analogue à celle de Ritter. La section à effectuer dans le système triangulé ne doit rencontrer que *trois barres* (fig. 13). La *partie droite* de la section sera en équilibre sous l'action de la résultante R_G des *forces extérieures* (actions et réactions) situées *à gauche* de la section et sous l'action des *efforts intérieurs* X, Y, Z dans les barres sectionnées. Le problème consiste à décomposer R_G suivant trois directions (directions des barres). Il est toujours possible de faire glisser la résultante R_G sur son support jusqu'à l'amener en contact avec l'une des barres coupées ou son prolongement (ici barre DC). On décompose alors R_G en X et F suivant les directions DC et HA. En faisant glisser la force F jusqu'en F' la décomposition de cette dernière force suivant les deux barres sectionnées AB et AC donne les efforts Y et Z supportés par ces barres. Le problème est ainsi résolu.

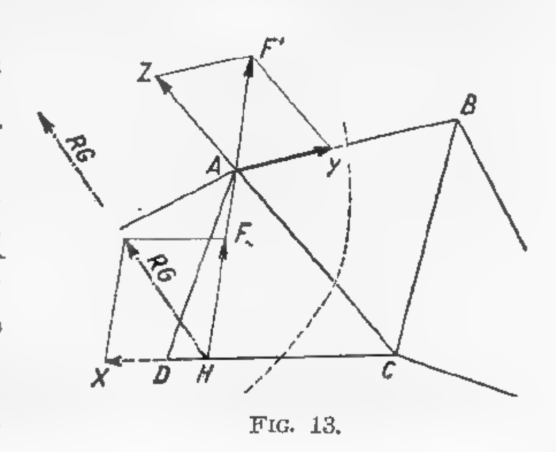


Fig. 13.

Remarque. — La résultante R_G peut être recherchée par la *statique graphique*, ce qui entraîne une résolution purement graphique du problème de la détermination des efforts dans les barres d'un système triangulé par la méthode de Culmann.

La méthode de Culmann présente les mêmes avantages que celle de Ritter.

3.8 RESOLUTION DES SYSTÈMES TRIANGULÉS PLANS AVEC BARRES SURABONDANTES.

Nous avons vu que, dans le cas où l'on a

$$b > 2 \quad n - 3$$

le système triangulé présente une ou plusieurs *barres surabondantes*, le nombre de ces barres étant justement défini par la différence entre les deux membres de l'inégalité ci-dessus (voir exemples § 3.3 et fig. 6 *c* et 7).

3.81 Cas général. — De tels systèmes sont *hyperstatiques intérieurs* (voir chap. III, § 4.). Leur résolution générale doit se faire en utilisant des

conditions de déformation qui fournissent un nombre d'équations supplémentaires égal au nombre de barres surabondantes.

Nous traiterons ce problème ultérieurement au chapitre XVIII.

3.82 Cas particuliers. — Il existe cependant des cas où l'indétermination peut être levée directement par des *hypothèses raisonnables* dues principalement à des *considérations de symétrie.*

C'est le cas, par exemple, du rectangle articulé à deux diagonales représenté figure 1 *c*. Si les diagonales ont *même échantillonnage*, c'est-à-dire même section, et si les efforts et réactions sont symétriquement répartis aux nœuds A, C et B, D, il est raisonnable (et même rigoureux) d'admettre que les diagonales COB et AOD sont également chargées, l'une étant comprimée et l'autre tendue. On détermine alors aisément les efforts dans toutes les barres [1].

Dans l'exemple, plus général, de la figure 14 *a* (*poutre à plusieurs travées avec doubles diagonales symétriques*) l'hypothèse de résolution est la même.

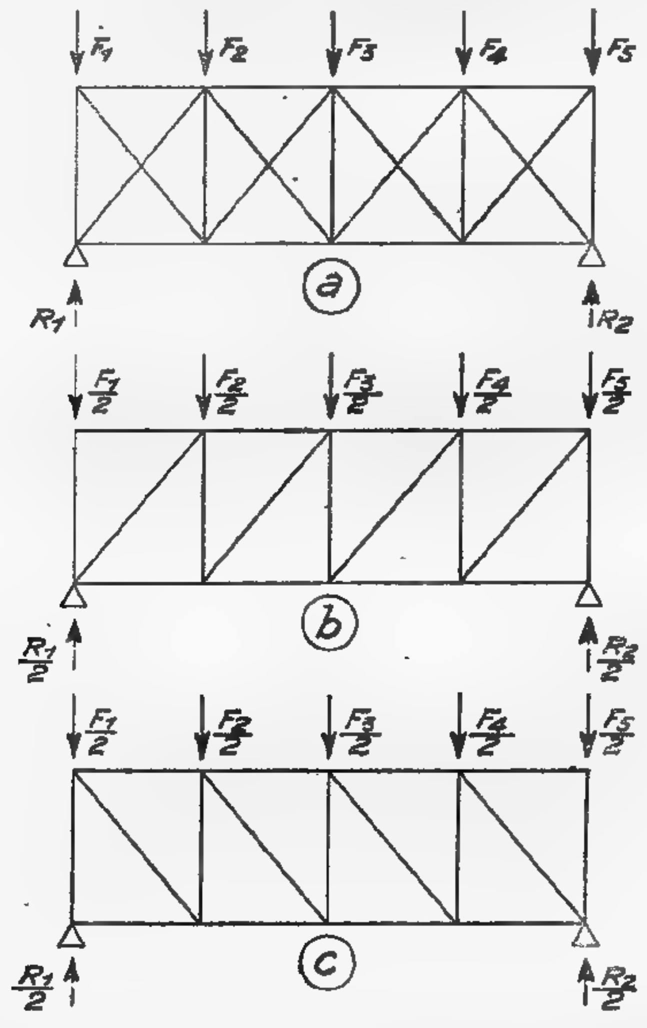


Fig. 14.

Pour résoudre directement le problème graphiquement, il suffit d'effectuer un premier Crémona avec la moitié des charges et la figure 14 *b* et un deuxième avec les mêmes charges et la figure 14 *c*. Les efforts totaux s'obtiennent par addition des efforts partiels obtenus par ces deux tracés.

1. — Il est bien entendu que la symétrie matérielle des deux diagonales doit être rigoureuse, notamment en ce qui concerne les jeux de leurs articulations.

Remarque. — Dans les exemples ci-dessus, les doubles diagonales sont supposées *rigides* (c'est-à-dire travaillant aussi bien en compression qu'en traction).

Dans une triangulation double réalisée par des *éléments souples* (cordes à piano, haubans), seul l'élément *tendu* travaille, tout au moins après destruction de la *tension initiale* de l'élément comprimé (chap. VI, § 3.3). Cette triangulation est *isostatique.*

4. SYSTÈMES TRIANGULÉS DANS L'ESPACE

4.1 RELATION ENTRE LES NOMBRES DE NŒUDS ET DE BARRES.

La *figure élémentaire* d'un système triangulé non plan est constituée par une *pyramide à base triangulaire* et l'ensemble du système est formé par une *juxtaposition de pyramides ;* cette juxtaposition s'effectuant d'une manière analogue à la superposition de triangles d'un système triangulé plan (voir ci-dessus § 3.1). On part, par exemple (fig. 15), d'une pyramide ABCD et on lui ajoute les barres convergentes ED, EB, EC qui forment la pyramide BCDE.

Fig. 15.

Désignons par N le nombre de pyramides.

Désignons par n le nombre de nœuds.

Désignons par b le nombre de barres.

La pyramide de base possède quatre nœuds et six barres.

Chaque pyramide successive ajoute au système un nœud et trois barres.

On a donc :

$$n = 4 + (N - 1) \qquad (1)$$

$$b = 6 + 3\,(N - 1) \qquad (2)$$

de (1) on tire : $N - 1 = n - 4$

d'où en portant dans (2) :

$$b = 6 + 3\,(n - 4) = 6 + 3\,n - 12$$

soit :

$$\boxed{b = 3\,n - 6.}$$

Cette relation qui constitue une *condition de triangulation dans l'espace* est sujette à des remarques analogues à la condition ($b = 2n - 3$) établie pour les systèmes triangulés plans (voir ci-dessus § 3.3).

4.2 RESOLUTION DES SYSTÈMES TRIANGULÉS DANS L'ESPACE.

4.21 Cas général. — Dans le cas général, l'équilibre d'un nœud dans l'espace revient à effectuer la *décomposition d'une force suivant trois directions concourantes* fournies par les axes des barres inconnues qui aboutissent à ce nœud. Le système est toujours déterminé (à condition que les trois directions ne soient pas dans un même plan).

Soit, en effet (fig. 16), à décomposer la force F suivant les directions OA, OB et OC. Imaginons un plan passant par F et l'une quelconque des barres, par exemple OB. Ce plan rencontre le plan formé par les deux autres barres OA et OC, suivant la droite d'intersection OM. Décomposons F suivant OB et OM (décomposition dans un plan). On obtient les vecteurs F_B et F_M. La

force F_M étant contenue dans le plan formé par OA et OC, il suffit de décomposer cette force suivant OA et OC pour obtenir les composantes F_A et F_C.

Les *vraies grandeurs* des vecteurs F_A, F_B et F_C mesurent respectivement les efforts dans les barres OA, OB et OC.

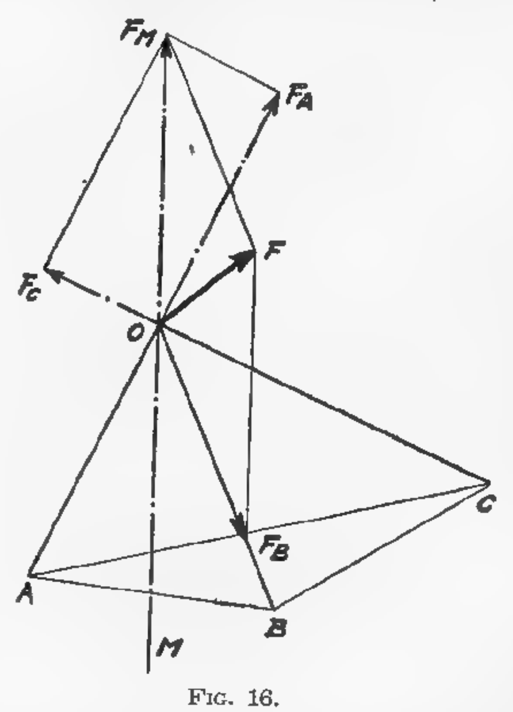


FIG. 16.

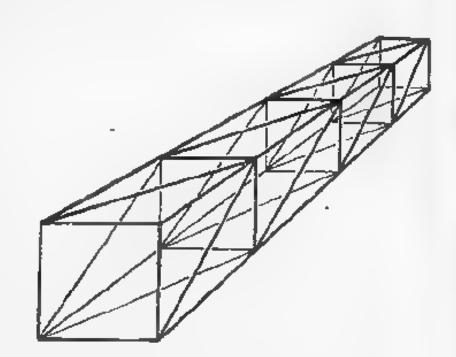
Industriellement, le problème doit être traité sur *deux projections* du système étudié : vue de profil et vue en plan par exemple, en faisant appel à des notions de *géométrie descriptive* pour la recherche des intersections et la mesure des vraies grandeurs.

On conçoit donc qu'il n'existe pas de méthode graphique aussi simple que la *méthode de* CRÉMONA, par exemple.

On considère successivement les nœuds ne présentant que trois barres inconnues au maximum et on effectue généralement les décompositions sur le tracé de la poutre elle-même.

4.22 Cas particuliers. — On se trouve, pratiquement, très souvent en présence de cas particuliers qui simplifient le problème.

4.221 *Poutres à faces planes triangulées.* — L'un des cas les plus fréquents est celui d'une poutre constituée par plusieurs *faces triangulées*, ces faces étant planes ou à faible courbure progressive (sans brisures accentuées). C'est le cas général des fuselages en treillis où l'on a, le plus souvent, quatre faces triangulées (voir fig. 17). On peut alors traiter séparément chaque poutre plane, par la méthode de CRÉMONA par exemple, et l'on ajoute les efforts dans les éléments communs à deux des poutres (longerons).


FIG. 17.

Remarque. — Un tel système ne constitue pas un système triangulé dans l'espace, tel que nous l'avons défini ci-dessus, puisqu'il n'est pas formé d'une succession de pyramides. La condition de triangulation ne s'applique pas. Il suffit simplement de vérifier que chaque face plane est bien triangulée ($b=2n-3$), et que des *cadres* sont capables d'assurer la répartition de torsion qui leur incombe.

4.222 *Poutre avec barres suivant des directions principales.* — Nous entendons par « *directions principales* » des directions qui se projettent suivant un point dans l'une ou l'autre vue. Le problème de décomposition dans l'espace se simplifie alors et revient pratiquement à tracer un parallélogramme des forces dans chaque vue. C'est le cas du *support moteur* étudié **Planche 15.**

La décomposition classique des efforts au nœud B, par exemple, est détaillée sur la figure. La barre BM, se projetant suivant un point en projec-

tion verticale, on peut pratiquement se contenter de construire directement dans cette vue le parallélogramme B, 5, 7, 8. On connaît donc les projections horizontales de 7 et 8 d'où, directement, la direction B — 5 sans avoir à déterminer par un tracé de géométrie descriptive le point *a* qui définit l'intersection de plans B*a*. Même raisonnement au nœud C.

5. CALCUL DES BARRES DES SYSTÈMES TRIANGULÉS

Avec les hypothèses énoncées au paragraphe **3.4** ces barres ne sont soumises qu'à des efforts de *traction* ou de *compression*.

5.1 BARRES TENDUES.

La *contrainte* est directement donnée par :

$$n = \frac{F}{S}$$

ou la *section nécessaire* par :

$$S = \frac{F}{n_a}.$$

5.11 Barres assemblées par des rivets ou boulons. — Les formules ci-dessus sont valables à condition de prendre, pour S, la *section nette*, c'est-à-dire la section droite totale S′ de la barre, diminuée des sections des trous de rivets :

$$S = S' - n\,d\,e$$

avec :

n = nombre de trous de rivets dans la section droite considérée,
d = diamètre d'un rivet,
e = épaisseur de la barre.

5.12 Barres soudées. — On doit prendre pour n_a la *contrainte limite admissible au voisinage des soudures*, car au niveau des soudures le métal est recuit, ce qui lui a fait perdre localement les qualités de résistance dues à la *trempe*.

Par exemple, pour l'acier 20CD4 qui est le plus employé, on aura : n_a = 55 à 60 kg/mm² au lieu des 85 ou 100 kg/mm² que le traitement avant soudure permettait d'obtenir (voir tableau des aciers *Planche* 11). C'est pourquoi l'on effectue souvent des *traitements thermiques après soudure* qui permettent de rétablir l'homogénéité des barres.

5.2 BARRES COMPRIMÉES.

Ces barres ont, en général, une longueur grande, par rapport à leur section. Il y a donc toujours lieu de vérifier leur résistance *au flambage*, ce que nous verrons au chapitre XVI.

5.21 Barres assemblées par des rivets ou boulons. — A l'opposé des barres tendues, si l'assemblage est bien fait, on n'a pas à considérer la section nette, les rivets ou boulons transmettant à peu près normalement leur part de charge par contact, tout au moins quand le métal constituant les barres est entré dans le domaine plastique.

5.22 Barres soudées. — Comme dans le cas des barres tendues, il faut limiter la contrainte admissible à celle trouvée au voisinage des sou-

dures et cette limitation est parfois prépondérante sur celle due au flambage qui se calcule à partir des états traités des barres (caractéristiques des parties médianes de ces barres où s'amorce le phénomène de flambage).

6. DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES DES SYSTÈMES TRIANGULÉS

6.0 POSITION DU PROBLÈME.

Les barres des systèmes triangulés qui, par définition, n'encaissent que des efforts axiaux subissent des *déformations élastiques* se traduisant par des allongements ou des raccourcissements selon que ces barres sont tendues ou comprimées.

Ces déformations se composent entre elles et entraînent une déformation de l'ensemble du système.

Nous donnons ci-après deux méthodes permettant d'évaluer ces déformations d'ensemble :

1° Une *méthode graphique* donnant le déplacement de *tous les nœuds* du système. Cette méthode est connue sous le nom de « *Diagramme de* WILLIOT ».

2° Une méthode plus simple et plus rapide, qui nous permettra de calculer *le déplacement d'un nœud suivant une direction donnée*.

6.1 PREMIÈRE MÉTHODE : DIAGRAMME DE WILLIOT.

6.11 Déplacement d'un sommet d'un triangle articulé.

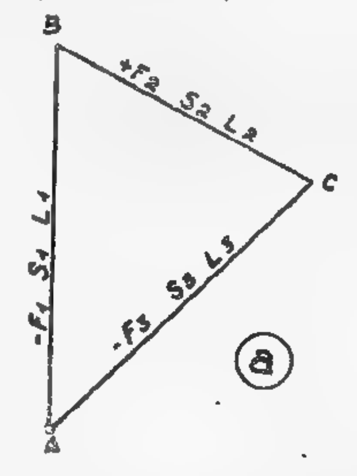
6.111 *Données.* — Soit un triangle ABC (voir fig. 18 *a*).

Nous supposerons que A est un *point fixe*, AB *une direction fixe* (AB se rétracte ou se dilate suivant sa direction). On cherche le déplacement de C. Convenons d'affecter les tractions du signe — et les compressions du signe +.

Soient : S_1 la section, L_1 la longueur de la barre AB et $-F_1$ la force agissant dans cette barre (traction) ;

S_2 la section, L_2 la longueur de la barre BC et $+F_2$ la force agissant dans cette barre (compression) ;

S_3 la section, L la longueur de la barre AC et $-F_3$ la force agissant dans cette barre (traction).



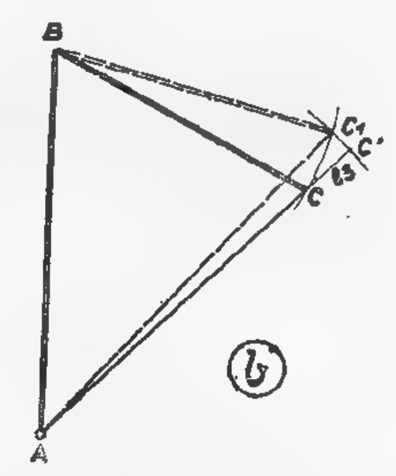


FIG. 18.

D'après le paragraphe 1.3 du chapitre VI, chaque barre subit un allongement ou raccourcissement : $l = \frac{FL}{SE}$ (ces quantités étant affectées de l'indice correspondant à chacune des barres).

Nous allons étudier progressivement le problème, en supposant d'abord une seule barre déformable, puis deux barres déformables et enfin les trois barres déformables.

6.112 *Première hypothèse : AC seulement est déformable.*

La barre AC subit un *allongement* $CC' = l_3 = \dfrac{F_3 \cdot L_3}{S_3 \cdot E}$.

Le point C viendrait donc en C′ (voir fig. 18 *b*) si BC pouvait s'allonger jusqu'à devenir égal à BC′. Mais d'après notre hypothèse cette barre est indéformable. Le point C doit donc venir en un point C_1 tel que $BC_1 = BC = L_2$ et $AC_1 = AC' = L_3 + l_3$.

Un premier lieu de C_1 est un arc de cercle de centre B et de rayon

$$R_3 = AC' = L_3 + l_3.$$

Un deuxième lieu de C_1 est un arc de cercle de centre B et de rayon

$$R_2 = BC = L_2.$$

C_1 est le point de rencontre de ces deux arcs de cercles.

En réalité, l'allongement ou le raccourcissement des barres est très petit.

Exemple. — Supposons, par exemple, une barre de 1 m subissant une contrainte $n = 50$ kg/mm² avec un module d'élasticité $E = 20000$ kg/mm².

L'allongement relatif a pour valeur :

$$\frac{l}{L} = i = \frac{n}{E} = \frac{50}{20000} = 0{,}0025 = 0{,}25\,\%.$$

L'allongement réel est

$$l = 2{,}5 \text{ mm}.$$

Nous voyons ce que nous pouvons, sans erreur appréciable, *confondre les arcs de cercle* CC_1 *et* $C'C_1$ *respectivement avec les perpendiculaires élevées en ces points aux côtés* BC *et* AC′.

D'où la construction :

On prolonge AC d'une longueur $CC' = l_3$ on élève en C′ la perpendiculaire à AC, en C la perpendiculaire à BC. Le point de rencontre C_1 des deux perpendiculaires est la nouvelle position du point C, après déformation.

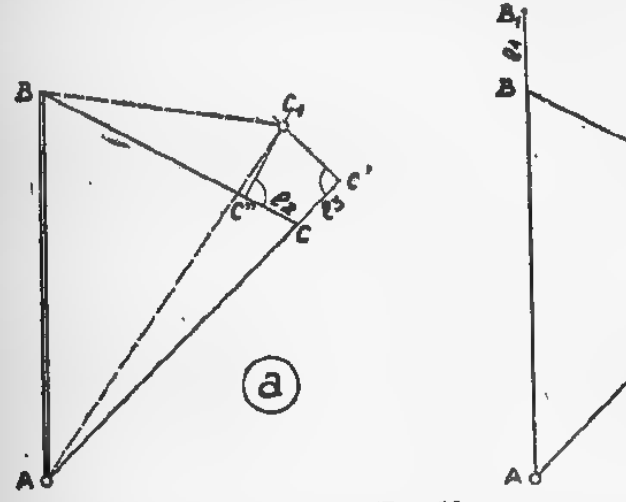


Fig. 19.

6.113 *Deuxième hypothèse.* AC et BC sont déformables (voir fig. 19 *a*).

La barre AC subit un allongement $l_3 = \dfrac{F_3 \cdot L_3}{S_3 \cdot E_3}$

et la barre BC un raccourcissement $l_2 = \dfrac{F_2\ L}{S_2\ E}$.

La barre BC devient égale à $BC'' = L_2 - l_2$.
La barre AC devient égale à $AC' = L_3 + l_3$.
Le nouveau point C_1 est, avec la même approximation que dans le cas précédent, au point de rencontre des deux perpendiculaires élevées en C′ et C″ respectivement à AC et BC.

6.114 *Troisième hypothèse : Les trois côtés sont déformables.*

La barre AB subit un allongement $l_1 = \frac{F_1 \, L_1}{S_1 \, E}$.

La barre BC subit un raccourcissement $l_2 = \frac{F_2 \, L_2}{S_2 \, E}$.

La barre AC subit un allongement $l_3 = \frac{F_3 \, L_3}{S_3 \, E}$.

La construction correspondante est représentée figure 19 *b*.

Constructions pratiques. — Pour le raisonnement, nous avons amplifié les déformations sur les figures. En réalité, comme nous l'avons vu par l'exemple précédent, les déplacements sont extrêmement petits par rapport aux dimensions du treillis.

Pour plus de commodité et de précision on ne dessine que les déformations sans dessiner la poutre ; on peut ainsi adopter une *échelle beaucoup plus grande* pour représenter ces déformations.

On procède comme indiqué sur la figure 20 :

On trace le triangle à l'échelle 1/10e, par exemple, et on y marque les sens de déformation (fig. 20). Puis on trace les déformations à l'échelle 1 mm = 0,1 mm, par exemple (échelle 10/1).

On commence par mener la déformation de la barre AB qui se fait suivant une direction fixe. On obtient le point B_1 ($AB_1 = l_1$). Partant toujours de A on mène la parallèle à la barre AC. Cette barre est tendue; le point C′ a donc tendance à remonter. On obtient ainsi le sens dans lequel on doit porter la déformation l_3 de la barre AC. On a le point C′. Un premier lieu de C_1 est la perpendiculaire élevée en C′ à AC′.

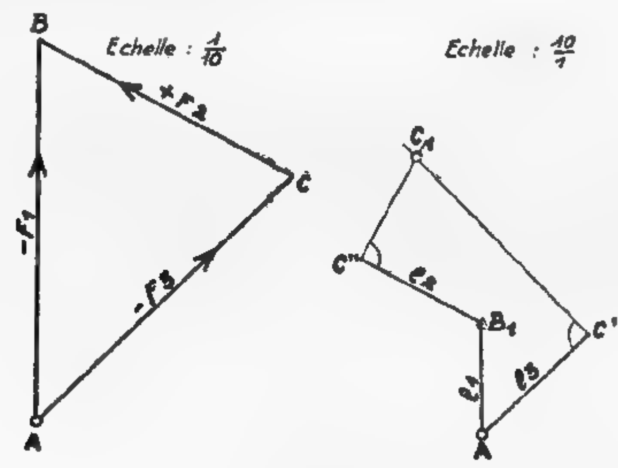


FIG. 20.

Du point B_1 précédemment obtenu on mène une parallèle à la barre BC. On porte la déformation l_2 de la barre BC dans le sens déterminé comme dans le cas de la barre AC. On obtient le point C″. Un deuxième lieu du point C_1 est la perpendiculaire élevée en C″ à B_1C''. Le point C_1 est le point de rencontre des deux lieux ainsi trouvés.

6.12 Application au calcul de la déformée d'une poutre triangulée. — Nous donnons cette application **Planche 16.**

Nous traçons d'abord la poutre avec les charges appliquées puis le Crémona des efforts dans les barres selon la méthode exposée au paragraphe 3.5 ci-dessus.

On calcule ensuite dans un tableau les allongements des barres $l = \frac{FL}{SE}$ avec les valeurs des efforts F trouvées par la méthode de Crémona. Enfin, on trace la déformée de la poutre d'après la méthode exposée ci-dessus pour un triangle.

Le tracé commence au point fixe A. On envisage successivement les déplacements de B, D, C, F, E, H et G en partant pour chacun d'eux des points précédemment déterminés. (Cet ordre correspond à celui qui est utilisé pour effectuer le tracé de Crémona).

On obtient les points B_1, C_1, D_1, E_1, H_1 et G_1. Leurs distances respectives au point A mesurent le déplacement de chacun de ces nœuds en grandeur (à l'échelle des déplacements) et en direction.

Par exemple, le nœud G s'est déplacé de 6,2 mm verticalement et 0,3 mm horizontalement.

C'est cette construction que l'on nomme *diagramme de* Williot.

6.2 DEUXIÈME MÉTHODE : RECHERCHE DU DÉPLACEMENT D'UN NŒUD DONNÉ SUIVANT UNE DIRECTION DONNÉE.

Il n'est souvent pas utile de connaître le déplacement de tous les nœuds d'un système, mais simplement le déplacement d'un nœud suivant une direction déterminée. On emploie alors la méthode plus rapide et plus précise exposée ci-après.

6.21 Déplacement du sommet d'un triangle articulé suivant une direction donnée. — Soit (fig. 21) un triangle ABC dans lequel AC = côté 1 tendu BC = côté 2 comprimé. On veut déterminer le déplacement de C suivant la direction XX'. (Nous supposerons ici le côté AB indéformable pour simplifier l'exposé.)

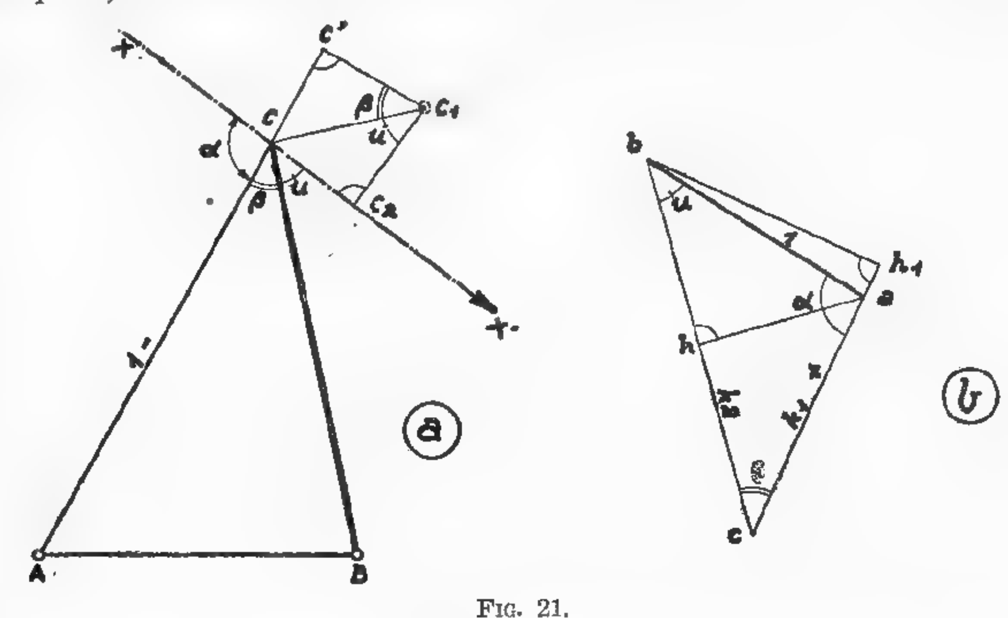


Fig. 21.

6.211 *Première hypothèse : AC seulement est déformable.* — Le déplacement total de C, déterminé par la méthode du paragraphe **6.112**, est CC_1.

Il nous faut donc déterminer la projection CC_2 de CC_1 sur XX′ (voir fig. 21 *a*).

Dans le triangle rectangle $CC'C_1$ on a la relation :

$$\overline{CC'}=\overline{CC_1}\ \sin\beta$$

d'où : $$CC_1=\frac{\overline{CC'}}{\sin\beta}=\frac{\overline{l_1}}{\sin\beta}$$ avec l_1= allongement de AC.

Dans le triangle rectangle CC_1C_2 :

$$\overline{CC_2}=\overline{CC_1}\ \sin u=\frac{l_1}{\sin\beta}\sin u.$$

Considérons maintenant la figure obtenue (fig. 21 *b*) en menant d'un point *a* quelconque un vecteur $\overline{ab}$ parallèle à XX′ et égal à l'unité de longueur et $\overline{ac}$ et $\overline{bc}$ respectivement parallèles à AC et BC.

On a les relations suivantes :

$\widehat{cba}=\widehat{BCX'}=u$ comme ayant les côtés respectivement parallèles
$\widehat{bac}=\widehat{ACX}=\alpha$ » »
$\widehat{acb}=\widehat{ACB}=\beta$ » »

Dans le triangle rectangle *hac* :

$$\overline{ah}=\overline{ac}\ \sin\beta.$$

Dans le triangle rectangle *hab* :

$$\overline{ah}=\overline{ab}\ \sin u=1\cdot\sin u$$

On a donc $$\overline{ac}\ \sin\beta=\sin u$$

d'où $$\overline{ac}=\frac{\sin u}{\sin\beta}.$$

Posons : $$\overline{ac}=k_1.$$

On a donc $$k_1=\frac{\sin u}{\sin\beta}.$$

Remplaçons le rapport $\frac{\sin u}{\sin\beta}$ par sa valeur k_1 dans l'expression de CC_2 obtenue précédemment. Il vient :

$$\overline{CC_2}=k_1\ l_1.$$

6.212 *Deuxième hypothèse : BC seulement est déformable.* — On fait une construction analogue au cas précédent (voir fig. 22).

On a $$\overline{CC_1}=\frac{CC'}{\sin\beta}=\frac{l_2}{\sin\beta}$$

avec l_2 = raccourcissement de la barre BC.

Dans le triangle rectangle CC_1C_3

$$\overline{CC_3}=\overline{CC_1}\ \sin\widehat{CC_1\ C_3}.$$

Or, les angles $\widehat{CC_1C_3}$ et $\widehat{ACX}$, ayant leurs côtés respectivement perpendi-

culaires, sont supplémentaires car ils ont deux côtés de même sens et deux côtés de sens contraires. On a donc

$$\widehat{CC_1C_3} = \pi - \alpha$$

On a d'autre part

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

Donc finalement

$$CC_1 = \frac{l_2 \sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Considérons la figure 21 *b*.

Dans le triangle rectangle bh_1c

$$\overline{bh_1} = \overline{bc} \sin\beta.$$

Dans le triangle rectangle bh_1a

$$\overline{bh_1} = 1 \cdot \sin\widehat{bah_1} = \sin(\pi - \alpha) \sin\alpha$$

Il vient

$$\overline{bc} \sin\beta = \sin\alpha$$

d'où

$$\overline{bc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Fig. 22.

Et en posant $\overline{bc} = k_2$, on a

$$k_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Remplaçons le rapport $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ par sa valeur k_2 dans l'expression de CC_3 obtenue précédemment :

$$CC_3 = k_2 \cdot l_2.$$

6.213 *Troisième hypothèse : AC et BC sont tous deux déformables en même temps.*

Les déplacements dus à AC et BC ayant tous deux le même sens, ils s'ajoutent en valeur absolue. On a donc pour le déplacement total d suivant XX', dû aux déformations des barres AC et BC :

$$d = k_1 l_1 + k_2 \cdot l_2.$$

Signes à attribuer à l et à k : L'allongement réel de AC est positif, celui de BC est négatif (raccourcissement). Pour avoir des déplacements sur XX' tous deux positifs, il faut que k_1 soit positif et k_2 négatif. Ces signes sont justement ceux des efforts que produirait dans les barres AC et BC *un effort fictif égal à ab = 1 dirigé dans le sens du déplacement cherché*[1].

La détermination de $(k_1 + k_2)$ en grandeur et en sens revient donc à la construction d'un Crémona *des efforts fictifs* que créerait dans les barres la force unitaire fictive $\overline{ab}$.

6.22 Généralisation. — Nous avons trouvé la valeur du déplacement pour un triangle articulé. Le raisonnement reste valable pour plusieurs triangles c'est-à-dire pour un *système triangulé*.

1. — Il faut bien remarquer que l'assimilation de k_1 et k_2 à des forces n'est qu'une fiction permettant d'avoir facilement la grandeur et le sens de ce coefficient. En réalité, k_1 et k_2 sont des *coefficients sans dimension*.

Le déplacement d'un nœud d'un système triangulé dans une direction donnée est fourni par :

$$d = \Sigma kl$$

soit :

$$d = \sum k \frac{F\,L}{S\,E}$$

avec F = effort réel agissant dans une barre considérée,
L = longueur de cette barre,
S = section de cette barre,
E = module d'élasticité de cette barre,
k = effort fictif, dans cette barre, produit par une force auxiliaire égale à 1 appliquée au nœud considéré et dans le sens du déplacement cherché.

Remarque. — Généralement, le module d'élasticité E est le même pour toutes les barres.

On a alors dans ce cas :

$$d = \frac{1}{E} \sum k\,F\,\frac{L}{S}.$$

6.23 **Application.** — Nous donnons, *Planche 16*, une application de cette méthode pour le calcul du déplacement vertical du nœud G du système précédemment étudié à l'aide du diagramme de Williot.

Les coefficients k sont trouvés par un tracé de Cremona opéré avec une force fictive égale à $\varphi = 1$, dirigée de bas en haut et appliquée en G.

Les termes $k\,F\,\frac{l}{E\,S}$ sont calculés, pour chaque barre, dans un tableau.

La somme de ces termes donne directement le déplacement cherché. On voit que cette méthode donne une solution élégante et précise du problème.

6.3 REMARQUE IMPORTANTE.

Les déplacements calculés par l'une ou l'autre méthode ne sont valables que dans le *domaine élastique* puisque le module d'élasticité E rentre dans leur expression. Il faut donc, pour que le calcul soit valable, qu'aucune barre du système ne dépasse sa limite élastique sous l'action de l'effort F qu'elle subit.

CHAPITRE VIII

CISAILLEMENT

Théorie et applications

0. INTRODUCTION

Le présent Chapitre traite dans sa première partie (§ **1.** à **5.**) de la théorie sommaire du *glissement*. L'objet principal de cette théorie est de conduire, aussi simplement que possible, à la définition d'un « état de sollicitation idéal » appelé *cisaillement simple* ou *cisaillage* (qui se trouve trop souvent confondu avec le phénomène général de glissement).

On trouvera ensuite (§ **6.** à **8.**) une application directe de la théorie du cisaillement simple concernant le *calcul des assemblages cisaillés* (ou *calcul des nœuds*).

Nous avons terminé ce chapitre par un exposé des formules les plus utilisées pour le calcul des *chapes à œil* (§ **9.**).

Il est à remarquer que des notions complémentaires concernant le cisaillement seront données au cours des prochains chapitres (Flexion et torsion), ainsi qu'au cours de l'étude des éléments minces, principalement utilisés en construction aéronautique (chap. XIX à XXII).

1. GLISSEMENT

1.1 GENERALITES.

Lorsque deux sections droites voisines d'un corps prismatique, en état de déformation élastique ou plastique se déplacent parallèlement l'une par rapport à l'autre, de sorte qu'en supposant l'une fixe, l'autre paraisse glisser sur la première, on dit qu'il y a *glissement*.

Si ce glissement s'effectue en translation, on dit qu'il y a *cisaillement*.
S'il s'effectue en rotation on dit qu'il y a *torsion*.

Ces deux phénomènes mettent donc en jeu des déformations (et par suite des contraintes) *tangentielles* (voir chap. V, § **2.2**).

Nous ne nous occuperons, dans ce chapitre, que du cisaillement. La torsion sera étudiée ultérieurement (chap. XIII).

1.2 ANGLE DE GLISSEMENT.

Considérons, pour fixer les idées, une poutre encastrée suivant sa sec-

tion droite AB et soumise dans une section CD *très voisine*, à un effort T (fig. 1).

Sous l'action de cet effort, appelé *effort tranchant*, la section CD tend à glisser par translation par rapport à AB. La région ABCD est donc cisaillée [1].

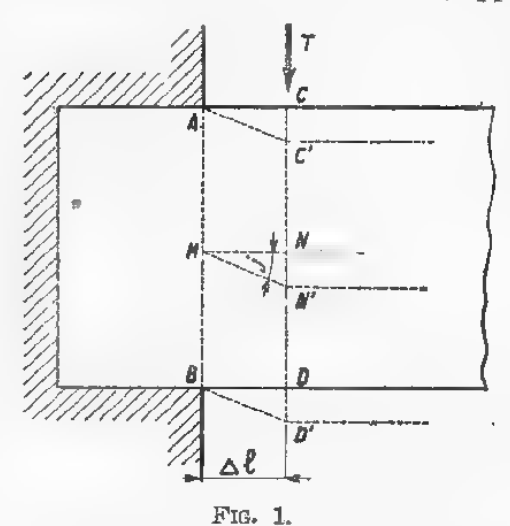


Fig. 1.

Sous l'action du cisaillement, le point C glisse en C', D en D', N en N', etc... Les grandeurs CC', NN', DD' sont appelées *glissements totaux* ou *absolus* des fibres correspondantes.

L'angle j de rotation des fibres, par exemple l'angle $\widehat{NMN'}$, s'appelle *l'angle de glissement* de la fibre correspondante. Il est tel que

$$\operatorname{tg} j = \frac{NN'}{MN} = \frac{\text{glissement absolu}}{\Delta l}.$$

Le glissement absolu étant petit, l'angle j est également faible et l'on peut confondre sa valeur (en radians) avec sa tangente.

L'angle de glissement mesure donc le glissement par unité de longueur.

1.3 PROPORTIONNALITÉ DES CONTRAINTES AUX DÉFORMATIONS.

On admet en Elasticité que l'angle de glissement j est relié à la contrainte tangentielle t (contrainte de cisaillement) qu'il engendre par la relation :

$$\boxed{t = G\, j.}$$

(Généralisation de la loi de Hooke. Voir chap. V, § 4.3) avec G = module d'élasticité transversal du matériau constituant la poutre considérée.

1.4 CISAILLEMENT (OU CISAILLAGE).

Si, dans la figure 1 envisagée ci-dessus, on suppose que l'angle de glissement j de toutes les fibres est identique, on définit ainsi un mode particulièrement simple de glissement (conforme à l'hypothèse de Bernoulli) que l'on nomme *cisaillement simple* (ou cisaillage [2]).

Nous verrons plus loin la condition essentielle de réalisation de ce cas simple (§ 3.).

D'après la loi de Hooke, l'angle j étant constant, la contrainte tangentielle t de tous les éléments ΔS composant la section S de la poutre, est également constante. On a donc (équilibre) :

$$\boxed{t = \frac{T}{S}}$$

1. — En réalité, cette région est également fléchie comme nous le verrons au chapitre suivant, mais la distance séparant les deux sections étant très faible, par hypothèse, on peut négliger, pour le raisonnement, ce mode de sollicitation qui tendrait à produire une *rotation* relative des sections.

2. — La dénomination « cisaillage », introduite récemment dans le vocabulaire technique est, en fait, plus correcte que l'expression, plus ancienne, de « cisaillement simple ». Elle permet, en effet, d'éviter toute confusion avec le phénomène général de cisaillement (ou glissement) et elle implique l'idée du processus qui sert à l'obtenir (voir ci-après).

Cette contrainte, constante dans une même section droite, est souvent appelée *contrainte moyenne de cisaillement* ou *contrainte de cisaille*. Elle n'est égale à la contrainte réelle en chaque point que dans le cas particulier du cisaillement simple.

2. RÉCIPROCITÉ DES GLISSEMENTS

2.1 DEFORMATIONS AXIALES ACCOMPAGNANT LE GLISSEMENT.

Si nous considérons un petit élément de volume $abcd\ a_1b_1c_1d_1$ d'un corps cisaillé (fig. 2), nous voyons que les fibres inclinées telles que ad se sont allongées par suite du glissement. Par contre, les fibres telles que bc se sont raccourcies. Les premières subissent donc des contraintes de *traction* et les autres des contraintes de *compression*.

Cette considération physique s'accorde avec les résultats de la théorie de l'élasticité où l'on démontre que le cisaillement s'accompagne de contraintes de traction et de compression pures, respectivement égales en valeur absolue à la contrainte de cisaillement, ces contraintes étant orientées à 45° par rapport à la direction de l'effort tranchant.

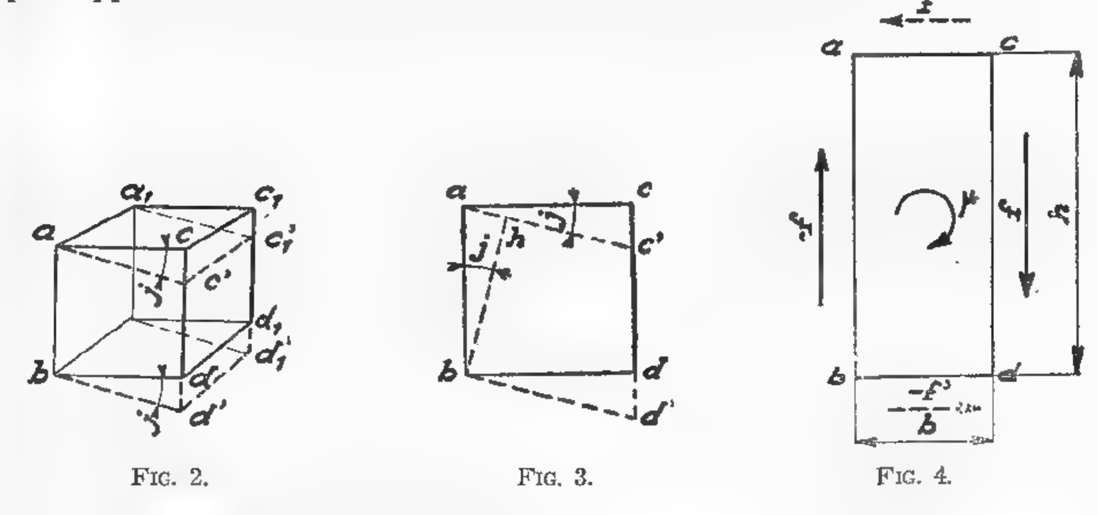


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

2.2 GLISSEMENT RÉCIPROQUE.

Au cours du glissement, l'angle en b initialement droit s'est ouvert. Relativement à ce point b le côté ac a donc glissé d'une quantité ah définie par la perpendiculaire bh abaissée de b sur ac' (fig. 3).

L'angle de glissement correspondant, mesurant donc le glissement de ac par rapport à bd, est $\widehat{abh}$.

Or, $\widehat{abh} = \widehat{cac'} = j =$ angle de glissement de cd par rapport à ab.

Règle. — *Un glissement quelconque qui se produit dans une direction en fait naître un autre de même valeur et dans un sens perpendiculaire au premier.* C'est ce que l'on appelle la *réciprocité des glissements*. On dit encore que le *glissement transversal* (ou cisaillement) s'accompagne toujours d'un *glissement longitudinal* égal.

2.3 EQUILIBRE ÉLÉMENTAIRE.

Cette réciprocité des glissements est d'ailleurs une *condition nécessaire d'équilibre*.

Supposons, en effet, que l'élément rectangulaire plan représenté figure 4 soit découpé dans une poutre cisaillée soumise à un effort tranchant parallèle aux côtés verticaux cd et ab et cheminant le long de cette poutre dans le sens

horizontal, c'est-à-dire parallèlement aux côtés *ac* et *bd*. Admettons, pour cet élément, une épaisseur *e* suffisamment faible pour que les contraintes soient constantes sur toute cette épaisseur. Une contrainte de cisaillement *t* appliquée au côté *cd* sollicite ce côté avec une force tangentielle

$$f = the.$$

Cette force est équilibrée sur *ab* par une réaction — *f*. L'ensemble de ces deux forces engendre un couple de moment

$$\mu = fb = tehb.$$

Pour équilibrer ce couple, l'élément considéré recevra de la part de ses voisins supérieur et inférieur un couple de composantes f' tangentes aux côtés *ac* et *bd* et ayant pour valeur :

$$f' = \frac{\mu}{h} = t\,e\,b.$$

On retrouve donc bien le long de ces côtés une contrainte de cisaillement

$$\frac{t\,e\,b}{e\,b} = t$$

égale à celle appliquée.

Remarque. — Cette démonstration nous permet de voir que les *contraintes de glissement réciproques* (égales et perpendiculaires aux contraintes de cisaillement transversale) *sont orientées dans le plan de propagation de l'effort tranchant* (c'est-à-dire dans le sens *longitudinal* pour une *poutre* cisaillée dans le plan de ses sections droites).

3. CONDITION DE RÉALISATION DU CISAILLEMENT SIMPLE (OU CISAILLAGE)

C'est précisément le phénomène de glissement réciproque qui permet d'établir la condition nécessaire pour qu'une pièce travaille au *cisaillement simple*, c'est-à-dire pour que l'effort tranchant puisse être considéré comme se répartissant uniformément sur toute sa section (voir § 1.4).

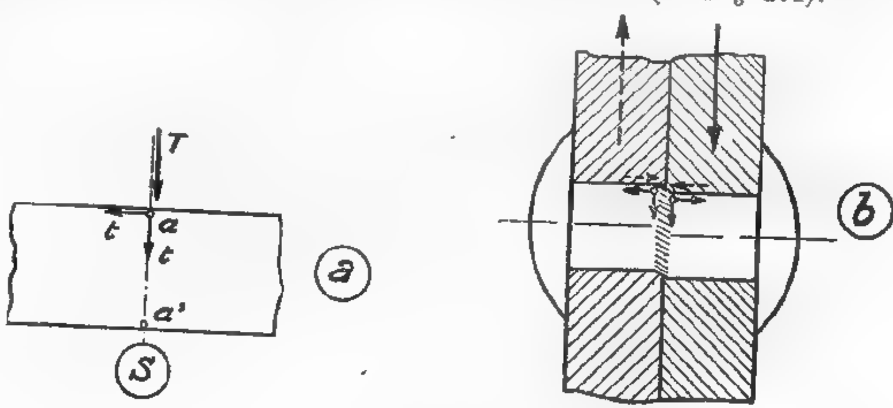


FIG. 5.

Soit une section S travaillant au cisaillement simple (fig. 5 *a*).

Le point *a* situé sur la périphérie de la pièce subit donc une contrainte tangentielle transversale $t = T/S$ et, par suite, une contrainte longitudinale égale à *t*. Mais, cette dernière contrainte ne peut exister que si quelque chose résiste à son action.

Si la périphérie de la pièce est libre, il est facile de se rendre compte

qu'il n'existera à cet endroit aucune contrainte de cisaillement. C'est le cas général du cisaillement des pièces fléchies.

Par contre, si un *frottement* s'oppose à l'action du glissement longitudinal de la périphérie une contrainte pourra exister et si ce frottement est suffisant, la condition de cisaillement simple pourra être satisfaite.

C'est ce que l'on admet dans le cas des *assemblages par rivets* (fig. 5 *b*). Les rivets remplissent, en effet, avec pression leur logement, par suite de la dilatation de la tige obtenue pendant la formation de la tête. C'est également ce que l'on admet dans le cas des *assemblages par boulons bien ajustés*.

C'est, enfin, le mode de travail des *cisailles*, à condition toutefois que l'élément à cisailler soit maintenu avec pression en dehors des lames. Dans le cas contraire, le type de déformation permet de se rendre compte que le cisaillement s'est accompagné d'un phénomène de flexion (déformation en rotation).

4. FORMULES RELATIVES AU CISAILLEMENT SIMPLE[1]

4.1 EQUATION DE RESISTANCE.

Son expression a été donnée ci-dessus au paragraphe **1.4** :

$$t = \frac{T}{S}$$

(formule analogue à celles de la traction ou compression simple).

On en déduit immédiatement *l'équation d'équarrissage en cisaillement simple*, connaissant la *contrainte tangentielle admissible* t_a du matériau considéré (voir ci-après) :

$$\text{Section nécessaire} = S = \frac{T}{t_a}$$

ou effort tranchant maximum admissible

$$T_a = S t_a$$

4.2 ÉQUATION DE DÉFORMATION.

L'angle de glissement j (exprimé en radians) découle directement de la formule donnée au paragraphe **1.3** ci dessus :

$$j = \frac{t}{G}.$$

Considérons un élément de longueur Δl d'une poutre cisaillée (fig. 6). Sa flèche élémentaire (glissement absolu) est

$$\Delta f = j \Delta l \text{ (voir § 1.2).}$$

FIG. 6.

La flèche totale f de la poutre est donc[2]

$$f = \Sigma\, \Delta f = \Sigma j \cdot \Delta l = \Sigma \frac{t}{G} \Delta l.$$

1. — Nous trouverons, au chapitre suivant, l'expression de la contrainte de cisaillement dans le cas des pièces travaillant en flexion plane. Le phénomène correspondant est souvent désigné sous le nom de *glissement longitudinal de flexion*.

2. — Il est assez difficile de se représenter physiquement la déformation de cisaillement d'une poutre, car elle s'accompagne toujours d'une déformation de flexion qui est généralement beaucoup plus importante, surtout si la poutre est longue. C'est pourquoi on néglige généralement la flèche de cisaillement dans les calculs, ce qui explique que nous n'en donnions qu'un aperçu très succinct.

Cas particulier. — Si l'on a cisaillement simple $t = \frac{T}{S}$, d'où

$$f = \Sigma \frac{T}{G\,S} \Delta l$$

et si, de plus, T est constant le long de la longueur l de la poutre de section constante S :

$$\boxed{f = \frac{T\,l}{G\,S}.}$$

4.3 TRAVAIL ELASTIQUE DE CISAILLEMENT.

On établit, par une démonstration analogue à celle utilisée pour la traction, que le travail élastique dû aux déformations de cisaillement a pour expression, dans le cas du cisaillement simple :

$$\boxed{\mathcal{E} = \sum \frac{T^2}{2\,G\,S} \Delta l.}$$

On remarquera l'analogie de cette formule avec celle donnant le **travail** élastique de traction ou compression (chap. VI, § **1.4**).

Dans le *cas particulier* où T et S sont constants le long d'une poutre homogène (G constant), on a immédiatement

$$\mathcal{E} = \frac{T^2\,l}{2\,G\,S}.$$

5. CONTRAINTES ADMISSIBLES AU CISAILLEMENT

5.1 VALEURS THEORIQUES.

On a longtemps admis comme contrainte admissible à la rupture au cisaillement une contrainte

$$t_a = \frac{4}{5}\,n_a = 0{,}8\,n_a$$

n_a étant la plus petite des deux valeurs : n_{ta}=contrainte admissible en traction ou n_{ca}=contrainte admissible en compression simple (pour les matériaux courants ductiles $n_{ta} = n_{ca}$).

Cette relation est déduite de simples considérations géométriques basées sur les déformations axiales accompagnant le glissement (§ **2.1**).

Une théorie plus récente, et plus correcte, qui étudie mathématiquement les tensions autour d'un point (cercle de Mohr, courbes intrinsèques) [1] démontre que pour un matériau isotrope où $n_{ca} = n_{ta} = n_a$, l'on a :

$$\boxed{t_a = 0{,}5\,n_a.}$$

5.2 VALEURS EXPERIMENTALES.

5.21 **Essais en cisaillement pur.** — L'état de contrainte en *cisaillement pur (ou glissement)*, tel qu'il est défini par la théorie de l'Elasticité, se

1. — Voir chapitre XV ci-après.

réalise expérimentalement par torsion de tubes circulaires de faible épaisseur (voir ci-après chap. XIII). Dans de tels essais, correctement réalisés [1], on vérifie, très sensiblement, la relation théorique ci-dessus :

$$t_a = 0{,}5\ n_a$$

pour les métaux usuels, et tout du moins en ce qui concerne leurs *contraintes de limite élastique.*

5.22 **Essais en cisaillage.** — Par contre, dans des essais réalisés selon le processus de *cisaillage* (essais entre mors, essais d'assemblages rivés ou boulonnés), où l'on ne peut pratiquement pas déceler de limite élastique, on constate que l'on a toujours, à rupture,

$$t_a > 0{,}5\ n_a.$$

Des essais récents (Note STAé. n° 22) précisent, pour les métaux usuels, la relation :

$$0{,}6\ n_a < t_a < 0{,}65\ n_a.$$

5.23 **Remarque.** — Cette divergence entre les résultats obtenus dans les deux modes d'essai provient certainement, en majeure partie, de ce que l'état dit de « cisaillement simple » ne constitue, en fait, qu'un « état de référence » commode dans le processus de cisaillage. De plus, dans un essai d'assemblage (rivets ou boulons), il existe, en supplément du cisaillage lui-même, des efforts de frottement dus au serrage des éléments d'assemblage.

5.3 CONCLUSION.

En ce qui concerne le *cisaillement* proprement dit (glissement de flexion ou de torsion, étudiés aux chap. IX et XIII) il paraît indispensable de limiter les contrainte admissibles à celles définies par la relation théorique :

$$t_a = 0{,}5\ n_a.\ ^{2}$$

En ce qui concerne le *cisaillage* (éléments d'assemblage) nous conseillons, à défaut de résultats d'essais particuliers, d'adopter la limite inférieure donnée par la référence ci-dessus, soit :

$$t_a = 0{,}6\ n_a.$$

6. HYPOTHÈSES GÉNÉRALES ADMISES POUR LE CALCUL DES ASSEMBLAGES

En application de la théorie du cisaillement, nous donnons dans les deux paragraphes suivants un exposé succinct des méthodes de calcul des assemblages par *rivets* ou *boulons.*

6.1 HYPOTHÈSES.

Nous rappelons que, pour ces éléments, on admet un procédé de calcul au *cisaillement simple* (ou *cisaillage*).

On néglige également les « *effets de serrage* » dont il a été question ci-dessus, l'influence de ces effets se trouvant incluse dans les valeurs des contraintes admissibles obtenues expérimentalement.

1. — Il est nécessaire d'opérer sur des tubes relativement minces, mais il est également nécessaire que ces tubes ne présentent pas de phénomènes d'instabilité (ch. XIX).

2. — Nous verrons, au surplus, au chapitre XIX, que des considérations de *stabilité* deviennent souvent prépondérantes pour les éléments minces (tôles minces d'âmes ou de revêtements par exemple).

6.2 CLASSIFICATION.

Nous diviserons l'étude des assemblages en deux catégories distinctes :

a) Assemblages symétriques par rapport à la direction de l'effort appliqué (§ **7.**).

b) Assemblages non symétriques par rapport à la direction de l'effort appliqué (§ **8.**).

Nous désignerons d'une manière générale par « *élément de liaison* » chacun des rivets ou boulons entrant dans l'assemblage considéré.

6.3 ASSEMBLAGES HÉTÉROGÈNES.

Certains assemblages utilisent des éléments (rivets ou boulons) de métaux différents (par exemple acier et duralumin).

Le procédé de calcul le plus simple consiste alors à substituer à ces assemblages hétérogènes des « *assemblages homogènes équivalents* ». Ces assemblages homogènes sont obtenus en calculant, pour l'un des types d'éléments, des *sections fictives équivalentes* ramenées au métal constituant l'autre type d'éléments.

Ces sections fictives s'obtiennent en amplifiant (ou diminuant) les sections réelles dans le rapport des modules d'élasticité du métal réel et du métal équivalent [1].

Exemple. — Soit un assemblage utilisant des rivets de 5 ($s = 19{,}6$ mm²) en duralumin AU4G ($E = 7000$ kg/mm²) et des boulons de 6 ($s' = 28{,}3$ mm²) en acier ($E' = 20.000$ kg./mm²).

a) Assemblage dural équivalent :

rivets de 5 : $s = 19{,}6$ mm²

boulons de section : $s'_1 = s' \dfrac{E'}{E} = 28{,}3 \dfrac{20000}{7000} = 80{,}9$ mm².

b) Assemblage acier équivalent :

boulons de 6 : $s' = 28{,}3$ mm²

rivets de section : $s_1 = s \dfrac{E}{E'} = 19{,}6 \dfrac{7000}{20000} = 6{,}86$ mm².

Tous les assemblages étudiés ci-après supposeront des liaisons homogènes ou rendues homogènes par l'artifice ci-dessus.

6.4 REMARQUE : ASSEMBLAGES PAR SOUDURE ÉLECTRIQUE.

On tend de plus en plus, en construction aéronautique, à utiliser pour les alliages légers des assemblages par soudure électrique par points ou à la molette (soudure continue).

Les caractéristiques de résistance de ces assemblages sont encore assez mal précisées.

Il semble néanmoins, d'après essais, que l'on puisse admettre dans le cas de *soudure par points d'alliages légers à base d'aluminium* une « *contrainte de cisaillage apparente* » (contrainte rapportée à la section des points de soudure) de l'ordre de 15 kg/mm², pour les épaisseurs de tôles

1. — Il existe une autre méthode qui consiste à modifier les sections dans le rapport des *contraintes admissibles*. Il nous paraît plus logique, tout au moins dans le domaine élastique (qui est celui de la résistance des matériaux) de jouer sur les modules d'élasticité qui expriment une fonction directe des déformations élastiques.
Il est possible, cependant, qu'un essai statique à rupture justifie mieux la méthode des contraintes admissibles. — Voir ci-après : Remarque *c*), § **7.62**.

usuelles variant de 0,5 à 3,2 mm. Le diamètre des points de soudure (qui dépend lui-même de celui des électrodes) peut être pris égal à

$$d = e + 2 \quad \text{(en mm)}$$

e désignant l'épaisseur *totale* des tôles assemblées.

Exemple. — Un point de soudure électrique assemblant deux tôles de 2 mm d'épaisseur peut être présumé d'un diamètre

$$d = 2 + 2 + 2 = 6 \text{ mm}$$

c'est-à-dire d'une section

$$s = 28{,}3 \text{ mm}^2.$$

D'après les données ci-dessus, il encaissera à rupture un effort F, dirigé en cisaillage du point, ayant pour valeur

$$F = 28{,}3 \cdot 15 = 425 \text{ kg}.$$

Affaiblissement des tôles. — La présence de points ou de lignes de soudure électrique affaiblit en traction les tôles qui ne possèdent plus, pratiquement, au niveau de ces points, que leurs caractéristiques de métal recuit.

Pour le duralumin AU4G par exemple, l'affaiblissement du taux de résistance en traction, dans ces régions, est de l'ordre de 40 % soit :

$$n_a = 24 \text{ kg/mm}^2$$

en comptant que cet affaiblissement est localisé sur la dimension du point.

7. CALCUL DES ASSEMBLAGES SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT A LA DIRECTION DE L'EFFORT APPLIQUÉ

7.1 HYPOTHÈSE DE CALCUL.

Soit un assemblage comprenant N éléments de liaison (rivets ou boulons) de mêmes caractéristiques, c'est-à-dire de même diamètre et même matière, disposés symétriquement par rapport à la ligne d'action *ab* de l'effort appliqué.

On admet, en général, que l'effort à transmettre F se répartit uniformément sur tous les éléments. C'est du reste la solution la plus économique qui est donc à rechercher. Nous verrons plus loin (§ 7.6) la condition théorique à remplir pour que cette hypothèse soit satisfaite.

7.2 RÉSISTANCE DE L'ASSEMBLAGE.

7.21 Condition de cisaillage. — Dans l'hypothèse ci-dessus, la charge supportée par un élément d'assemblage est

$$f = \frac{F}{N}$$

et sa contrainte de cisaillage

$$t = \frac{f}{s} = \frac{F}{N\,s} \quad \begin{cases} \text{avec } s = \text{section d'un élément} \\ \text{soit } s = \dfrac{\pi\, d^2}{4} \text{ avec } d = \text{diamètre de l'élément.} \end{cases}$$

La charge F admissible est donc

$$F = N\, s\, t_a$$

avec t_a = contrainte de cisaillage admissible pour l'élément de liaison.

Cette contrainte admissible découle de la règle donnée au paragraphe **5.3** ce qui donne, par exemple, pour contraintes admissibles à la rupture (voir *Planches* 11 et 12) :

Rivets en duralumin AU4G : $t_a = 0,6 \cdot 40 = 24$ kg/mm²[1]
Rivets en acier X.C. 18 $t_a = 0,6 \cdot 42 = 25$ kg/mm²
Rivets en acier X.C. 35 (était recuit) : $t_a = 0,6 \cdot 54 = 32$ kg/mm²
Boulons en acier 30 NC 11 traité à R = 100 : $t_a = 0,6 \cdot 100 = 60$ kg/mm².

7.22 **Condition de matage.** — Il faut toujours s'assurer (particulièrement en construction aéronautique) que la pression, ou taux de matage, des rivets ou boulons sur les tôles à assembler n'est pas excessive.

Nous avons vu au chapitre VI, paragraphe **6.** que cette pression était donnée par :

$$p = \frac{f}{e\ d}$$

avec e = épaisseur de la tôle la plus faible

Si e est constant pour les N éléments d'assemblage, on doit donc avoir :

$$F \geqslant N\, d\, e\, p_a$$

p_a étant la pression de matage admissible.

Nous avons vu également au chapitre VI, paragraphe **6.2**, que l'on adopte, en général :

$p_a = 1,1\ n_a$ pour les boulons ;
et $p_a = 1,5\ n_a$ pour les rivets.

Fig. 7.

7.3 RAPPORT DU DIAMÈTRE A L'ÉPAISSEUR DE LA TOLE.

La condition de matage permet de rechercher une relation optima entre le diamètre d de l'élément d'assemblage et l'épaisseur e de la tôle, cette relation exprimant l'égalité des résistances au cisaillement et au matage ; ce qui s'écrit :

$$p_a \cdot d \cdot e = t_a \frac{\pi\, d^2}{4}$$

soit :

$$\frac{d}{e} = \frac{4}{\pi} \frac{p_a}{t_a} = 1,27 \frac{p_a}{t_a}.$$

Exemple : Tôle Duralumin, rivets Duralumin (AU4G)

$p_a = 60$ kg/mm² $t_a = 24$ kg/mm²

$$\frac{d}{e} = 1,27 \frac{60}{24} = 3,18$$

avec $e = 1$ mm on aurait par exemple : $d = 3,18$ soit 3,2 mm.

Il est à remarquer que pour le rivetage des tôles de Duralumin, cette relation donne des valeurs de d supérieures à celles utilisées dans la pratique. Ceci provient du fait qu'une autre considération entre en jeu qui est celle de la déformation de la tôle pendant l'opération d'écrasement du rivet, ce qui limite la valeur de d.

1. — Valeur admise par le S.T.Aé. Certains constructeurs adoptent, cependant, une valeur allant en décroissant avec le diamètre du rivet, par exemple : 25 kg/mm² pour les rivets de 6,4.

7.4 SIMPLE CISAILLAGE, DOUBLE CISAILLAGE, CISAILLAGE MULTIPLE.

Nous nous sommes placés jusqu'ici dans le cas où l'effort ne tendait à cisailler qu'une section de chaque rivet ou boulon d'assemblage (rivure par recouvrement par exemple). On réalise, cependant, très souvent des assemblages à *double cisaillage* comme c'est le cas du rivetage de la figure 8 *a*. La résistance au cisaillage est alors doublée, mais la condition de matage sur l'élément central devient encore plus importante [1]. Cette solution est à rechercher pour tous les assemblages sérieux par suite de la symétrie des efforts qu'elle procure.

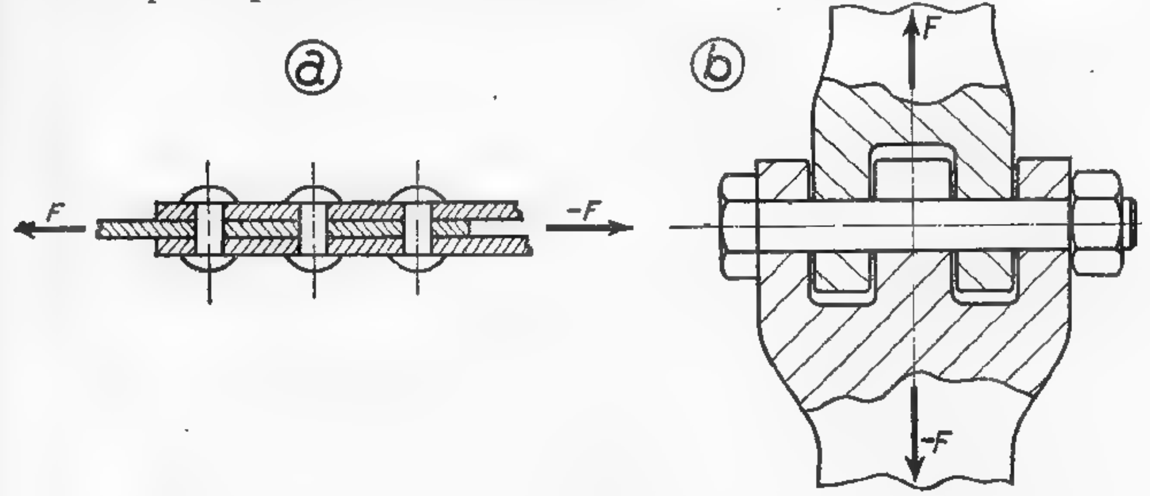


Fig. 8.

Pour les ferrures d'attache on réalise souvent un montage du type de la figure 8 *b*.

L'axe travaille alors au cisaillage sur quatre sections (quadruple cisaillage) [2].

La résistance au matage est toujours à vérifier. Il faut de plus, s'assurer de la tenue des chapes (voir ci-après, § **9.**).

7.5 DISPOSITION D'UN RIVETAGE.

7.50 **Règles générales.** — La disposition d'un rivetage doit, en principe, être étudiée dans chaque cas particulier d'assemblage.

En particulier, si l'assemblage doit être *étanche*, il existe des règles expérimentales donnant le pas P et la distance D entre lignes.

Nous ne donnerons ici que des indications générales déduites de la résistance des matériaux.

D'une façon générale, si l'assemblage comporte plusieurs rangées de rivets on aura toujours intérêt à *quinconcer* les rivets entre eux pour éviter un affaiblissement exagéré des tôles à assembler.

7.51 **Pas de rivetage.** — C'est la distance P séparant deux rivets d'une même rangée (fig. 9).

1. — Des essais effectués sur des assemblages rivés à double cisaillage ont cependant montré que la pression de matage admissible se trouvait nettement accrue, par suite de la symétrie des efforts et de l'importance des frottements latéraux.

On pourrait adopter :

$p_a = 1{,}75\ n_a$ (au lieu de $1{,}5\ n_a$) ; soit 70 kg/mm² pour les tôles en AU4G.

2. — Dans les cas d'axes importants et non serrés on n'admet plus, très souvent, un mode de travail en cisaillement simple. On les calcule au cisaillement de flexion (Voir chap. suivant).

Une indication de sa valeur peut être donnée par l'équivalence de la tenue au matage du rivet sur la tôle et de la tenue de la tôle en traction entre deux rivets.

a) Dans le cas d'une *simple rangée à recouvrement* (simple cisaillage) on doit avoir la relation :

$$p_a\, d\, e = n_a e\ (P - d)$$

d'où l'on tire :

$$P = d\ \frac{p_a + n_a}{n_a}.$$

Application au Duralumin AU4G :

$$P = d\ \frac{60+40}{40} = 2{,}5\ d.$$

b) Dans le cas d'une *double rangée et simple cisaillage*, la relation devient :

$$2\ n_a\, d\, e = n_a\, e\ (P - d)$$

d'où :

$$P = d\ \frac{2\ p_a + n_a}{n_a}$$

soit :

$$P = d\ \frac{120+40}{40} = 4\ d \text{ pour le duralumin AU 4G.}$$

On peut aisément généraliser cette formule au cas de N rangées [1].

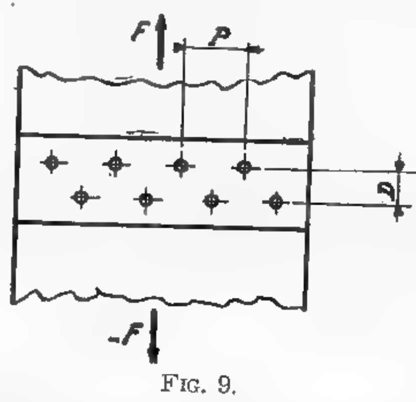


Fig. 9.

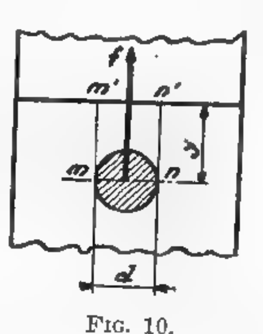


Fig. 10.

7.52 Distances entre rangées.— Il n'existe pas de règle formelle pour définir la distance D entre rangées. On admet souvent D compris entre 0,75 P et P.

7.53 Distance des rivets au bord de la tôle. — Cette distance y doit être telle que la tôle résiste au cisaillage sous l'action de la force f transmise par le rivet (fig. 10). Si la condition de matage prédomine, ce qui est le cas général pour les tôles minces, on a :

$$f = p_a\, d\, e.$$

En admettant que l'arrachement de la tôle ait tendance à se produire selon un phénomène de cisaillement simple intéressant les sections mm' et nn', sa résistance a pour valeur :

$$R_c = 2\ y\ e\ t_a$$

avec t_a=contrainte admissible au cisaillage de la tôle$=0{,}6\ n_a$.

1. — Il convient de remarquer que le pas P ainsi obtenu est une valeur *minimum* nécessaire pour mettre les rivets en charge, ce qui explique que l'on dépasse souvent cette valeur. (On admet en effet souvent, en pratique, P= 3 d dans le cas d'une rangée et P = 5 d dans le cas de deux rangées.)

Or $p_a=1,5\ n_a$

d'où $t_a=0,4\ p_a$.

On doit donc avoir :

$$p_a\, d\, e=2\, y\, e \cdot 0,4\, p_a$$

d'où l'on tire : $y=1,25\ d$.

Cette relation donne une valeur *minimum* de la distance y. On s'impose souvent en pratique pour les tôles minces :

$$1,5\ d<y<2d$$

cette dernière limite étant fournie par des considérations de raideur du bord de la tôle aux efforts accidentels.

7.6 COMPATIBILITÉ DES DÉFORMATIONS DES PIÈCES A ASSEMBLER.

7.60 Position du problème. — L'hypothèse émise ci-dessus, au paragraphe **7.1** concernant une égale participation de tous les éléments d'assemblage pour la transmission de l'effort appliqué est, en réalité, très difficile à satisfaire dans le cas d'un assemblage à grand nombre de rangées tel que celui représenté sur la figure 7.

On peut, néanmoins, établir une règle théorique exprimant que *les allongements élastiques des pièces à assembler doivent être égaux dans un même intervalle entre deux rangées.*

On se rend compte immédiatement que cette condition impose une diminution de la section de chaque pièce au fur et à mesure que cette pièce se déleste dans un élément d'assemblage au profit de l'autre pièce.

7.61 Formule théorique. — Soit, par exemple (fig. 11), deux pièces P et P′ sollicitées par un effort F et réunies par n rangées de fixations, c'est-à-dire délimitant $n-1$ intervalles entre elles.

Supposons, pour nous placer dans un cas général, que la pièce supérieure P ait un module d'élasticité E et la pièce inférieure P′ un module d'élasticité E′.

Le diagramme théorique de variation des efforts dans les pièces doit être celui de la figure **11** *b* où chaque variation d'effort au passage d'une rangée, est égale à $\frac{F}{n}$ (ceci pour satisfaire à la condition recherchée).

Considérons l'*intervalle* 1 compris entre les deux premières rangées de la pièce P.

Désignons par S et par S'_{n-1} *les sections moyennes* respectives des pièces P et P′ dans cet intervalle. Les efforts de traction sont respectivement :

pièce P : $$F-\frac{F}{n}=F\,\frac{n-1}{n}$$

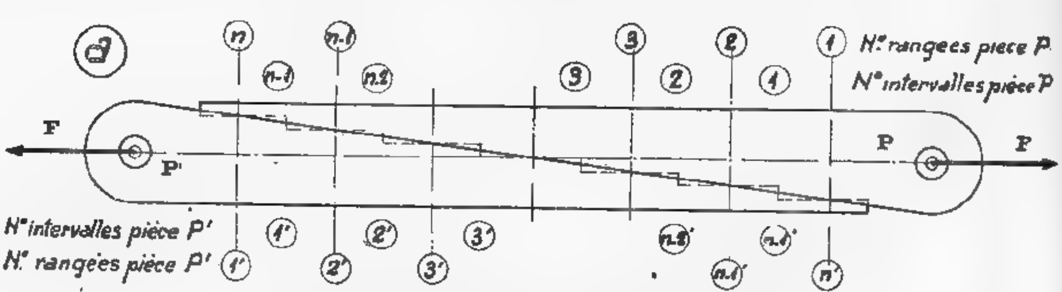
pièce P′ : $$F\ (n-1)\,\frac{F}{n}=\frac{F}{n}.$$

On doit avoir même allongement total des pièces dans l'intervalle, c'est-à-dire même allongement par unité de longueur, ce qui s'écrit :

$$\frac{F\,\frac{n-1}{n}}{S_1\,E}=\frac{\frac{F}{n}}{S'_{n-1}\cdot E'}$$

d'où l'on déduit le rapport ρ_1 devant exister entre les sections des pièces dans cet intervalle :

$$\rho_1 = \frac{S'_{n-1}}{S_1} = \frac{E'}{E}(n-1).$$



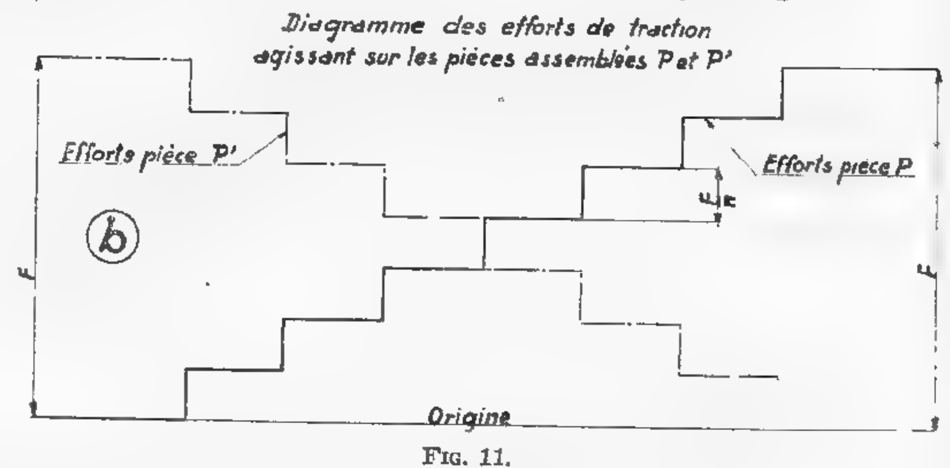


FIG. 11.

Dans *l'intervalle* 2 on a de même les sections moyennes et efforts ci-dessous :

PIÈCES	SECTIONS	EFFORTS
P	S_2	$F - 2\frac{F}{n} = F\frac{n-2}{n}$
P'	S'_{n-2}	$F - \frac{n-2}{n}F = 2\frac{F}{n}$

d'où la relation de compatibilité d'allongements :

$$\frac{F(n-2)}{n\,S_2\,E} = \frac{2\,F}{n\,E'\,S'_{n-2}}$$

d'où :

$$\rho_2 = \frac{S_2}{S'_{n-2}} = \frac{E'}{E}\cdot\frac{n-2}{2}.$$

En généralisant à un intervalle de rang k (c'est-à-dire compris entre les rangées k *et* $k+1$ comptées toujours à partir de la pièce P) on doit avoir :

$$\boxed{\rho_k = \frac{S_k}{S'_{n-k}} = \frac{E'}{E}\cdot\frac{n-k}{k}}$$

relation générale reliant entre elles les sections moyennes des deux pièces dans un même intervalle.

7.62 Remarques importantes. — *a*) Il est généralement difficile de satisfaire à la relation ci-dessus vers les extrémités des pièces, car leurs épaisseurs minima doivent rester compatibles avec la condition de matage.

L'exemple numérique donné au paragraphe suivant fera ressortir cette difficulté.

b) Cette relation théorique est établie en raisonnant sur des allongements élastiques. Elle n'est donc valable que dans le *domaine élastique* des matériaux constituant les pièces.

Cette relation suppose également que les éléments d'assemblage n'ont pas atteint de déformations permanentes de cisaillement et n'ont pas donné lieu à des ovalisations plastiques de matage des trous de fixation.

Elle constitue donc, en résumé, un *procédé de calcul avant limite élastique* [1].

c) Dans le *domaine plastique* il se produit un *effet d'accoutumance des* matériaux.

Supposons, par exemple, un assemblage réalisé, contrairement aux principes ci-dessus, en laissant subsister une section constante des éléments à assembler. Il est évident que les premiers éléments de jonction seront rapidement surchargés par rapport aux autres, ce qui entraînera un matage plastique ou un glissement plastique de cisaillement et déchargera alors ces éléments au profit des autres pour tendre encore vers une égale répartition des efforts.

C'est pourquoi un tel assemblage pourra très bien être justifié par un *essai statique à la rupture.*

Il n'en reste pas moins que certains éléments auront atteint très prématurément leur limite élastique, ce qui peut être très dangereux pour l'usage réel de l'assemblage, par suite des *jeux* et surtout de l'abaissement considérable de la *limite de fatigue aux efforts alternés* [2] ;

d) Il est à conseiller, en résumé, de toujours tendre à se rapprocher de la condition énoncée ci-dessus pour tous les assemblages importants (éclissage d'un longeron d'aile, par exemple, voir application ci-dessous).

7.7 APPLICATION NUMÉRIQUE : DÉTERMINATION DE LA LIAISON D'UNE SEMELLE DE LONGERON AVEC ÉCLISSE DE JONCTION.

7.71 Données. — Effort à transmettre : F=70000 kg (effort évalué à la limite de rupture).

Pièce P (semelle) en Duralumin AU 4G : $n_a=40$ kg/mm² E=7000 kg/mm².
Pièce P′ (éclisse) en acier 35CD4 : $n_a = 100$ kg/mm² E′ = 20000 kg/mm².

Liaison réalisée par 10 rangées de 2 boulons en acier 30NC11 traité à R = 85 kg/mm² ($t_a = 50$ kg/mm²).
Nombre total de boulons : N = 20.
Nombre de rangées : $n=10$ (9 intervalles).
Schéma de principe analogue à la fig. 11 (où P devient la pièce inférieure) avec $n = 10$.
Largeur des éléments : 80 mm. (Voir fig. 12 ci-après).

7.72 Détermination du diamètre des boulons.

Effort par boulon : $f = \frac{F}{N} = \frac{70000}{20} = 3500$ kg.

---

1. — Les calculs peuvent, malgré tout, être conduits avec des charges correspondant à la limite de rupture, comme dans l'application ci-après ; mais l'emploi de ces charges ne constitue alors qu'une convention commode pour comparer les contraintes atteintes aux valeurs admissibles les plus connues.

2. — Cette remarque constitue d'ailleurs un des principaux reproches que l'on peut adresser aux essais statiques à rupture.

Simple cisaillage (fig. 12) d'où :

section nécessaire $s=\frac{3500}{50}=70$ mm².

diamètre adopté $d=10$ mm

qui donne $s=78{,}5$ mm² >70.

7.73 **Affaiblissement des sections droites.** — La figure 12 représente une section droite de l'assemblage, passant par l'axe d'une rangée de boulons.

On voit que les sections nettes sont, par rapport aux sections brutes, dans le rapport :

$$r=\frac{80-20}{80}=\frac{60}{80}=0{,}75.$$

Les rapports ρ devant exister entre les sections brutes se conserveront donc pour les sections nettes.

Le procédé de calcul le plus simple consistera à raisonner avec des contraintes admissibles apparentes diminuées dans le rapport r soit :

Pièce P : $n_{a_1}=0{,}75\ n_a=0{,}75\cdot 40=30$ kg/mm²

Pièce P′ : $n'_{a_1}=0{,}75\ n'_a=0{,}75\cdot 100=75$ kg/mm².

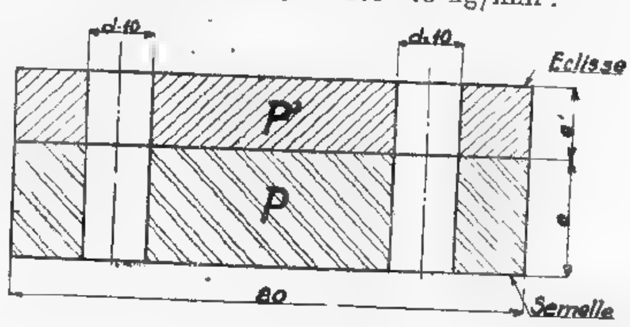


Fig. 12.

7.74 **Sections de départ nécessaires.** — En dehors de l'assemblage on doit avoir (équation d'équarrissage en traction) :

Pièce P : $S_0=\frac{70000}{30}=2333$ mm²,

soit une épaisseur : $e_0=\frac{2333}{80}=29{,}2$ mm.

Pièce P′ : $S'_0=\frac{70000}{75}=933$ mm²,

soit : $e'_0=\frac{933}{80}=11{,}7$ mm.

7.75 Epaisseurs minima nécessaires pour le matage.

Pièce P : $p_a=1{,}1\ n_a=44$ kg/mm² (boulons).

On doit avoir à la limite : $\frac{f}{d\ e_m}=p_a$

d'où : $$e_m=\frac{f}{p_a d}=\frac{3500}{44\cdot 10}=7{,}95 \text{ mm.}$$

Pièce P′ : $p'_a=1{,}1\ n'_a=110$ kg/mm²,

$$e'_m=\frac{3500}{110\cdot 10}=3{,}2 \text{ mm.}$$

7.76 **Tableau de calcul des épaisseurs e et e'.** — Les calculs sont groupés dans le tableau ci-dessous. On trouvera :

Colonne 1 : Le rang k de l'intervalle considéré (référence pièce P').

Colonnes 2 et 3 : Les efforts φ et φ' agissant en traction sur la pièce P et la pièce P'. Ces efforts sont donnés directement en kg par les expressions ci-dessous (Voir § 7.61) :

Pièce P : $\varphi = F - k\frac{F}{n} = F\left(1 - \frac{k}{n}\right) = 70000\ (1 - 0{,}1\ k).$

Pièce P' : $\varphi' = k\frac{F}{n} = 70000\frac{k}{10} = 7000\ k.$

Colonne 4 : Le rapport théorique

$$\rho = \frac{S}{S'} = \frac{\text{section semelle}}{\text{section éclisse}} \quad \text{soit (voir § 7.61).}$$

$$\rho = \frac{E'}{E}\,\frac{n-k}{k} = \frac{20000}{7000}\,\frac{10-k}{k} = 2{,}86\,\frac{10-k}{k}.$$

	INTER-VALLES	EFFORTS (tonnes)		RAPPORTS	SECTIONS (mm²)				ÉPAISSEURS (mm)			
					minima		théoriques		théoriques		réelles	
	k	φ	φ'	ρ	S_m	S'_m	S_1	S'_1	e_1	e'_1	e	e'
Semelle seule	0	70	0		2333	0					29,2	0
ASSEMBLAGE	1	63	7	25,7	2100	93,5	2405	93,5	30,2	1,17	29,2	3,2
	2	56	14	11,42	1866	187	2140	187	26,8	2,34	26,8	3,2
	3	49	21	6,67	1633	280	1868	280	23,4	3,5	23,4	3,5
	4	42	28	4,29	1400	373	1600	373	20	4,66	20	4,66
	5	35	35	2,86	1166	467	1335	467	16,7	5,84	16,7	5,84
	6	28	42	1,905	933	560	1070	560	13,4	7,0	13,4	7,0
	7	21	49	1,224	700	654	800	654	10	8,15	10	8,15
	8	14	56	0,714	466	747	533	747	6,7	9,4	7,95	9.4
	9	7	63	0,318	233	840	267	840	3,3	10,5	7,95	10,5
Eclisse seule	0'	0	70		0	933					0	11,7
N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Colonnes 5 *et* 6 : Les sections minima nécessaires S_m et S'_m de P et P' données (en mm²) par :

$$S_m = \frac{\varphi}{n_{a_1}} = \frac{\varphi}{30} = 0{,}0333\ \varphi$$

$$S'_m = \frac{\varphi'}{n'_{a_1}} = \frac{\varphi'}{75} = 0{,}0133\ \varphi.$$

Colonnes 7 *et* 8 *:* Les sections théoriques nécessaires S_1 et S'_1 satisfaisant à la fois aux conditions :

$$p = \frac{S_1}{S'_1}\ \text{(colonne 4)},$$

$$S_1 \leqslant S_m \qquad \text{et} \qquad S'_1 \leqslant S'_m.$$

On voit que, dans l'exemple étudié, c'est la section S'_m de l'éclisse qui définit la section théorique de la semelle :

$$S_1 - \rho\ S'_1 \ \text{(qui est toujours supérieure à } S_m).$$

Colonnes 9 *et* 10 : Les épaisseurs théoriques e_1 et e'_1 de P et P' correspondant à S_1 et S'_1 :

$$e_1 = \frac{S_1}{80} \qquad e'_1 = \frac{S'_1}{80}.$$

Colonnes 11 *et* 12 : Les épaisseurs réelles à adopter, compte tenu :
— d'une part des épaisseurs minima e_m et e'_m (matage, § 7.75),
— d'autre part des épaisseurs initiales e_0 et e'_0 des pièces (§ 7.74).
Les valeurs se trouvant modifiées ont été indiquées en *italique*.

7.77 Conclusions. — On voit que dans l'exemple ci-dessus, la relation théorique peut être satisfaite dans les intervalles 3 à 7 inclus.

Cette limite aurait pu être étendue en diminuant, dans les intervalles 1 et 2, la largeur de l'éclisse et en opérant de même pour la semelle dans les intervalles 8 et 9.

On aurait également avantage à utiliser un acier donnant une contrainte admissible n'_a telle que

$$n'_a = n_a \frac{E'}{E} = 40 \frac{20000}{7000} = 115 \text{ kg/mm}^2.$$

Remarque. — Les variations d'épaisseurs des pièces sont évidemment linéaires et les épaisseurs indiquées correspondent aux épaisseurs minima dans chaque intervalle.

8. CALCUL DES ASSEMBLAGES NON SYMÉTRIQUES PAR RAPPORT A LA DIRECTION DE L'EFFORT APPLIQUÉ (CALCUL DES NŒUDS)

8.0 POSITION DU PROBLÈME.

Soit à calculer l'assemblage représenté figure 13, chargé de transmettre une force F dirigée excentriquement par rapport à l'ensemble des éléments de liaison.

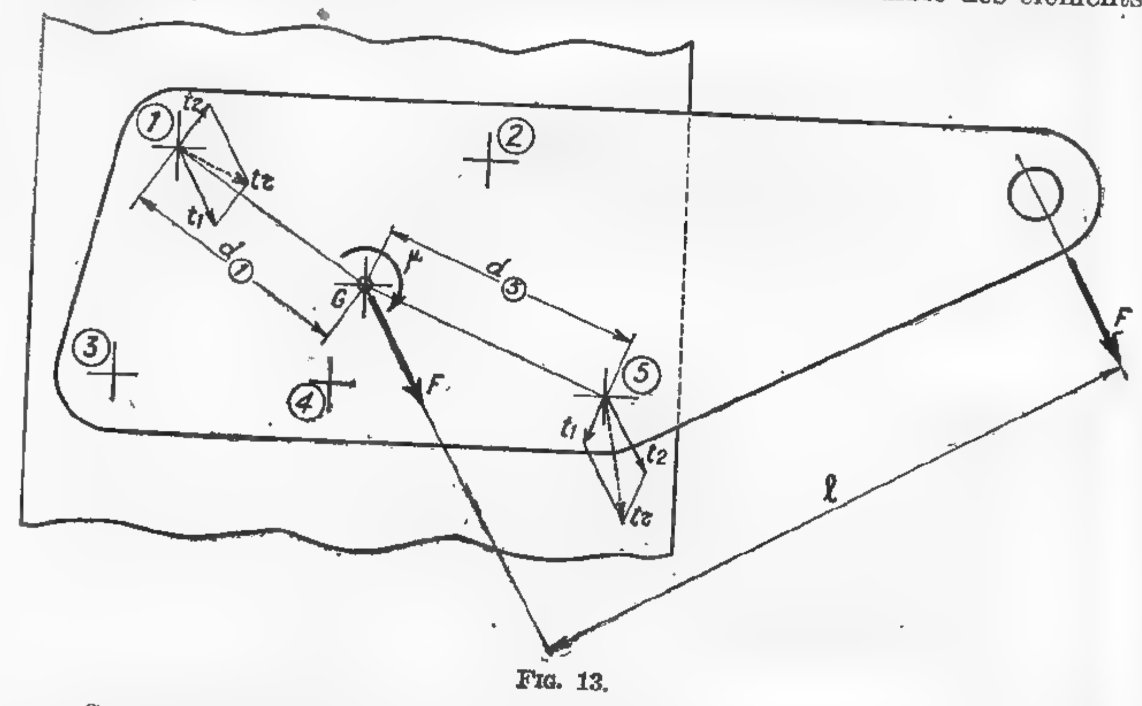


Fig. 13.

Cet assemblage comprend N éléments homogènes (ou rendus homogènes selon la méthode du § 6.3).

Déterminons le *centre de gravité* G *des sections cisaillées* [1] et transportons F en G où l'on trouve donc la force F et un couple de transport

$$\mu = Fl.$$

Etudions séparément le passage de l'un et de l'autre de ces efforts.

1. — Ces *sections cisaillées* peuvent comprendre des sections contenues dans le plan de la figure et des sections comprises dans d'autres plans. Ce serait, par exemple, le cas de la figure 13 si la pièce à assembler était en forme d'U dont les ailes seraient également reprises par des rivets ou boulons.

8.1 CONTRAINTES DUES A F.

On admet encore généralement, pour cet effort, l'hypothèse du paragraphe 7.1, c'est-à-dire une égale contrainte des éléments, bien que l'assemblage ne soit pas symétrique. On trouve alors une contrainte de cisaillage

$$t_1 = \frac{F}{N\ s}$$

(efforts correspondants dirigés parallèlement à la force F)

soit $$t_1 = \frac{F}{S}$$

avec S = section de l'ensemble des éléments de jonction.

8.2 CONTRAINTES DUES A μ.

La répartition des efforts dûs au moment μ peut s'étudier théoriquement en se plaçant dans *deux hypothèses limites.*

8.21 Première hypothèse : Pièce infiniment rigide vis-à-vis des éléments de fixation. — Les déformations de cisaillement (angles de glissement) sont alors proportionnelles aux bras de levier d des éléments, ce qui signifie que toute la pièce tourne « en bloc » autour de G.

Les contraintes sont donc également proportionnelles à d soit :

$$t_2 = k\ d$$

k étant un coefficient que nous allons déterminer.

L'effort f_2 agissant sur un élément est perpendiculaire à son bras de levier vaut :

$$f_2 = t_2 s = k\ d\ s.$$

Le moment équilibré par cet élément vaut :

$$\Delta\mu = f_2 = k\ s\ d^2$$

La somme de ces moments doit équilibrer μ.

D'où : $$\mu = \Sigma\ k\ s\ d^2 = k\ \Sigma\ s\ d^2.$$

Or, $\Sigma\ s\ d^2$ *représente le moment d'inertie polaire* I_G *de l'ensemble des sections cisaillées par rapport à* G (voir chap. II, § 8.6).

On a donc $$k = \frac{\mu}{I_G}$$

et la contrainte de cisaillement a pour expression :

$$t_2 = \frac{\mu}{I_G}\ d$$

ou encore $$t_2 = \frac{\mu}{\left(\frac{I_G}{d}\right)}$$

avec $\frac{I_G}{d}$ = *module d'inertie polaire* de la section considérée par rapport à G.

8.22 Deuxième hypothèse : Pièce très souple relativement aux fixations. — Dans ce cas, les contraintes des éléments tendent à s'égaliser (la pièce se déforme de telle façon que le travail des fixations soit minimum).

Désignons par t'_2 cette contrainte constante.

La force équilibrée par un rivet est

$$F'_2 = t'_2\ s$$

et le moment élémentaire

$$\Delta\mu = t'_2 s \quad d.$$

On doit donc avoir (équilibre)

$$\mu = \Sigma\, t'_2\ s\ d = t'_2\ \Sigma\ s\ d.$$

Or, Σsd représente le moment statique polaire W_G des sections cisaillées par rapport à G. On a donc

$$t'_2 = \frac{\mu}{W_G}.$$

Remarque. — On arriverait à la même conclusion dans l'hypothèse 1 quand les contraintes t_2 ont dépassé la limite élastique. Cette deuxième hypothèse est donc également une méthode de calcul en *période plastique*, ce qui explique qu'elle soit généralement vérifiée par les essais statiques à rupture.

On peut y apporter la même objection que celle donnée au paragraphe 7.62, remarque *c*).

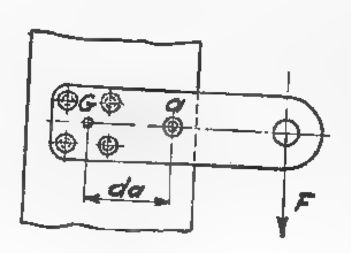


Fig. 14.

Nous conseillons donc, en définitive, l'utilisation de la première hypothèse qui conduit à une conception plus rationnelle des rivetages. Elle évite, par exemple, de situer un rivet très loin de l'ensemble des autres, comme c'est le cas du rivet *a* de la figure 14 pour lequel on trouverait, par la méthode 1, une contrainte t_2 très élevée (grand bras de levier d_2), ce qui correspond bien à la réalité pour les charges F d'utilisation, c'est-à-dire celles ne devant donner lieu à aucun dépassement de la limite d'élasticité.

8.3 CONTRAINTES RÉSULTANTES.

Pour chaque élément de liaison on détermine la contrainte de cisaillage résultante t_r obtenue par *combinaison géométrique* des contraintes t_1 et t_2 (parallélogrammes des forces) comme il est indiqué figure 13 pour les éléments 1 et 5.

L'élément subissant la plus forte contrainte serait ici l'élément n° 5.

9. CALCUL DES CHAPES A ŒIL

9.1 GÉNÉRALITÉS.

Nous donnons dans ce chapitre quelques formules de calcul des chapes à œil.

Il est à remarquer initialement que de tels organes échappent aux méthodes usuelles. Ils ne constituent pas, en effet, des pièces prismatiques et l'introduction des charges est trop rapprochée des sections calculées pour que les hypothèses courantes soient valables.

Ces formules sont donc essentiellement expérimentales [1].

9.2 FORMULES EXPERIMENTALES UTILISÉES EN CONSTRUCTION AERONAUTIQUE.

9.21 Formule 1. — On doit avoir

$$\boxed{\frac{F \cdot k}{(D-d)\ e} \leqslant n_a}$$

1. — Nous avons inclus ces formules dans le présent chapitre, car le problème a généralement été ramené à des calculs analogues à ceux de la traction ou du cisaillement simples avec des coefficients correcteurs expérimentaux.

n_a étant la contrainte admissible en traction du métal employé, et k un coefficient sans dimension déterminée par essais.

On trouve :

$k=1,2$ pour les chapes en acier,

$k=1,4$ pour les chapes en duralumin (AU4G).

Cette formule semble donc ramener la résistance de la chape à la tenue en traction de la section diamétrale XX′, la contrainte admissible étant réduite dans le rapport $\frac{1}{k}$ (ce qui s'explique par suite des efforts supplémentaires de flexion agissant réellement dans cette section).

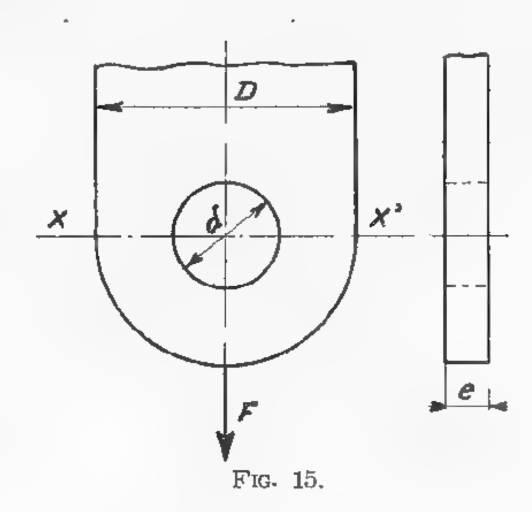
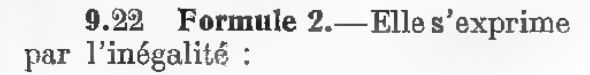


Fig. 15.



9.22 Formule 2.—Elle s'exprime par l'inégalité :

$$\boxed{\frac{4}{3}\,\frac{F}{(D-d)\;e} \leqslant n_a.}$$

Cette formule est très voisine de la précédente. Elle correspond, en effet, à un coefficient

$$k=\frac{4}{3}=1,33$$

soit sensiblement la moyenne des valeurs données ci-dessus pour l'acier et le Duralumin.

9.3 FORMULE DE LAME.

Les formules précédentes tombent en défaut quand l'épaisseur $\frac{D-d}{2}$ de la chape devient faible (chapes larges, têtes de bielles, voir fig. 16). On peut alors, avec une approximation raisonnable, utiliser la *formule de Lamé* établie pour les réservoirs à parois épaisses chargés par une pression intérieure.

On obtient, en utilisant la formule simplifiée donnée au chapitre VI, paragraphe 5.7 (cas où la pression extérieure $p'=0$) et en faisant

$$p=\frac{F}{d\,e}=\text{pression de matage :}$$

$$\boxed{\frac{F}{d\,e}\,\frac{D^2+d^2}{D^2-d^2} \leqslant n_a}$$

(contrainte de traction dirigée tangentiellement à l'alésage intérieur).

Ceci revient donc à amplifier la pression de matage dans le rapport

$$\frac{D^2+d^2}{D^2-d^2}.$$

L'application de cette formule conduit donc à limiter le taux de matage à des valeurs faibles, ce qui est très correct pour les éléments auxquels elle s'applique.

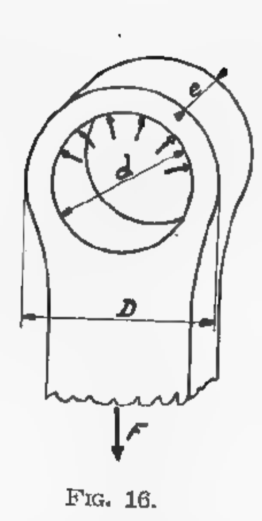


Fig. 16.

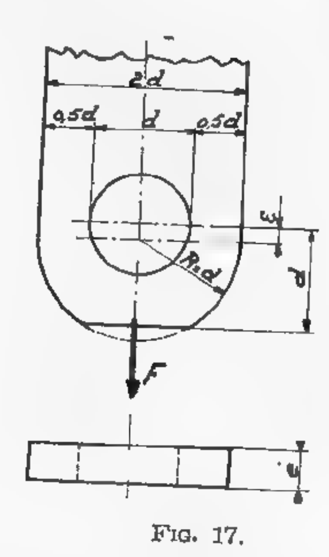


Fig. 17.

9.4 FORMULES DE CALDERINI [1].

Ces formules découlent d'essais systématiques très complets décrits dans les revues citées en note. Elles ont l'avantage de donner des indications sur le choix de toutes les cotes de fabrication d'une chape à œil.

D'après cet auteur, une chape optimum doit affecter la forme représentée figure 17 avec les relations :

$$\varepsilon = 0{,}133\ d \text{ (excentricité du rayon R)}$$

$$e = \frac{F}{0{,}947\ d\ n_a} = \text{épaisseur de la chape.}$$

Le diamètre d de l'axe se calcule d'après les conditions de cisaillage de cet axe

Si l'on désigne (pour se placer dans un cas général) par F′ l'effort de cisaillement agissant dans une section cisaillée et par F″ l'effort agissant dans l'autre section cisaillée (ces efforts étant tels que $F = F' + F''$): on aura donc les contraintes moyennes de cisaillage :

$$t' = \frac{F'}{\frac{\pi}{4} d^2} \quad \text{et} \quad t'' = \frac{F''}{\frac{\pi}{4} d^2}$$

ces contraintes devant être inférieures à la contrainte t_a admissible pour l'axe.

On peut encore écrire directement, en posant F_m = maximum des deux valeurs F′ ou F″ :

$$d \geqslant \sqrt{\frac{4\ F_m}{\pi\ t_a}}.$$

Remarques. — *a*) Vérifions la *contrainte apparente de traction* ainsi atteinte dans la section diamétrale :

$$n = \frac{F}{2 \cdot 0{,}5\ d \cdot e} = \frac{F}{d\ e}.$$

soit, en remplaçant e par sa valeur,

$$n = \frac{F \cdot 0{,}947\ d\ n_a}{d\ F} = 0{,}947\ n_a.$$

1. — *Aérotechnica,* mai-juin 1941. Traduction française G.R.A., n° 440.

Ce qui revient à un coefficient $k = \frac{1}{0,947} = 1,06$ dans les formules précédentes.

b) Vérifions la *condition de matage* :

$$p = \frac{F}{d \cdot e} = n = 0,947 \ n_a.$$

Cette condition est donc également satisfaite implicitement.

CHAPITRE IX

FLEXION PLANE

THÉORIE ET APPLICATIONS

0. INTRODUCTION

L'étude du phénomène de flexion des poutres est souvent considérée comme le « problème type » de la résistance des matériaux.

Cette considération provient du fait que la flexion constitue le mode de travail le plus fréquent des éléments de construction. C'est également elle qui donne lieu, le plus souvent, aux contraintes prédominantes de ces éléments.

Nous donnons aux paragraphes **1.** et **2.** de ce chapitre quelques généralités sur la flexion ayant pour objet de faire ressortir une classification des différents types de réalisation de ce phénomène et d'établir quelques relations fondamentales utilisées par la suite.

Les paragraphes **3.** et **4.** traitent de la théorie sommaire de la *flexion plane* qui constitue le type de flexion le plus fréquemment rencontré. Les paragraphes suivants sont réservés à des applications classiques de la flexion plane, orientées principalement en vue de leur utilisation en construction aéronautique.

Les chapitres X et XI compléteront l'étude de la flexion, en ce qui concerne les déformations et les phénomènes de flexion gauche.

1. GÉNÉRALITÉS SUR LE PHÉNOMÈNE DE FLEXION

1.1 DÉFINITION.

On dit qu'une poutre prismatique travaille en flexion quand les efforts qui la sollicitent tendent à *modifier sa courbure longitudinale :*

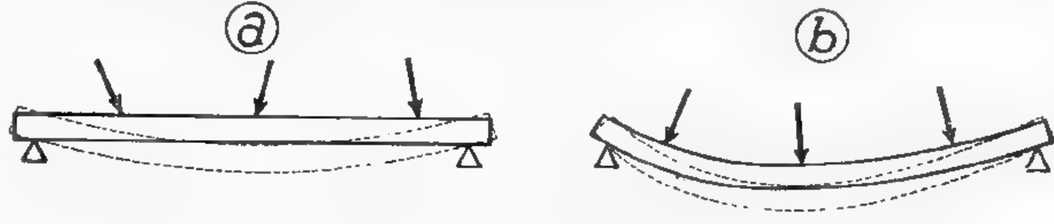


FIG. 1.

Si la poutre est initialement rectiligne, elle tend à s'incurver (fig. 1 *a*).
Si la poutre est initialement courbe, elle tend à se redresser ou à s'infléchir davantage (fig. 1 *b*).

Cette définition qui fait appel à une idée de *rotation* différencie la flexion des phénomènes précédemment étudiés (traction, compression, cisaillement simples) qui ne mettaient en jeu que des *translations* longitudinales ou transversales. On conçoit donc qu'il entrera ici une grandeur qualificative de rotation, c'est-à-dire un *moment*, précédemment défini comme étant le *moment de flexion* (chap. V, § 1.1).

1.2 SOLLICITATIONS ACCOMPAGNANT LA FLEXION.

La flexion proprement dite agit rarement seule.

Elle est le plus souvent accompagnée de *cisaillement* provenant de l'*effort tranchant*.

Elle peut également être accompagnée d'efforts axiaux de *compression* ou de *traction* (efforts normaux).

Elle peut enfin s'accompagner d'un phénomène de *torsion* de la poutre à laquelle elle s'applique.

1.3 CLASSIFICATION GÉNÉRALE DES PHÉNOMÈNES DE FLEXION.

Nous distinguerons deux catégories générales de flexion, cette distinction étant due à une *observation physique des déformations* qui accompagnent ces phénomènes.

a) FLEXION PLANE. — On dit qu'une poutre prismatique travaille en *flexion plane* quand ses « fibres longitudinales » se déforment en restant dans un même plan qui est également celui des efforts appliqués, ce plan commun définissant alors le *plan de flexion* de la poutre.

La déformation ne doit pas s'accompagner d'un phénomène de rotation (ou de déversement) des sections droites autour d'un axe orienté parallèlement à la fibre moyenne longitudinale de la poutre. Les sections droites doivent théoriquement rester planes et normales à la fibre moyenne après déformation [1]. Le présent chapitre est réservé à l'étude de ce phénomène.

b) FLEXION GAUCHE. — Nous grouperons sous cette désignation commune tous les phénomènes ne donnant pas lieu aux conditions de flexion plane énoncées ci-dessus. L'étude de ces phénomènes sera effectuée au chapitre XI.

1.4 CONDITIONS DE RÉALISATION DE LA FLEXION PLANE.

Nous nous bornerons ici à énoncer des *conditions restrictives toujours suffisantes* pour permettre la réalisation de la flexion plane.

Ces conditions se trouveront élargies et précisées au cours du chapitre XI [2].

Ces conditions restrictives sont les suivantes :

a) Les poutres (prismatiques et isotropes) *doivent comporter au moins un plan de symétrie longitudinal ;*

b) *Les forces appliquées* (ou les résultantes de ces forces dans le plan de chaque section droite) *doivent être contenues dans ce plan de symétrie.*

Ce plan de symétrie et des efforts devient donc également le *plan de flexion* précédemment défini, c'est-à-dire le *plan des déformations.*

Remarques. — Il n'est pas nécessaire que l'axe longitudinal de la poutre

---

1. — Cette condition est conforme à l'*hypothèse de Bernoulli* (chap. V, § 3.221). Nous verrons ci-après qu'en réalité il se produit un léger gauchissement des sections dû aux déformations de cisaillement qui accompagnent celles de flexion proprement dite.

2. — Ces conditions générales nécessitent, en effet, l'étude préalable des phénomènes exposés ci-après, notamment de ceux qui concernent la répartition de l'effort tranchant.

soit rectiligne. Les poutres *a* et *b* de la figure 2 qui possèdent la même vue en plan *c* travailleront en flexion plane si les efforts qui leur sont appliqués sont contenus dans le plan de symétrie XX'.

Il est visible, par contre, que la poutre représentée figure 3 ne peut travailler en flexion plane. On voit d'ailleurs, très simplement, que la réduction des efforts dans une section droite fait apparaître un *moment de torsion* (bras de levier *d* par exemple).

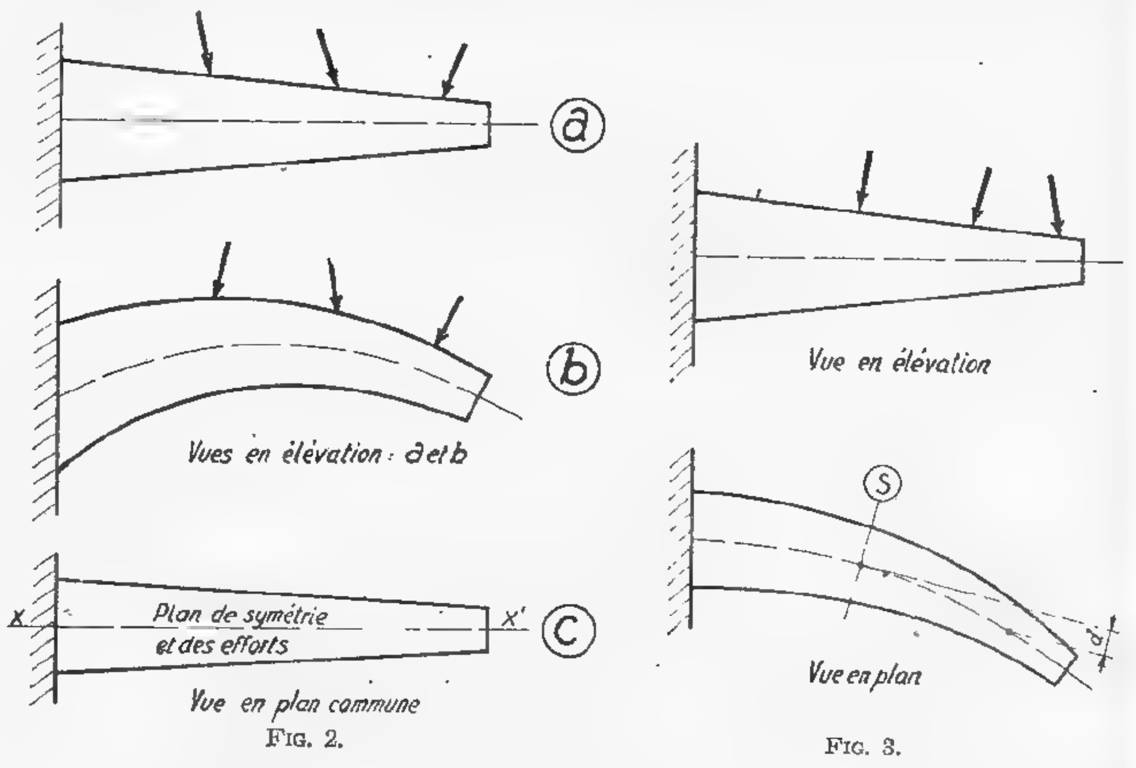


FIG. 2. FIG. 3.

1.5 · DIFFÉRENTS CAS DE FLEXION PLANE.

1.51 Flexion plane simple. — La flexion plane est dite *simple* quand la réduction des efforts dans une section quelconque ne comporte *pas d'effort normal.*

Il faut donc nécessairement que l'axe longitudinal de la poutre soit *rectiligne* et que les forces appliquées soient *normales* à cet axe longitudinal.

Les efforts appliqués à une section peuvent donc comprendre au maximum un *moment fléchissant* M et un *effort tranchant* T.

1.52 Flexion circulaire. — La flexion plane simple est dite *circulaire* quand les efforts appliqués ne comprennent plus qu'un moment fléchissant sans effort tranchant. C'est le cas le plus simple de la flexion.

On l'obtient, par exemple, dans la partie AB d'une poutre sur deux appuis chargée symétriquement sur ses extrémités en porte-à-faux (fig. 4 *a*) ou dans la partie AB d'une console encastrée soumise à un couple (fig. 4 *b*). (Voir les diagrammes des efforts internes relatifs à chaque figure [1].)

Nous verrons plus loin que les déformées de ces poutres dans les régions AB sont des arcs de cercle, ce qui justifie l'appellation de flexion circulaire.

1.53 Flexion plane composée. — La flexion plane est dite *composée* quand la réduction des efforts dans une section quelconque comporte un effort normal en plus du moment fléchissant et éventuellement de l'effort tranchant.

---

1. — Se reporter, pour l'établissement de ces diagrammes, au chap. V, § 1.5.

Dans ce cas, la résultante des efforts appliqués est oblique par rapport à l'axe longitudinal.

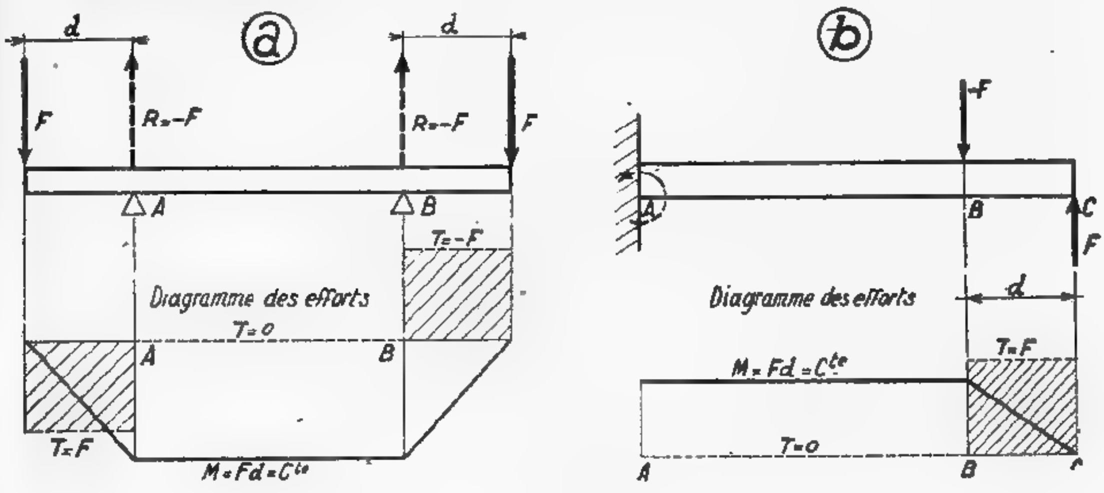


Fig. 4.

1.54 **Classification.** — Nous avons donc, par ordre de complication croissante, les trois types suivants de flexion plane :

Flexion plane circulaire (moment fléchissant seul).
Flexion plane simple (moment fléchissant et effort tranchant).
Flexion plane composée (moment fléchissant, effort tranchant et effort normal).

2. RELATIONS ENTRE LES EFFORTS APPLIQUÉS AUX SECTIONS DROITES DES POUTRES FLÉCHIES

2.1 RELATION ENTRE LE MOMENT FLÉCHISSANT ET L'EFFORT TRANCHANT.

2.11 **Cas de la flexion simple (pas d'effort normal).** — Soit une poutre droite travaillant en flexion plane et simple sous l'action des forces extérieures et des réactions qui lui sont appliquées (fig. 5). Considérons deux sections droites AB et CD très voisines, séparées par l'intervalle trés petit Δx.

L'ensemble des efforts extérieurs appliqués à gauche de la section AB donne au centre de gravité G de cette section :

— Un *effort tranchant* T qui est la résultante des forces extérieures (y compris les réactions) :

— *Un moment fléchissant* M qui est la résultante des moments par rapport à G des forces extérieures et des réactions (voir définition des efforts internes chap. V, § **1.1**).

L'effort tranchant T et le moment fléchissant M forment un *système équivalent* au système des forces appliquées à gauche de la section AB.

Pour trouver le moment M' agissant au centre de gravité G' de la section CD, il suffit d'effectuer le transport de T et M de G en G'. On a par conséquent [1]

$$M' = M + T\,\Delta x$$

le terme $T\Delta x$ représentant le moment par rapport à G' de l'effort tran-

1. — La distance Δx étant, par définition, très faible, l'effort tranchant T peut être considéré constant dans l'intervalle qu'elle délimite.

chant T appliqué en G. Nous en déduisons, en appelant ΔM l'accroissement très petit du moment fléchissant :

$$\Delta M = M' - M = T\,\Delta x$$

d'où

$$T = \frac{\Delta M}{\Delta x}.$$

Si l'intervalle Δx diminue de plus en plus, il en est de même de l'accroissement ΔM et nous pouvons écrire, avec la *notation différentielle* définie au chapitre I, paragraphe **3.4** :

$$\boxed{T = \frac{dM}{dx}\,.} \qquad (1)$$

Cette relation exprime que l'effort tranchant T représente, en tout point de la poutre, la *dérivée du moment fléchissant* M *par rapport à la variable x* (c'est-à-dire par rapport à la *dimension longitudinale* de la poutre) (voir chap. I. § 4.).

Inversement, l'expression du *moment fléchissant* M par rapport à x est la *fonction primitive* de celle de l'effort tranchant, ce qui s'écrit :

$$\boxed{M = \int T\,dx + C} \qquad (2)$$

(voir chap. I, § 5.3).

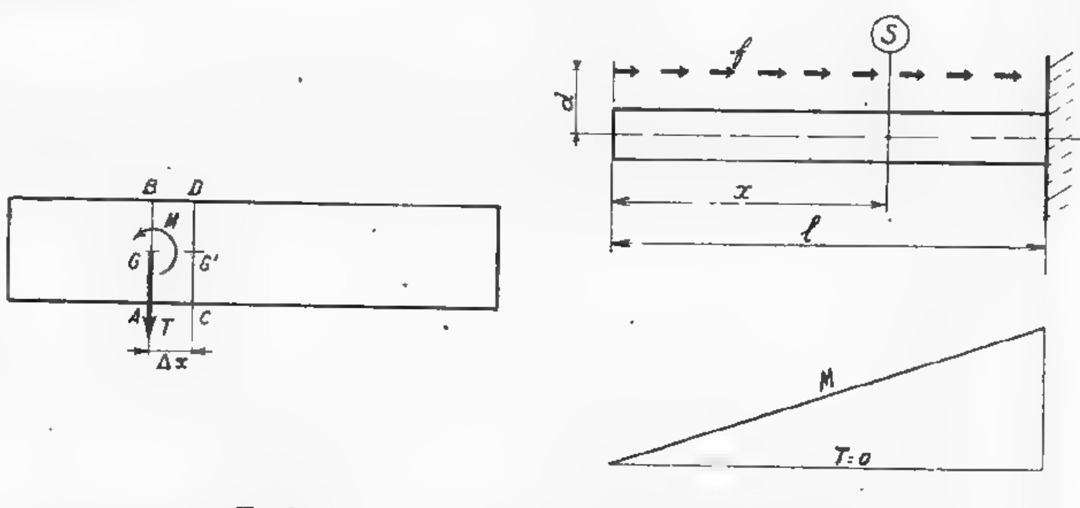


FIG 5.

FIG. 6.

2.12 Généralisation. — Les relations ci-dessus, établies dans le cas de la *flexion des poutres droites*, peuvent se généraliser aux autres cas de flexion moyennant la réserve importante suivante :

Ces relations restent valables, pour les poutres droites ou courbes travaillant en flexion composée, tant que les *efforts normaux* appliqués à ces poutres n'introduisent pas, par eux-mêmes, au niveau des sections auxquelles ils sont appliqués, des accroissements de moment fléchissant.

En d'autres termes, il est nécessaire que les efforts normaux (traction, compression) soient appliqués directement sur les axes des poutres prismatiques envisagées.

Il est facile de vérifier la réserve ci-dessus dans le *cas particulier* suivant (fig. 6).

Soit une poutre droite encastrée à une extrémité soumise uniquement à un système de *charges réparties parallèles à l'axe de la poutre*, introduites

de façon continue sur cette poutre et dont l'intensité linéaire est f (en kg par mm courant par exemple). Le moment fléchissant dans une section courante S située à une abscisse x de l'extrémité libre vaut :

$$M = \text{effort de gauche} \times \text{bras de levier} - f\ x\ d.$$

On a donc un diagramme de moments *linéaire* représenté par la droite inclinée de la figure 6, tandis que l'effort tranchant est toujours nul et ne peut donc être la dérivée d'une fonction croissante. On a d'ailleurs mathématiquement :

$$\frac{dM}{dx} = f\ d, \text{ valeur non nulle, tandis que } T = 0.$$

2.13 Utilité directe de ces relations.

2.131 *Les relations* (1) *et* (2) *ci-dessus sont utilisées d'une façon générale quand on détermine algébriquement les efforts appliqués aux poutres* (voir ci-après § 7.4).

2.132 *Elles peuvent servir, quelle que soit la méthode de calcul utilisée, à effectuer une première* vérification rapide *des efforts appliqués aux poutres quand ceux-ci ont été représentés graphiquement sur un même diagramme* (*ce qui est toujours à conseiller*). *Il suffit alors de se rappeler les propriétés mutuelles des courbes dérivées et primitives* (chap. I, § 4.2) *qui s'énoncent ici :*

Quand T est positif M croît ;
Quand T s'annule M passe par un maximum ou un minimum ;
Quand T est négatif M décroît ;
Quand T passe brusquement d'une valeur à une autre (point d'application d'une charge concentrée), la courbe de M se brise au point correspondant : elle possède deux tangentes en ce point dont les pentes sont définies respectivement par les valeurs de T de part et d'autre de ce point.

La figure 7 illustre ces différentes propriétés [1].

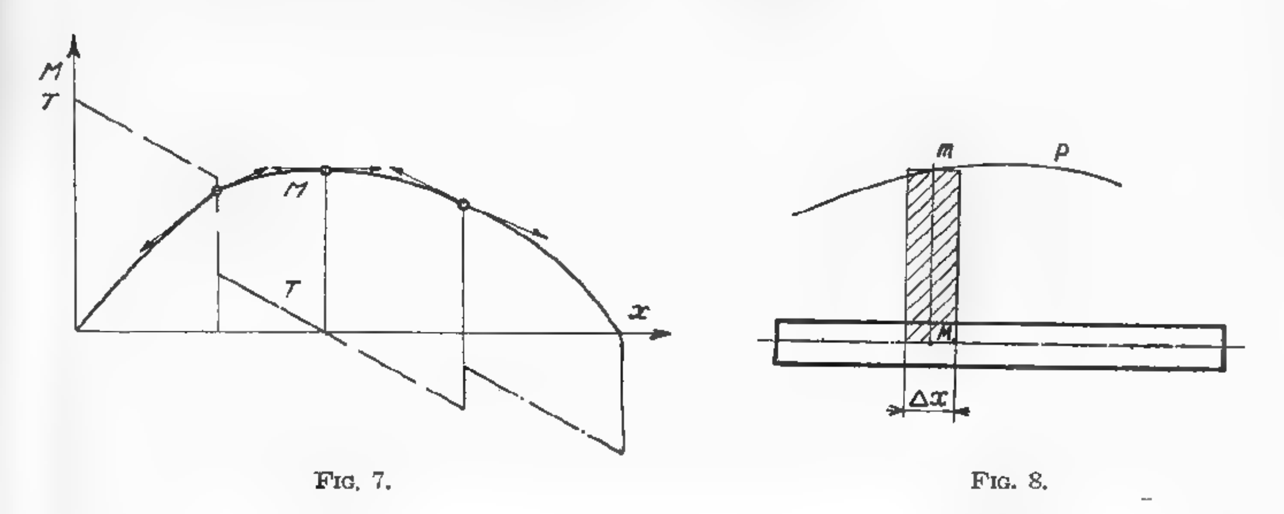


FIG. 7.

FIG. 8.

2.133 *Quand on connaît la courbe de* T *on peut déterminer celle de* M *par le procédé d'*intégration graphique *développé au chapitre IV, paragraphe* **8.**

1. — Les flèches terminales des tangentes n'indiquent que les directions de celles-ci et non leurs sens positifs qui restent orientés dans le sens de x.

2.2 RELATION ENTRE L'EFFORT TRANCHANT ET L'ORDONNÉE DE CHARGE EN UN POINT D'UNE POUTRE FLÉCHIE.

Nous avons défini au chapitre IV, paragraphe **6.41** l'ordonnée p de la *courbe de charges réparties appliquées à une poutre.*

2.21 Poutre droite. — Considérons (fig. 8) une poutre droite quelconque soumise à une charge répartie p. Dans un intervalle Δx entourant un point M, *l'accroissement d'effort tranchant* (égal à l'accroissement de charge) est mesuré par l'aire hachurée, soit

$$\Delta T = p \Delta x.$$

On en déduit immédiatement :

$$p = \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

soit, à la limite, quand Δx devient infiniment petit :

$$\boxed{p = \frac{dT}{dx}.}$$

Théorème. — L'ordonnée de charge est la dérivée de la fonction effort tranchant par rapport à la variable x (dimension longitudinale de la poutre).

Il existera donc entre p et T les mêmes propriétés que celles énoncées ci-dessus entre **T** et **M.**

Corollaire. — Il est facile de voir que p est la *dérivée seconde de* **M** *par rapport à x, ce qui s'écrit :*

$$\boxed{p = \frac{d^2M}{dx^2}.}$$

2.22 Généralisation. — Les propriétés ci-dessus se généralisent pour les poutres courbes à condition que p représente l'*ordonnée de charge normale* c'est-à-dire des charges agissant *perpendiculairement à la fibre moyenne* de la poutre prismatique.

En développant cette fibre moyenne sur une droite, on retombe ainsi sur le cas des poutres rectilignes.

Nous trouverons ci-après des applications de ces relations.

3. THÉORIE DE LA FLEXION PLANE DES POUTRES DROITES

3.1 FIBRES NEUTRES.

Considérons une poutre prismatique rectiligne que nous supposerons, pour fixer les idées, posée sur deux appuis et soumise à l'action d'une charge concentrée **F** normale à l'axe de la poutre (fig. 9).

Nous pouvons admettre que la poutre est formée d'un très grand nombre de « fibres longitudinales » parallèles entre elles et soudées les unes aux autres.

Sous l'action de la force F, la poutre s'incurve et prend la forme représentée figure 9. L'expérience montre que les fibres de la partie convexe (partie inférieure) se sont *allongées*, tandis que celles de la partie concave se sont *raccourcies.*

Comme ces variations de longueurs sont continues, il existe une région intermédiaire où les fibres n'ont pas varié de longueur. On appelle ces fibres invariables, les *fibres neutres*. Leur ensemble constitue la *couche neutre* de la pièce. Dans la flexion plane, par raison de symétrie, la couche neutre est

une surface normale au plan de symétrie de la poutre qui est aussi le plan des efforts (plan de flexion).

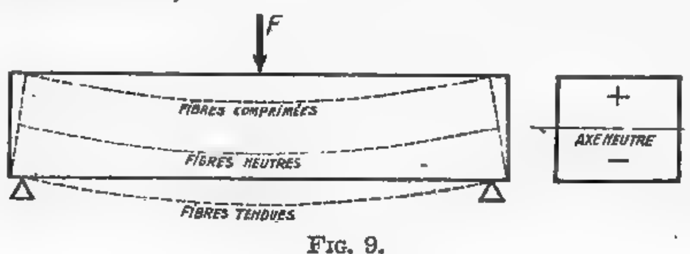


Fig. 9.

D'après la *loi de Hooke*, les fibres qui se sont allongées ont été soumises à de la *traction*. Ce sont, dans le cas de la figure 9, les fibres situées au-dessus de la couche neutre. On les appelle *fibres tendues*. De même, les fibres situées au-dessus de la couche neutre qui se sont raccourcies, ont été soumises à de la *compression*. Ce sont les *fibres comprimées*. Les fibres neutres n'ayant pas varié de longueur n'ont été soumises à aucun effort normal.

La droite d'intersection de la couche neutre avec le plan d'une section droite s'appelle l'*axe neutre de la section considérée.*

3.2 ÉQUATIONS DE RÉSISTANCE.

Nous désignons ainsi les relations permettant d'obtenir en chaque point les *contraintes normales* dues au phénomène de flexion. Nous les établirons dans le cas de la flexion simple pour les généraliser ensuite dans le cas de la flexion composée.

3.21 Flexion plane simple.

3.211 *Position du problème.* — Considérons (fig. 10 *a*) une poutre droite encastrée (pour fixer les idées) et chargée par un système de forces F normales à l'axe longitudinal de la poutre. Cette poutre est donc soumise à la flexion simple (pas d'effort normal).

Soient, dans cette poutre, deux sections droites très voisines LB et A_1B_1 séparées par une distance très petite Δx et soient T l'effort tranchant et M le moment fléchissant dans cet intervalle.

Après déformation AB vient en A′ B′ et $A_1 B_1$ en $A'_1 B'_1$.

Par rapport à la section A′ B′, la section $A'_1 B'_1$ a subi une rotation et un glissement. Le glissement est dû à l'effort tranchant (voir chap. VIII). Etudions la *rotation*, qui est due à la flexion c'est-à-dire au moment fléchissant. L'étude du glissement sera effectuée plus loin (§ 3.5).

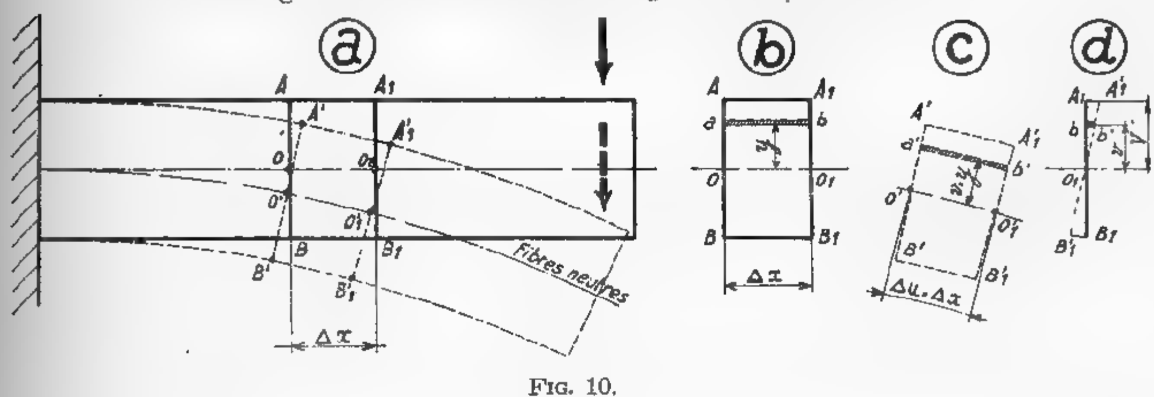


Fig. 10.

3.212 *Déformations de rotation.* — Isolons l'élément de la poutre $ABA_1 B_1$ (fig. 10 *b*) qui devient $A'B\ A'_1B'_1$ après déformation (fig. 10 *c*). Par hypothèse on a

$$AA_1 = 00_1 = BB_1 = \Delta x.$$

Après déformation $A'A'_1$ est plus grand que AA_1 et $B'B'_1$ est plus petit que BB_1. Mais, par définition sur la couche neutre on a

$$00_1 = 0'0'_1 = \Delta x.$$

Le *déplacement relatif de rotation* de $A'_1B'_1$ par rapport à A_1B_1 est représenté figure 10 *d*. Le point 0_1 est la trace de l'axe neutre qui est aussi l'*axe de rotation*. Pour une fibre *ab*, située à la distance $v = 0_1b$ de la fibre neutre, qui devient $a'b'$ après déformation on voit que l'on a (fig. 10 *d*)

$$\frac{\overline{bb'}}{0_1b} = \frac{\overline{bb'}}{v} = \frac{\overline{A_1A'_1}}{0_1A_1} = \frac{\overline{B_1B'_1}}{0_1B_1} = \text{Constante.}$$

L'allongement réel $\overline{bb'}$ *d'une fibre quelconque est donc proportionnel à la distance v de cette fibre à l'axe neutre.* Il en est donc de même des *allongements relatifs* puisque la longueur initiale Δx est identique pour toutes les fibres.

3.213 *Contraintes normales de flexion.* — Or, d'après la loi de Hooke, la *contrainte normale* d'une fibre est proportionnelle à son allongement relatif (chap. V, § 4.2). Donc la contrainte normale *n* subie par la fibre *ab* est proportionnelle à sa distance *v* à l'axe neutre, ce que nous écrirons par la relation :

$$n = k\,v \qquad (1)$$

k étant un *coefficient de proportionnalité* que nous allons déterminer.

Nous allons, pour cela, écrire que les *efforts internes* développés par les déformations de flexion de toutes les « fibres » traversant une même section S *équilibrent* le moment fléchissant M appliqué à cette section.

Considérons, sur la figure 11, qui représente la vue en perspective de la figure 10 *d*, un élément de surface *s* entourant l'extrémité de la fibre *ab* envisagée.

La *force intérieure* s'exerçant sur cet élément soumis à la contrainte *n* est

$$f = n\,s$$

soit

$$f = k\,v\,s.$$

Le *moment élémentaire* par rapport à 0_1 de cette force est

$$m = f\,v = k\,s\,v^2.$$

L'élément $A'B'A'_1B'_1$ étant en *équilibre*, la somme des moments des forces intérieures est égale à la somme des moments des forces extérieures, donc au moment fléchissant M dans la section A_1B_1.

On a donc

$$M = \Sigma\,k\,s\,v^2 = k\,\Sigma\,s\,v^2.$$

Or, le terme Σsv^2 représente le *moment d'inertie de la section* A_1B_1 *par rapport à l'axe neutre*. Désignons-le par I.

Fig. 11.

Nous avons donc

$$M = k\,I \qquad \text{d'où} \qquad k = \frac{M}{I}.$$



Portons cette valeur de *k dans la formule* (1), nous obtenons la formule

fondamentale de la flexion plane qui nous donne la *contrainte normale engendrée par la flexion* pour une fibre située à la distance v de l'axe neutre :

$$\boxed{n = \frac{M}{I} v} \quad \text{ou} \quad \boxed{n = \frac{M}{\frac{I}{v}}}$$

3.214 *Contraintes normales maxima.* — La contrainte normale d'une fibre étant proportionnelle à sa distance à l'axe neutre, elle est maximum pour la *fibre la plus éloignée* de cet axe. On désigne généralement par V la distance de cette fibre à l'axe neutre. Donc

$$n_{\max} = \frac{M}{I} V$$

soit

$$\boxed{n_{\max} = \frac{M}{\left(\frac{I}{V}\right)}.}$$

Nous avons vu au chapitre II, paragraphe 8.7 que $\left(\frac{I}{V}\right)$ s'appelait le *module d'inertie* ou *module de flexion* de la section considérée, par rapport à l'axe neutre.

3.215 *Position de l'axe neutre* (voir fig. 11). — Le système des forces intérieures normales f est équivalent à un *couple pur* qui équilibre le moment fléchissant, puisque, par définition de la flexion plane simple, le système des forces extérieures n'a pas de composante normale et qu'il y a équilibre entre les forces intérieures et extérieures.

Donc, en projetant toutes les forces sur la fibre neutre, on a

Σf=somme des projections des forces extérieures normales=0.

Or $\quad f = n\, s \quad$ et $\quad n = k\, v.$
Donc $\quad \Sigma\, ksv = k\Sigma sv = 0.$
On a donc $\quad \Sigma\, sv = 0.$

La somme des *moments statiques* des éléments de surface par rapport à l'axe neutre doit donc être nulle. Or cette propriété est l'équation de définition du *centre de gravité* de la section ; v étant la distance d'un élément de surface s à un axe passant par le centre de gravité.

On voit donc que, *dans le cas de la flexion plane simple, l'axe neutre de chaque section passe par le centre de gravité de cette section.*

Il est évident que cet axe est *normal au plan de flexion* (plan de symétrie et des efforts).

3.22 Flexion plane composée.

3.220 *Remarque préliminaire* — La théorie de la flexion plane composée des poutres droites, exposée ci-après, ne constitue, en réalité, qu'une *théorie simplifiée.*

Elle néglige, en effet, les *moments fléchissants complémentaires* engendrés par suite du décalage qui existe, après déformation, entre les centres de gravité des sections droites et les lignes d'action des efforts normaux (confondues avec l'axe neutre initial).

Une étude plus poussée de ce phénomène nécessite la connaissance préalable de la théorie du flambage des poutres droites. Nous l'effectuerons ultérieurement au chapitre XVI.

Signalons toutefois que la théorie simplifiée ci-après, qui suppose donc

les déformations de flexion faibles ou les efforts normaux relativement peu élevés, reste applicable à la grande majorité des cas usuels.

3.221 *Position de l'axe neutre.* — Dans le cas de la flexion plane composée, le système des forces extérieures a une composante normale N qui doit être également équilibrée par le système des forces intérieures normales f. Celui-ci n'est donc plus équivalent à un couple pur.

On a maintenant

Σf = somme des projections des forces extérieures normales = N.

L'axe neutre ne passe donc plus par le centre de gravité de la section. Il doit être *décalé* d'une quantité telle que l'on retrouve *l'équilibre global* des forces (voir ci-après § 3.226).

3.222 *Contraintes normales de flexion pure.* — D'après le *principe de la superposition des effets élastiques* (qui découle directement de leur équation de proportionnalité) [1] *les contraintes normales de flexion pure*, c'est-à-dire celles dues au moment fléchissant M uniquement, sont toujours données par l'équation fondamentale établie ci-dessus, soit

$$n_1 = \frac{M}{I} v$$

dans laquelle :

I = moment d'inertie de la section droite considérée, par rapport au même axe qu'en flexion simple ; c'est-à-dire ici *par rapport à un axe parallèle à l'axe neutre et passant par le centre de gravité de la section.* Cet axe est donc toujours également normal au plan de flexion (flexion plane) ;

v = distance de l'élément de surface considéré à l'axe défini ci-dessus.

3.223 *Contraintes normales supplémentaires.* — *L'effort normal* N (traction ou compression) qui agit sur une section considérée engendre des contraintes normales de *traction ou compression simples* qui sont donc données par :

$$n_2 = \frac{N}{S}$$

avec S = aire totale de la section considérée.

3.224 *Contraintes normales résultantes de flexion composée.* — Il y a lieu d'ajouter *algébriquement* les contraintes n_2 aux contraintes n_1, on obtient ainsi l'*expression générale des contraintes normales de flexion composée :*

$$\boxed{n = \frac{M}{I} v + \frac{N}{S}.}$$

Remarque importante. — Nous avons dit que la somme figurée par la relation ci dessus était une *somme algébrique*, c'est-à-dire une addition ou une soustraction selon les *signes respectifs* de n_1 et de n_2. Avec nos conventions habituelles n_2 sera positif dans le cas d'un effort N agissant en compression. Cette contrainte s'ajoutera donc arithmétiquement aux contraintes n_1 pour les fibres comprimées et se retranchera des contraintes n_1 pour les fibres tendues. Si n_2 est négatif (traction) : raisonnement inverse.

1. — Ce principe de superposition se trouve modifié, en réalité, par les considérations exposées dans la remarque préliminaire ci-dessus.

3.225 *Représentation graphique.* — Il est très commode d'illustrer le phénomène de flexion composée de la façon indiquée par la figure 12 où sont représentées successivement les *contraintes partielles* et la *contrainte normale résultante* agissant le long d'une même section (diagramme analogue à la figure de déformation **10** *d* précédente).

Cette représentation met en évidence le *décalage d* existant entre le centre de gravité et l'axe neutre réel.

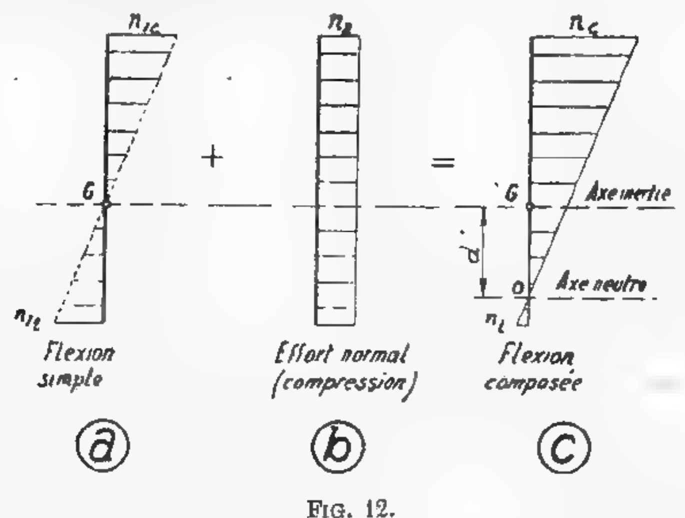


Fig. 12.

3.226 *Décalage de l'axe neutre.* — Ce décalage doit être tel que l'on ait pour la fibre O correspondante

$$n_1+n_2=0$$

soit

$$\frac{M}{I}d+\frac{N}{S}=0$$

d'où

$$d=-\frac{N}{M}\cdot\frac{I}{S}$$

ce qui s'écrit encore

$$\boxed{d=-\frac{N}{M}\rho^2}$$

avec ρ = *rayon de giration* de la section autour d'un axe passant par son centre de gravité normal au plan de flexion :

$$\rho=\sqrt{\frac{I}{S}} \qquad \text{(chap. II, § 3.14).}$$

3.227 *Conventions de signes.* — Toutes les formules ci-dessus supposent des conventions de signes entre N, M et v ou d. Il existe à ce sujet des règles qui sont malheureusement, souvent difficiles à observer. Il nous semble plus pratique de faire appel dans chaque cas particulier au sens physique commun.

Il existe toujours, en effet, au moins un point d'une poutre étudiée où l'on connaît à priori le *sens* de la déformation. Il est alors facile de « voir physiquement » l'emplacement des fibres tendues et comprimées. Le signe de M en ce point donne immédiatement la convention de signe à adopter pour combiner les contraintes de la poutre étudiée. Au sujet du décalage de l'axe neutre, il suffit également de remarquer qu'il se produit vers les fibres *soulagées* par l'effort normal (fig. 12 *c*).

Exemple. — Considérons, par exemple, la poutre étudiée au chapitre IV, paragraphe **6.3** (fig. **15** du chap. IV).

Il est visible que sur le porte-à-faux de gauche, les fibres supérieures sont tendues et les fibres inférieures comprimées. Or, M est négatif pour cette partie.

Pour retomber sur nos conventions de signes (+ = compression), il faudra donc prendre v négatif en dessous de l'axe d'inertie de la poutre et positif au-dessus. Le décalage d suit les mêmes conventions que v.

3.228 *Cas particulier.* — Il arrive fréquemment que le décalage d est tel que l'axe neutre O tombe en dehors de la section étudiée.

Il suffit, en effet, que l'on ait $d > V$ (en valeur absolue) ce qui peut s'écrire d'après la relation du paragraphe **3.226** :

$$\frac{N}{M}\rho^2 > V$$

soit
$$N > \frac{M\,V}{\rho^2} \qquad \text{(valeurs absolues).}$$

Application numérique.

Considérons la section composée étudiée *planche* 3 (Chap. II, § **9.1**). Supposons qu'elle supporte un moment fléchissant

$$M = 1200 \text{ mkg} = 1{,}2 \cdot 10^6 \text{ mmkg}$$

agissant dans le plan XX′ et tendant à comprimer la semelle côté gauche.

En flexion plane simple (pas d'effort normal) on a :

semelle côté gauche

$$n_1 = \frac{M}{\left(\frac{I}{V'}\right)} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 85{,}9}{1075{,}54 \cdot 10^4} = 9{,}6 \text{ kg/mm}^2 \text{ (compression) ;}$$

semelle côté droit

$$n'_1 = \frac{M}{\frac{I}{V}} = \frac{-1{,}2 \cdot 10^6}{69{,}79 \cdot 10^3} = -17{,}2 \text{ kg/mm}^2 \text{ (traction).}$$

Calculons l'effort l'effort normal N à superposer à M pour que l'axe neutre soit extérieur à la section.

a) Pour qu'il soit rejeté sur la droite il faut en valeur absolue :

$$N > \frac{MV}{\rho^2} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 154{,}1}{87^2} = 24450 \text{ kg}$$

(en compression puisque le côté droit était tendu).

Supposons, par exemple, N = 26000 kg.

On a alors
$$n_2 = \frac{N}{S} = \frac{26000}{1421} = 18{,}3 \text{ kg/mm}^2$$

d'où les contraintes extrêmes suivantes (en compression) :

contrainte composée semelle gauche : $n = 9{,}6 + 18{,}3 = 27{,}9$ kg/mm²,
contrainte composée semelle droite : $n' = -17{,}2 + 18{,}3 = 1{,}1$ kg/mm².

b) Pour que l'axe neutre soit rejeté vers la gauche (côté comprimé), il faut en valeur absolue

$$N > \frac{MV'}{\rho^2} = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 85{,}9}{87^2} = 13640 \text{ kg (en traction)}$$

Supposons (avec nos conventions de signes) N = —16000 kg ;

$$n_2 = \frac{16000}{1421} = -11{,}2 \text{ kg/mm}^2$$

d'où
$$n = 9{,}6 - 11{,}2 = -1{,}6 \text{ kg/mm}^2$$
$$n' = -17{,}2 - 11{,}2 = -28{,}4 \text{ kg/mm}^2. \qquad \text{(tractions)}$$

3.23 Corollaires des équations de résistance. — On peut, dans le cas de la *flexion simple*, définir des expressions faciles des *équations d'équarrissage et de sollicitation admissible.*

Désignons par n_a la contrainte normale maximum admissible. L'équation d'équarrissage définit ici le *module de flexion minimum nécessaire :*

$$\boxed{\left(\frac{\text{I}}{\text{V}}\right)_{\text{nec}} = \frac{\text{M}}{n_a}}$$

(relation déduite directement de l'équation de résistance).

L'équation de sollicitation admissible définit le *moment fléchissant maximum admissible :*

$$\boxed{\text{M}_a = n_a \frac{\text{I}}{\text{V}}\,.}$$

En *flexion composée*, ces expressions ne présentent pas d'intérêt dans un cas général par suite de leur plus grande complication (il y rentre à la fois la section et le module d'inertie). Il est facile de les établir dans chaque cas particulier pour une valeur donnée de N par exemple.

3.3 EQUATIONS DE DÉFORMATION.

Nous envisagerons également en premier lieu la flexion simple en ne considérant toujours que les déformations de flexion (rotations) et nous généraliserons par la suite.

3.31 Cas de la flexion simple. — Reprenons le petit élément de poutre ABA_1B_1 (fig. 10) qui, après déformation est devenu $A'B'A'_1B'_1$ (fig. 13).

Cet élément étant très petit nous pouvons assimiler les trajectoires de tous les points de la section AB à des arcs de cercle de centre C' : point d'intersection des deux sections A'B' et $A'_1B'_1$.

Soit $r = C'O'$ le *rayon de courbure moyen* de l'élément, c'est-à-dire le *rayon de courbure de la fibre neutre* 00_1 *après déformation.*

Soit $\Delta\alpha$ l'angle très petit des deux sections A'B' et $A'_1B'_1$ (après déformation).

Tous les éléments de fibres compris entre les deux sections ont varié de longueur, sauf la fibre neutre qui, par définition, a conservé sa longueur initiale :

$$\Delta u \Delta x = 00_1 = 0'0'_1$$

Considérons à nouveau la fibre quelconque ab située à la distance v au-dessus de l'axe neutre, qui devient $a'b'$ après déformation.

Menons par O'_1 la parallèle à A'B' qui coupe la fibre $a'b'$ en h. La longueur de cette fibre après déformation est

$$a'b' = a'h' + h'b' = 0'0'_1 + h'b' = \Delta x + h'b' \quad [1];$$

or

$$h'b' = v\Delta\alpha$$

l'angle élémentaire $\Delta\alpha$ étant exprimé en radians.

La longueur de la fibre avant déformation était $ab = \Delta\alpha$.

L'*allongement relatif* de la fibre est donc

$$i = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{\Delta x + v\Delta\alpha - \Delta x}{\Delta x}$$

soit

$$i = v\,\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\,.$$

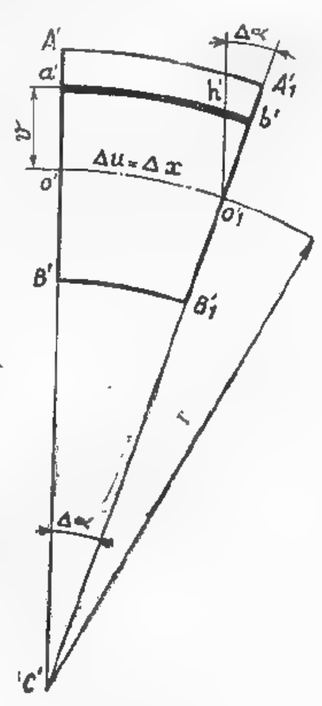


FIG. 13.

1. — Ces longueurs sont des longueurs curvilignes (arcs de cercles dans l'hypothèse envisagée).

Or, en considérant la fibre neutre, nous voyons que

$$\Delta x = r \Delta \alpha$$

Nous en déduisons

$$i = v \frac{\Delta \alpha}{r \Delta \alpha} = \frac{v}{r}.$$

D'après la *loi de Hooke*, la contrainte subie par la fibre considérée est proportionnelle à son allongement :

$$n = \text{E}\, i$$

E étant le module d'élasticité longitudinal.

Nous avons donc d'une part

$$n = \text{E} \frac{v}{r}$$

et d'autre part

$$n = \frac{\text{M}}{\text{I}} v \text{ (formule de résistance).}$$

De ces deux relations nous tirons l'équation de déformation :

$$n = \text{E} \frac{v}{r} = \frac{\text{M}v}{\text{I}}$$

d'où

$$r = \frac{\text{E I}}{\text{M}}.$$

On écrit généralement cette équation sous la forme :

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\text{M}}{\text{EI}}.}$$

C'est l'équation fondamentale de *déformation des poutres droites* travaillant en flexion plane simple qui donne la *courbure moyenne* (inverse du rayon de courbure) de la pièce fléchie, en chacune de ses sections [1]. Nous étudierons plus en détail ultérieurement (chap. X) les *déformations de flexion*, c'est-à-dire les *flèches* qui découlent de cette courbure élastique.

Remarque. — Si l'on a une poutre isotrope (E *constant*) de section constante (I *constant*) soumise uniquement à un *moment fléchissant constant* on a :

$$\frac{\text{EI}}{\text{M}} = \text{constante} \qquad \text{d'où} \qquad r = \text{constante.}$$

La figure ayant un rayon de courbure constant est un cercle. La fibre moyenne se déformera donc suivant un arc de cercle, ce qui justifie l'appellation de *flexion circulaire* donnée à ce cas particulier de flexion (voir § 1.32).

3.32 Cas de la flexion composée [2]. — D'après le principe de la superposition des effets élastiques, le moment fléchissant M appliqué à une poutre droite travaillant en flexion composée produit un premier *rayon de courbure élastique moyen :*

$$r_1 = \frac{\text{EI}}{\text{M}}.$$

1. — Il y a lieu de remarquer que ce rayon de courbure n'est dû qu'au moment fléchissant M. Nous avons jusqu'ici négligé le glissement produit par l'effort tranchant.

2. — Nous admettons toujours, ci-dessous, l'hypothèse simplificatrice énoncée au § 3.220.

Ce rayon de courbure se trouve modifié par les contractions ou allongements dus à l'effort normal N qui se superpose à M.

On démontre que le rayon de courbure résultant a pour expression

$$r = r_1 \left(1 + \frac{n_2}{E}\right),$$

avec n_2 = contrainte due à N :

$$n_2 = \frac{N}{S}.$$

On a donc $$r = \frac{EI}{M}\left(1 + \frac{N}{ES}\right).$$

Ces formules sont justiciables de conventions de signes analogues à celles du paragraphe **3.227**.

Remarque. — Il y a lieu de remarquer que le terme correctif $\frac{n_2}{E}$ $\left(\text{ou } \frac{N}{ES}\right)$ de ces formules est toujours très faible.

En effet, plaçons-nous dans les cas les plus *défavorables* pour les matériaux utilisés en construction aéronautique :

Duralumin : n_2 max = 26 kg/mm² ≈ limite élastique

$$E = 7000 \text{ kg/mm}^2$$

d'où $$\left(\frac{n_2}{E}\right)_{max} = \frac{26}{7000} = 0{,}0037 = 0{,}37\,\%.$$

Aciers à haute résistance : n_2 max = 120 kg/mm² ≈ lim. élast.

$$E = 20000 \text{ kg/mm}^2$$

d'où

$$\left(\frac{n_2}{E}\right)_{max} = \frac{120}{20000} = 0{,}006 = 0{,}6\ \%.$$

La correction est donc toujours négligeable, ce qui explique que nous n'en tenions pas compte par la suite pour l'étude des déformations des poutres fléchies (chap. X) où nous admettrons encore l'hypothèse simplificatrice de simple superposition des effets élastiques.

3.4 TRAVAIL ÉLASTIQUE DE FLEXION.

Nous avons vu au paragraphe **3.31** que la longueur Δx de l'élément de fibre moyenne déformée était reliée à l'angle de déformation et au rayon de courbure par la relation :

$$\Delta x = r\Delta\alpha$$

ce qui peut s'écrire : $$\Delta\alpha = \frac{\Delta x}{r}$$

(l'angle $\Delta\alpha$ étant exprimé en radians).

D'autre part $$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}$$

donc $$\Delta\alpha = \frac{M}{EI}\Delta x.$$

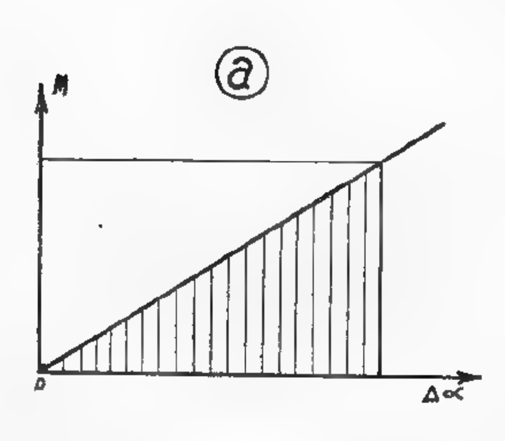
Si nous représentons par un diagramme la variation de M en fonction de $\Delta\alpha$ (fig. **14** *a*) nous obtenons une droite (phénomène élastique) et nous savons (chap. II, § **6.21**) que l'aire limitée par le diagramme mesure le travail dépensé. C'est donc ici l'aire d'un triangle.

Le travail élémentaire dû à la rotation $\Delta\alpha$ est donc

$$\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} M \Delta\alpha = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} \Delta x.$$

Le *travail élastique de flexion* entre deux sections de la pièce est, par suite

$$\boxed{\mathcal{E} = \sum \frac{M^2}{2\,E\,I} \Delta x}$$



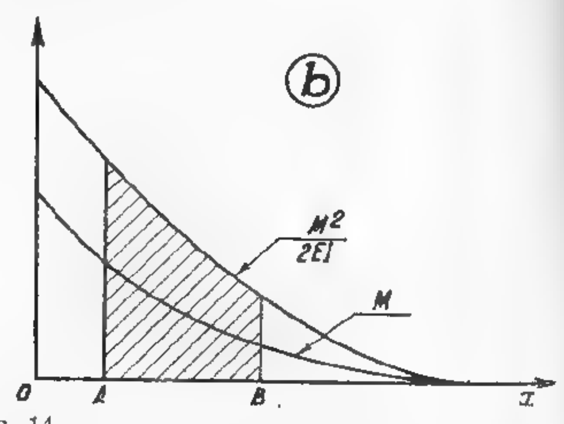


Fig. 14.

Remarques. — *a*) Constater l'analogie du travail élastique de flexion et du travail de traction ou de compression :

$$\mathcal{E} = \sum \frac{F^2}{2\,E\,S} \Delta l \qquad \text{(Chap. VI, § 1.4)}$$

b) Se rappeler que ces formules ne sont valables qu'en *période élastique* des matériaux.

c) Dans le cas de *flexion circulaire* (M est constant ainsi que E et I), on a

$$\mathcal{E} = \frac{M^2}{2\,E\,I} \Sigma\Delta x = \frac{M^2\,L}{2\,E\,I}$$

L étant la longueur de la poutre dans la région travaillant en flexion circulaire et $\mathcal{E}$ le travail correspondant.

d) Dans le *cas général* on peut obtenir la valeur de ce travail par *intégration graphique* (voir fig. 14 *b*). Pour cela on trace la courbe $\frac{M^2}{2\,EI}$ le long de la poutre, à partir de la courbe M et on *planimètre* l'aire de cette courbe, *entre les limites fixées*, ce qui donne le *travail entre ces limites.*

e) Cette notion de travail élastique de flexion est très utile au calcul des systèmes hyperstatiques que nous étudierons plus loin (chap. XVIII).

3.5 GLISSEMENT LONGITUDINAL DE FLEXION.

3.50 Remarque préliminaire. — Nous n'avons considéré, au cours des paragraphes précédents, que les *efforts internes normaux* agissant sur les poutres droites fléchies (contraintes normales et déformations correspondantes).

Nous allons, à présent, nous occuper du phénomène engendré par les *efforts internes tangentiels* qui sont dus à l'effort tranchant.

Ce phénomène est généralement étudié sous le nom de *glissement longitudinal* des pièces fléchies. Nous savons déjà, en réalité, qu'il ne peut exister

de glissement longitudinal sans un glissement transversal réciproque (chap. VIII, § 2.2). L'étude ci-après précisera utilement ce phénomène dont l'importance est capitale pour les études à suivre, notamment pour celles concernant les structures à revêtements travaillants utilisées en aviation.

3.51 **Représentation physique du phénomène.** — Considérons deux poutres droites encastrées de mêmes caractéristiques de dimensions et de matière. L'une (fig. 15 *a*) est constituée par un solide *plein*, tandis que l'autre (fig. 15 *b*) est formée d'une série de *lames* parallèles surperposées et *non reliées entre elles.*

Appliquons à ces deux poutres la même force F à leurs extrémités. Nous constatons que la poutre pleine prend une certaine flèche *f* tandis que l'autre prend une flèche *f'* supérieure à *f*.

L'allure « en escalier » des sections terminales montre également qu'il y a eu *glissement* des différentes lames entre elles dans le sens longitudinal.

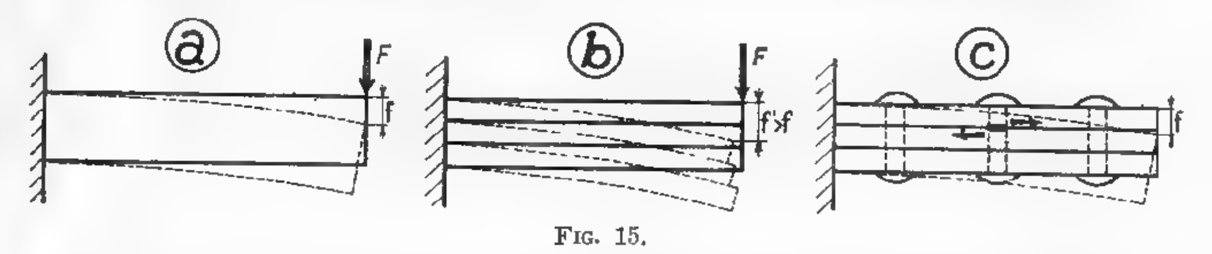


Fig. 15.

Si l'on avait pris soin de relier ces différentes lames par des *rivets* ou des *boulons* (fig. 15 *c*) convenablement rapprochés et suffisamment résistants on aurait obtenu la même déformée que dans le premier cas (fig. 15 *a*). Les rivets ou boulons ont donc eu à résister par *cisaillage* au glissement relatif des lames (ce qui aurait pu être mis en évidence par la rupture de ces organes s'ils avaient été choisis de dimensions insuffisantes ou disposés suivant un écartement excessif).

En réalité dans une *pièce homogène*, le même phénomène existe entre les différentes « couches de fibres », et c'est la *cohésion* de la matière qui s'oppose au glissement. C'est pourquoi il se produit parfois dans des pièces fléchies des *ruptures longitudinales* dues au glissement.

C'est, d'autre part, ce glissement longitudinal qui assure la *mise en charge des fibres successives* (propagation de l'effort tranchant, voir ci-après).

3.52 **Expression du glissement longitudinal (ou cisaillement de flexion).** — Nous étudierons toujours en premier lieu le cas de la flexion plane simple (pas d'effort normal) pour généraliser par la suite.

3.521 *Cas de la flexion simple.* — Dans une pièce fléchie quelconque, travaillant en flexion plane et simple, considérons deux sections très voisines S et S' distantes de Δx (fig. 16).

Désignons par T l'effort tranchant agissant entre ces deux sections, par M le moment fléchissant dans la section S et par M' le moment fléchissant dans la section S'.

L'*accroissement* de moment fléchissant entre S et S' est

$$\Delta M = M' - M = T\Delta x \qquad \text{(Voir § 2.11).}$$

Considérons une *section longitudinale* XX' *parallèle à l'axe neutre*, située à un distance y de cet axe neutre et isolons les « couches de fibres » qui se trouvent au-dessus de XX'. Supposons, pour fixer les idées, trois couches de fibres au-dessus de XX', numérotées 1, 2, 3, d'axes $g_1g'_1$, $g_2g'_2$, $g_3g'_3$ et de sections s_1, s_2, s_3.

Soient v_1, v_2, v_3 les distances respectives des axes de ces fibres à l'axe neutre.

La *contrainte normale de flexion* de chaque fibre dans la section S est donnée par la formule :

$$n = \frac{M}{I} v$$

et l'*effort* supporté par chaque fibre de section s est

$$f = n\, s.$$

De même, dans la section S′ chaque fibre subira la contrainte [1]

$$n' = \frac{M'}{I} v$$

et l'effort $f' = n's.$

L'accroissement d'effort $\Delta f = f' - f$ *entre les sections* S *et* S′ *correspond à la charge longitudinale qu'il a fallu transmettre à la fibre considérée dans l'intervalle* Δx, *pour que celle-ci participe au travail en flexion de la poutre :*

$$\Delta f = f' - f = (n' - n)\ s = \left(\frac{M'}{I} v - \frac{M}{I} v\right) s = \frac{s\ v}{I} (M' - M) = \frac{s\ v}{I} \Delta M$$

soit, en remplaçant ΔM par sa valeur donnée ci-dessus :

$$\Delta f = \frac{T}{I} s\, v \Delta x.$$

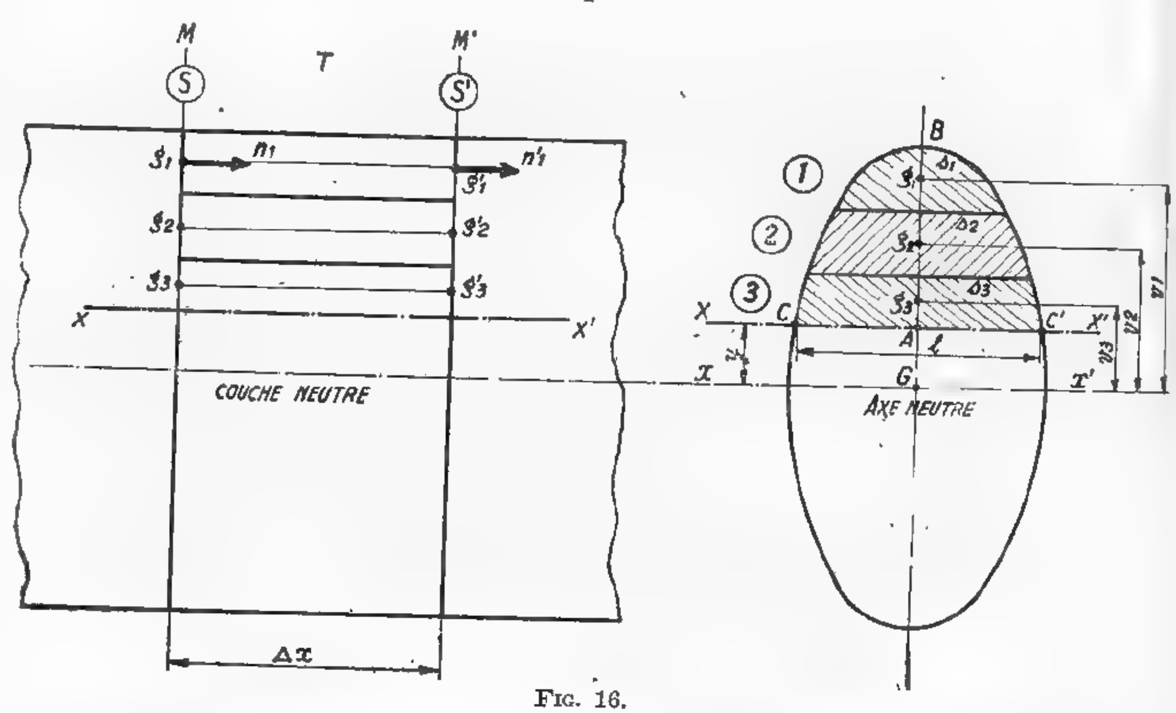


Fig. 16.

La *somme* de tous les accroissements d'efforts Δf relatifs aux fibres situées au-dessus de la section longitudinale XX′ envisagée (fibres 1, 2 et 3 selon notre hypothèse) nous donnera *l'effort longitudinal qui agit à travers cette section pour assurer la mise en charge en flexion, dans l'intervalle* Δx, *des fibres considérées.*

(1) Les sections étant supposées très voisines, elles possèdent mêmes caractéristiques de résistance, en particulier même moment d'inertie.

Appelons ΔF cette somme ; elle a pour expression :

$$\Delta F = \Sigma \Delta f = \Sigma \frac{T}{I} s v \Delta x = \frac{T}{I} \Delta x \Sigma s\, v.$$

Désignons par l la *largeur* de la section XX' (fig. 16). La surface de cette section longitudinale, dans l'intervalle Δx a pour valeur

$$\sigma = l \Delta x.$$

L'effort ΔF engendre donc, dans cette section, une *contrainte moyenne de cisaillement*

$$t = \frac{\Delta F}{\sigma} = \frac{T}{I\,l} \Sigma s\, v.$$

Or, Σsv n'est autre que le *moment statique* par rapport à l'axe neutre des éléments de surface situés *au-dessus* de la section XX'. On le désigne habituellement par la lettre W.

Nous obtenons finalement la formule donnant la *contrainte de glissement longitudinal en flexion :*

$$\boxed{t = \frac{T}{I} \frac{W}{l}.} \qquad (1)$$

3.522 *Cas de la flexion plane composée.* — Le glissement longitudinal est un phénomène engendré uniquement par la *propagation de l'effort tranchant* le long des pièces fléchies. L'effort normal agissant en supplément dans le cas de la flexion composée ne modifiera donc pas l'allure de la formule qui reste *identique* à celle ci-dessus.

Mais il convient alors de préciser que le moment d'inertie I et le moment statique W sont relatifs à un *axe passant par le centre de gravité de la section étudiée et parallèle à l'axe neutre* (c'est-à-dire perpendiculaire au plan de flexion). Cet axe Gx (fig. 16) est d'ailleurs l'*axe d'inertie à* utiliser pour la formule de résistance.

3.53 **Remarques importantes.**

3.531 *Remarque* 1. — Nous avons considéré, pour établir la formule les éléments situés *au-dessus* de la section XX'. Nous serions arrivés à un résultat identique, en valeur absolue, en considérant les éléments situés *au-dessous* de cette section et en affectant du signe négatif ceux de ces éléments situés sous l'axe l'inertie Gx (fig. 16).

On le démontre aisément sachant que l'axe Gx délimite deux parties du corps ayant même moment statique (en valeur absolue) par rapport à cet axe. C'est, en effet, la propriété essentielle du centre de gravité d'une surface (voir chap. II, § 7.2).

Il est évidemment plus simple, pour le calcul, de considérer toujours les *éléments situés entre la section envisagée et la périphérie la plus voisine de la pièce.*

3.532 *Remarque* 2. — Nous voyons que la contrainte de glissement longitudinal *ne dépend pas du moment fléchissant,* mais seulement de l'*ac-*

(1) Vérifions les *dimensions* de la formule. Nous devons obtenir une contrainte, c'est-à-dire une force par unité de surface, soit $\frac{F}{L^2}$

Le second membre de l'égalité donne bien :

$$\frac{F}{L^4} \cdot \frac{L \cdot L^2}{L} = \frac{F}{L^2}.$$

croissement de moment fléchissant par unité de longueur, c'est-à-dire de *l'effort tranchant*

$$T = \frac{\Delta M}{\Delta x}.$$

Si le moment fléchissant est constant, l'effort tranchant est nul (*flexion circulaire*). Donc, dans ce cas, *il n'y a pas de glissement longitudinal.*

Les parties AB des poutres représentées ci-dessus figure 4 pourraient, sans inconvénient, être réalisées par des lamelles parallèles à la couche neutre et non reliées entre elles, contrairement au cas de la figure 15.

3.54 Efforts de glissement par unité de longueur : Flux de cisaillement — Il est souvent très commode, notamment pour l'étude des éléments minces, d'utiliser dans les calculs les efforts de cisaillement agissant *par unité de longueur.*

On les désigne alors généralement par lettre τ et on les exprime le plus souvent en kg/mm (kilogr. par millimètre courant).

Leur valeur se déduit directement de la démonstration ci-dessus :

$$\tau = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{T}{I} \Sigma s v$$

soit :

$$\boxed{\tau = \frac{T}{I} W.}$$

Ces efforts de cisaillement par unité de longueur se désignent encore, dans le cas des sections minces, par : *intensité du flux de cisaillement* ou de l'*écoulement de cisaillement.*

Remarque. — Entre les contraintes t et les efforts τ, on a la relation directe :

$$\tau = t\,l \qquad \text{d'où} \qquad t = \frac{\tau}{l}.$$

3.6 RÉPARTITION DE L'EFFORT TRANCHANT LE LONG DES SECTIONS DROITES DES POUTRES TRAVAILLANT EN FLEXION PLANE.

3.61 Principe de calcul. — Nous avons vu, lors de l'étude du cisaillement, que la répartition de l'effort tranchant dans une section était, *à priori*, inconnue et qu'il fallait faire appel au *glissement* réciproque pour l'étudier (chap. VIII, § 2.). Nous avons pu ainsi définir les conditions théoriques de cisaillement simple (ou cisaillage).

Dans le cas des pièces fléchies, la solution est donnée par l'étude du *glissement longitudinal* qui doit, en tout point, être égal à son *réciproque*, le cisaillement transversal qui agit dans le plan des sections droites.

On envisagera donc une succession de sections longitudinales (que nous supposerons d'abord parallèles à la couche neutre), et on calculera le cisaillement au niveau de ces sections, ce qui permettra, en particulier, de définir l'emplacement et la valeur de la contrainte de cisaillement maximum.

3.62 Propriétés générales. — L'effort de cisaillement par unité de longueur

$$\tau = \frac{T}{I} W$$

varie, le long d'une même section, comme le terme W (puisque T et I sont des constantes pour cette section).

Or, W est nul aux extrémités des sections et maximum au niveau de l'axe de flexion Gx (par définition du centre de gravité). Il en est donc de même de τ.

Par contre, les contraintes normales de flexion n sont maxima aux extrémités ($v=V$) et nulles sur l'axe de flexion ($v=0$).

Règles.

Les variations de n et de τ affectent toujours des *allures opposées :*

quand $n=n_{max}$ $\tau=0$.
quand $\tau=\tau_{max}$ $n=0$.

Les contraintes tangentielles t étant reliées directement à τ par

$$t=\frac{\tau}{l} \qquad (\S\ 3.54)$$

on a de même, quelle que soit la variation de la largeur l de la section étudiée,

quand $n=n_{max}$ $t=0$.

Les valeurs maxima des contraintes normales et tangentielles de flexion ne peuvent donc, en aucun cas, exister simultanément au même point d'une section d'une poutre fléchie.

Il n'y a donc pas lieu de *combiner* entre elles ces deux valeurs maxima [1].

Nous donnons ci-après le calcul de t_{max} dans deux cas particuliers classiques de sections pleines. Nous donnerons au paragraphe suivant quelques compléments à ce sujet.

3.63 Cas particuliers.

3.631 *Section droite rectangulaire pleine* (fig. 17 *a*). — Moment d'inertie

$$I=\frac{b\ h^3}{12}.$$

Soit une section XX′ située à une distance z de l'extrémité libre. Elle délimite un élément de surface (partie hachurée)

$$\Delta s=b\ z$$

de moment statique $W=b\ z\ v$

avec $v=\frac{h}{2}-\frac{z}{2}=\frac{h-z}{2}$

d'où $W=b\ z\ \frac{h-z}{2}.$

La contrainte de cisaillement a donc pour expression en fonction de z :

$$t=\frac{T}{I}\frac{W}{b}=\frac{12\ T}{b\ h^3}\frac{b\ z\ (h-z)}{2\ b}=\frac{T}{b\ h}\frac{6\ z\ (h-z)}{h^2}.$$

Or, $bh=S=$surface totale de la section, d'où

$$t=\frac{T}{S}\frac{6\ z\,h-6\ z^2}{h^2}.$$

Cette relation exprime l'équation d'une *parabole* représentée figure 17 *b*.

Pour $z=0$ et pour $z=h$ $t=0$.

1. — On opère parfois cette combinaison sachant que l'on se place ainsi dans un *cas défavorable*.

Pour $z = \frac{h}{2}$ (axe de flexion) t passe par un *maximum* :

$$t_{max} = \frac{T}{S} \frac{6\frac{h^2}{2} - 6\frac{h^2}{4}}{h^3}$$

$$\boxed{t_{max} = \frac{2}{3}\frac{T}{S}.}$$

La contrainte de cisaillement maximum est donc 1,5 fois plus forte que la contrainte moyenne de cisaillement (contrainte dite de *cisaillage*):

$$t_{moyen} = \frac{T}{S}$$

on a donc :

$$\boxed{t_{max} = 1{,}5\ t_{moyen}.}$$

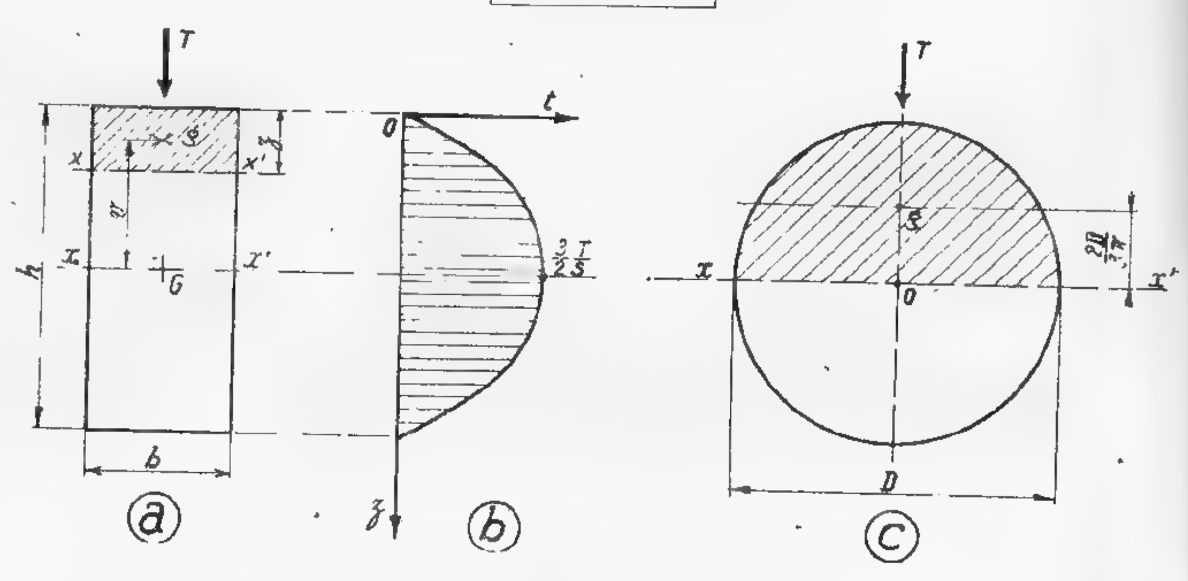


FIG. 17.

3.632 *Section droite circulaire* (fig. 17 c). — Contentons-nous de calculer ici la *valeur maximum* de t qui est atteinte également en même temps que τ_{max} sur l'axe de flexion xx'.

$$W = \text{surface demi-cercle} \times \overline{og}$$

$$= \frac{\pi D^2}{8} \cdot \frac{2D}{3\pi} = \frac{D^3}{12}$$

$$I = \frac{\pi}{64} D^4$$

$$t_{max} = \frac{T}{I}\frac{W}{D} = \frac{64}{\pi}\frac{T}{D^4}\frac{D^3}{12\,D} = \frac{4}{3}\frac{T}{\frac{\pi D^2}{4}}$$

$$\boxed{t_{max} = \frac{3}{4}\frac{T}{S}.}$$

La contrainte de cisaillement maximum est donc égale aux 4/3 de la contrainte moyenne.

3.633 *Conclusion.* — On voit donc que, même pour les sections pleines, l'effort tranchant se répartit *inégalement* le long de ces sections et que la contrainte atteint une *valeur maximum supérieure au taux moyen de cisaillement simple.*

3.7 COMPLEMENTS CONCERNANT L'ETUDE DU CISAILLEMENT DES POUTRES.

3.70 **Remarque préliminaire.** — Il nous a paru nécessaire de donner, dès maintenant, quelques notions complémentaires au sujet des contraintes de cisaillement engendrées par la *propagation de l'effort tranchant le long des poutres fléchies.*

Ces notions trouveront principalement leur application lors de l'étude des éléments minces particuliers à la construction aéronautique (chap. XXI et XXII).

3.71 **Orientation des tensions de cisaillement.**

3.711 *Courbes de glissement nul et d'iso-glissement.* — Dans les démonstrations précédentes, nous avons *arbitrairement* envisagé des sections XX' parallèles à l'axe neutre des sections droites.

Nous avons ensuite admis, lors de l'établissement de la formule fondamentale du glissement longitudinal (§ 3.521), que l'effort tangentiel total appliqué à la section XX' se répartissait *uniformément* sur sa largeur l, pour obtenir la formule donnant la contrainte t (contrainte moyenne).

On se rend compte cependant assez facilement que, dans le cas de la section envisagée (fig. 16), la contrainte de cisaillement doit être moins importante au centre A de cette section qu'au voisinage des bords C et C'. Si l'on envisage, en effet, des « colonnes de mise en charge » des fibres supérieures, les hauteurs de ces colonnes varient de la distance AB au centre à la distance curviligne CB aux bords. Il est donc logique que t varie dans le même sens.

Cette considération physique est en accord avec la théorie de l'élasticité qui permet, pour quelques types de sections, de définir des *courbes de glissement nul* [1] à l'intérieur de ces sections droites. Il faudrait alors, pour avoir le droit de supposer t uniformément réparti, envisager des sections longitudinales *normales en tous points* à ces courbes de glissement nul qui déterminent ainsi un réseau de *courbes de glissement égal ou « courbes d'iso-glissement »* [2].

3.712 *Orientation des contraintes dans le plan des sections droites.* — Les courbes d'iso-glissement des différentes sections droites d'une poutre déterminent des *surfaces longitudinales d'iso-glissement* le long de cette poutre.

Les contraintes de cisaillement longitudinales, qui agissent le long de ces surfaces, admettent, dans le plan de chaque section droite, des *contraintes réciproques* (cisaillement transversal) *qui sont donc dirigées normalement aux courbes d'iso-glissement propres à ces sections droites.* Elles sont, par suite, dirigées *tangentiellement* aux courbes d'inter-glissement nul.

1. — Les courbes de glissement nul donnent une image du « *découpage en tranches longitudinales* » qu'il serait possible d'effectuer dans les poutres envisagées, sans nuire à leur résistance en flexion dans le sens de chargement indiqué (sens vertical sur les figures 18 à 20 ci-après). Ces courbes pourraient plus précisément s'appeler : « *feuillets d'interglissement nul* ».

2. — Les *courbes d'iso-glissement forment,* avec celles de *glissement nul,* un système analogue aux courbes de niveau et lignes de pente en topographie.

Dans toutes les figures ci-après, nous ne représenterons que ces *contraintes réciproques* dont la considération est capitale.

Ce sont, en effet, les composantes parallèles au plan de flexion de ces contraintes réciproques qui *équilibrent l'effort tranchant* appliqué à la section considérée. (Les composantes normales au plan de flexion s'équilibrent entre elles par suite de la symétrie des sections envisagées dans notre hypothèse de flexion plane.)

3.72 Répartition des contraintes de cisaillement à l'intérieur des sections pleines. — La figure 18 *a* schématise l'allure des *courbes de glissement nul* pour le type de section ayant servi à la démonstration du paragraphe **3.521** (*section elliptique*). La section XX′ aurait dû, en toute rigueur, affecter la forme représentée par les lignes $X_1X'_1X_2X'_2$ ou $X_3X'_3$ qui sont en tous points *normales* aux courbes de glissement nul et constituent donc des courbes d'iso-glissement de la section considérée. Nous serions, du reste, arrivés à la même expression de la *contrainte moyenne* :

$$t = \frac{T}{I}\frac{W}{l}$$

avec W = moment statique par rapport à Gx des éléments situés au-dessus de la section considérée et l = longueur développée de la courbe d'iso-glissement. Nous avons figuré sur la courbe d'iso-glissement $X_2X'_2$ l'*orientation* des contraintes réciproques agissant dans le plan de la section droite (orientation correspondant au sens des réactions).

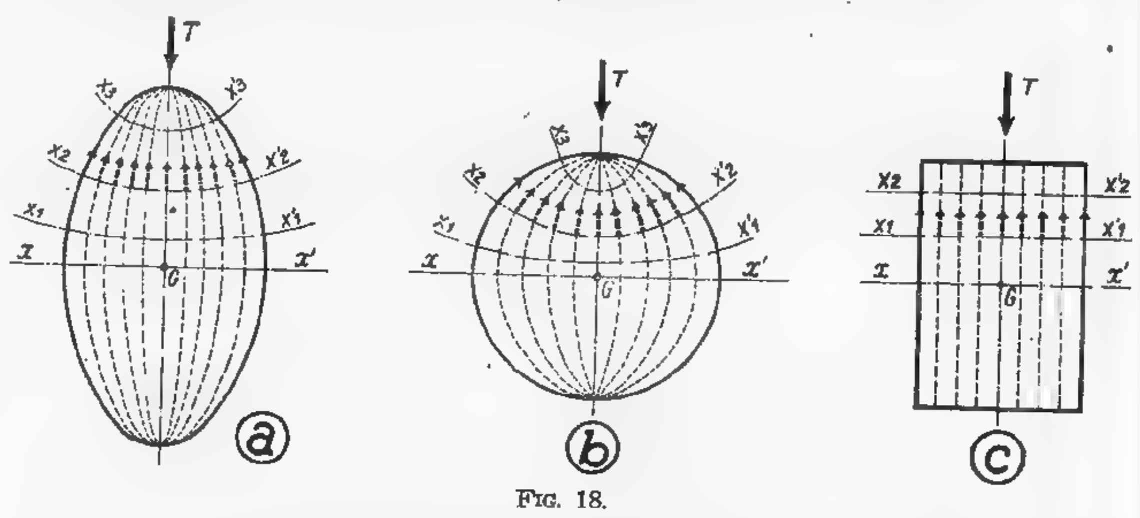


FIG. 18.

La figure 18 *b* représente le cas d'une *section circulaire pleine* fléchie verticalement. Les notations sont identiques à celles de la figure 18 *a*.

Il n'est donc rigoureux d'envisager des sections parallèles à l'axe neutre que dans le cas simple des *sections droites rectangulaires* (fig. 18 *c*) où les tensions réciproques sont verticales.

Il convient cependant de signaler qu'il reste rigoureux (pour les sections symétriques) d'envisager une section plane passant par l'*axe neutre xx′* pour calculer la *contrainte de cisaillement maximum* qui est pratiquement la seule valeur utile dans les calculs. C'est ce que nous avons fait au paragraphe **3.632** pour la section circulaire.

3.73 Répartition des contraintes le long des sections minces ouvertes. — L'allure des courbes de glissement nul et donc celle des contraintes peut, dans ce cas, se déduire de simples considérations physiques : ces courbes épousent la *forme générale du contour* (puisque le glissement est toujours nul sur la périphérie).

3.731 *Exemple 1.* — La figure 19 *a* représente le cas d'une *section en T fléchie parallèlement à son âme.* Pour calculer les contraintes de cisaillement t il faut, dans ce cas, envisager des sections $X_1X'_1$ ou $X_2X'_2$ perpendiculaires à la direction de la *ligne moyenne* (ou *ossature*) du profilé.

L'application de la formule générale

$$t = \frac{T}{I} \frac{W}{l}$$

se fait alors en posant, par exemple :

pour la section $X_1X'_1$: W=m^t stat. élément *a b c d* et $l=ab$
pour la section $X_2X'_2$: W m^t stat. élément *e f g h* et $l=ef$

les moments statiques W et le moment d'inertie I étant toujours, bien entendu, évalués par rapport à l'*axe d'inertie* passant par G (axe xx' dans le cas de flexion verticale envisagé).

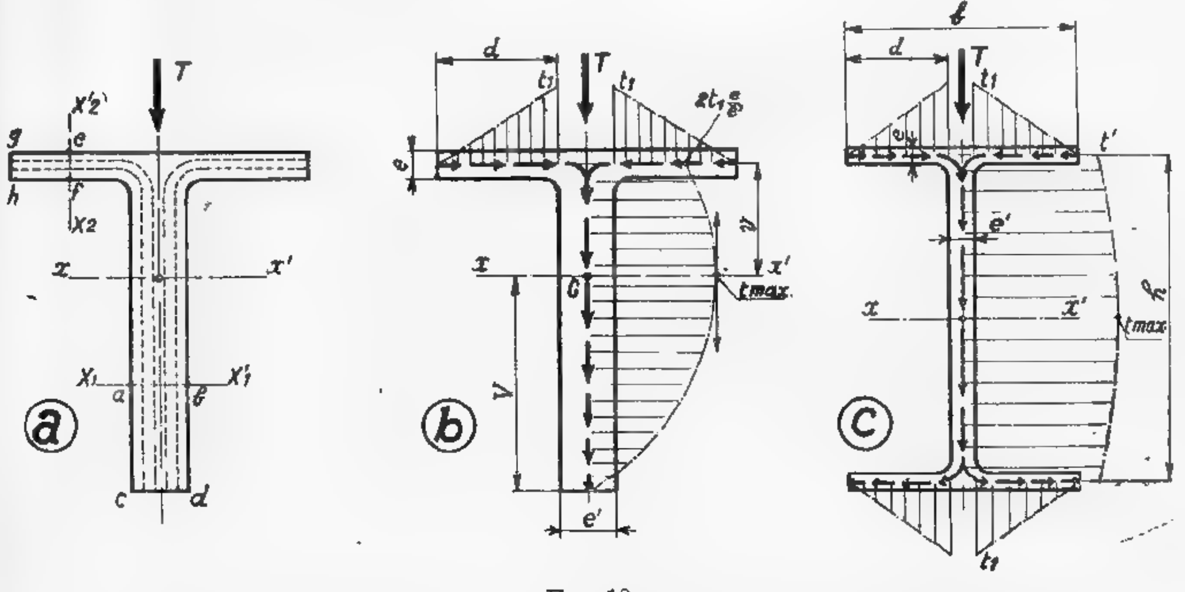


FIG. 19.

Il est aisé de démontrer que les contraintes de cisaillement varient selon les indications de la figure 19 *b* (flèches et diagramme de tensions donné par les parties hachurées) :

Sur les *semelles*, t varie *linéairement* (puisque $W = s \cdot v$ avec v=constante).

Sur *l'âme*, t varie *paraboliquement* (voir § 3.631). La valeur de t_{max} s'obtient sur l'axe neutre xx' et vaut :

$$t_{max} = \frac{T}{I} \frac{V^2}{2}$$

avec I=moment d'inertie de la section autour de xx'.

On voit que les contraintes agissant sur la semelle ne participent pas à l'équilibre de l'effort tranchant (tensions horizontales). Elles ont pour valeur maximum :

$$t_1 = \frac{T}{I} \, v \, d.$$

3.732 *Exemple 2 : Section en I fléchie parallèlement à son âme* (fig. 19 *c*).

Même procédé de calcul que pour la section en T envisagée ci-dessus :

Le moment d'inertie I a pour valeur approchée

$$I = \frac{e'h^3}{12} + \frac{beh^2}{2} = \frac{h^2}{2}\left(\frac{e'h}{6} + be\right)$$

et le moment statique d'une demi-section :

$$W = be\,\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\,e'\,\frac{h}{4} = \frac{h}{2}\left(\frac{e'h}{4} + be\right)$$

d'où
$$t_{max} = \frac{T}{I}\,\frac{W}{e'} = \frac{T}{he'}\,\frac{\frac{e'h}{4} + be}{\frac{e'h}{6} + be} \quad \text{(sur l'axe neutre).}$$

La contrainte au niveau des semelles est donnée par :

$$t' = \frac{T}{I}\,\frac{ebh}{2} = \frac{T}{he'}\,\frac{be}{\frac{e'h}{6} + be}.$$

La valeur moyenne de la contrainte de l'âme est donc

$$t'' = \frac{t_{max} + t'}{2} = \frac{T}{he'}\,\frac{be + \frac{e'h}{4} + be}{2\left(\frac{e'h}{6} + be\right)} \approx \frac{T}{e'h} = t \text{ moyen.}$$

Conclusion. — L'âme, dont les contraintes équilibrent tout l'effort tranchant, est approximativement justiciable d'un calcul au cisaillement simple sous l'action de cet effort. C'est l'approximation admise en pratique qui est d'autant plus approchée que l'âme est faible vis-à-vis des semelles.

Application numérique.

Posons : $h = 300$ mm ; $b = 200$ mm ; $e = 8$ mm ; $e' = 4$ mm ; $T = 10000$ kg.

$$t \text{ moyen} = \frac{T}{he'} = \frac{10000}{300 \times 4} = 8{,}33 \text{ kg/mm}^2$$

$$\frac{e'h}{4} = \frac{4 \times 300}{4} = 300 \qquad \frac{e'h}{6} = \frac{4 \times 300}{6} = 200 \qquad be = 1600$$

$$t_{max} = 8{,}33\,\frac{300 + 1600}{200 + 1600} = 8{,}8 \text{ kg/mm}^2$$

$$t' = 8{,}33\,\frac{200 + 1600}{1600} = 7{,}4 \text{ kg/mm}^2$$

$$t'' = \frac{8{,}8 + 7{,}4}{2} = 8{,}1 \text{ kg/mm}^2.$$

L'erreur commise en utilisant t moyen ne serait que de 2,8 % relativement à t_{max}, ce qui est acceptable en pratique.

3.74 Répartition des contraintes le long des sections minces fermées. — Le problème général sera traité au chapitre XXII. Nous n'envisageons ici que deux *cas particuliers simples.*

3.741 *Section circulaire* (fig. 20 *a*). — Les courbes de glissement nul sont des *cercles concentriques* [1]. L'allure de variation de t est figurée par

1. — Cette allure explique qu'il ne soit, théoriquement, pas nécessaire de *fixer un manchon de renfort sur un tube fléchi.* Si ce manchon est ajusté sans jeu, il est entraîné dans la flexion d'ensemble sans qu'il soit besoin de l'y contraindre par des fixations. L'ensemble se calcule comme une section circulaire creuse unique dont le rayon extérieur est accru de l'épaisseur du manchon. Cette remarque s'étend à toutes les sections fermées minces.

le système de flèches de la figure 20 *a* (les valeurs nulles se déduisent de considérations de symétrie).

Calculons la contrainte t_{max} (sur l'axe xx') :

$$I = \pi\ R^3 e \qquad R = \text{rayon moyen} ; \qquad \left(\frac{R}{e}\ \text{faible, voir } \textit{Planche 2}\right)$$

$$W = \text{section } abcd \cdot \delta = \frac{\pi\ Re}{2} \cdot \frac{2\ R}{\pi} = R^2 e$$

d'où
$$t_{max} = \frac{T}{I}\frac{W}{e} = T\ \frac{R^2 e}{\pi\ R^3\ e^2} = \frac{T}{\pi\ Re}$$

soit
$$t_{max} = \frac{2\ T}{\pi\ De} \qquad \text{avec } D = \text{diamètre moyen.}$$

Si l'on avait calculé t en divisant T par la section de l'anneau, on aurait obtenu :

$$t'_{moyen} = \frac{T}{S} = \frac{T}{\pi\ De}.$$

La contrainte maximum est donc deux fois plus grande que la contrainte moyenne de cisaillement simple.

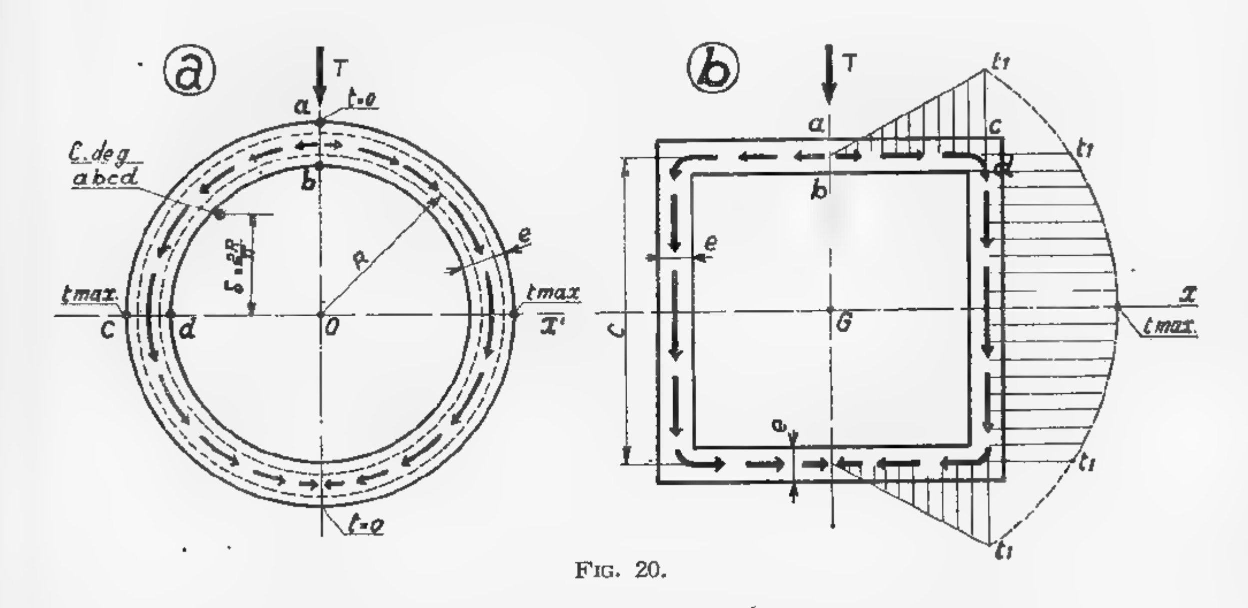


FIG. 20.

3.742 *Section carrée* (fig. 20 *b*). — L'allure de répartition des contraintes de cisaillement est schématisée sur la figure 20 *b*.

Moment d'inertie :

$$I \approx \frac{2\ e\ C^3}{12} + 2\ Ce\ \frac{C^2}{4} = \frac{2}{3}\ C^3 e.$$

Les contraintes sont nulles sur l'axe de flexion (par suite de la symétrie).

Contrainte aux angles :

$$t_1 = \frac{T}{I}\frac{W_1}{e} \qquad \text{avec } W_1 = \text{m}^t \text{ stat. } abcd = \frac{C}{2}\ e\ \frac{C}{2} = \frac{C^2 e}{4}$$

d'où
$$t_1 = \frac{T\ \ 3\ C^2 e}{4 \cdot 2\ C^3 e} = \frac{8}{3}\ \frac{T}{Ce}.$$

Contrainte maximum :

$$t_{max} = \frac{T}{I} \frac{W_2}{e}$$

$$\text{avec } W_2 = W_1 + \frac{C}{2} e \frac{C}{4} = \frac{C^2 e}{4} + \frac{C^2 e}{8} = \frac{3}{8} C^2 e$$

$$t_{max} = \frac{T}{e} \frac{3}{8 \cdot 2} \frac{C^2 e \cdot 3}{C^3 e} = \frac{9}{16} \frac{T}{Ce} = \frac{9}{4} \frac{T}{4\,Ce} = \frac{9}{4} \frac{T}{S} = 2{,}25\ \frac{T}{S}.$$

La contrainte maximum est égale à 2,25 fois la contrainte moyenne de cisaillement simple relative à toute la section.

Elle est égale à 1,125 fois la contrainte moyenne obtenue en divisant T par la section des *côtés parallèles* à cet effort.

3.75 « Hauteur équivalente au cisaillement » des sections droites. — Le calcul des contraintes maxima de cisaillement agissant sur les sections droites des poutres fléchies peut se conduire en utilisant une notion très intéressante dite de « *hauteur équivalente au cisaillement* ».

Cette hauteur Z se définit simplement en partant de la formule :

$$t_{max} = \frac{T}{I} \frac{W_{max}}{l}$$

et en posant :

$$t_{max} = \frac{T}{Zl}$$

ce qui revient à assimiler le contour de la section à un rectangle de hauteur Z et de largeur l (largeur de la section à l'aplomb du centre de gravité) *travaillant au cisaillement simple.*

On trouve directement $\boxed{Z = \dfrac{I}{W_{max}}}$

avec :

I = moment d'inertie de la section autour de l'axe d'inertie de flexion,

W_{max} = moment statique (par rapport à cet axe d'inertie) des éléments situés d'un même côté de cet axe.

Applications. — *a) Section rectangulaire* (fig. 17 *a* ci-dessus, § 3.631)

$$I = \frac{bh^3}{12} \qquad W_{max} = \frac{bh}{2} \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8}$$

d'où

$$Z = \frac{8\ bh^3}{12\ bh^2} = \frac{2}{3} h.$$

On retrouve bien :

$$t_{max} = \frac{T}{Zb} = \frac{3\ T}{2\ bh} = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \quad (\S\ 3.631).$$

b) Section en **I** (fig. 19 *c*)

$$I = \frac{h^2}{2}\left(\frac{e'h}{6} + be\right) \qquad W_{max} = \frac{h}{2}\left(\frac{e'h}{4} + be\right) \quad (\S\ 3.732)$$

d'où

$$Z = h\,\frac{\dfrac{e'h}{6} + be}{\dfrac{e'h}{4} + be}.$$

On retrouve :

$$t_{max} = \frac{T}{Ze'} = \frac{T}{he'} \frac{\frac{e'h}{4} + be}{\frac{e'h}{9} + be}$$

Notons que, dans ce cas, Z est d'autant plus voisin de h que le rapport e'/h est faible (voir ci-après paragraphe 7.).

3.76 Déformation des sections droites. — On conçoit physiquement que la propagation du glissement longitudinal donne lieu à un *gauchissement* des plans des sections droites.

Elles affectent, après déformation, l'allure schématisée par la figure 21 (déformations élastiques).

Fig. 21.

Les sections restent normales au contour extérieur déformé, mais font avec la couche neutre un angle θ différent de $90° = \frac{\pi}{2}$. On démontre que cet angle a pour valeur :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{GZl}{T}$$

avec G = module d'élasticité longitudinal, Z = hauteur équivalente définie au paragraphe précédent et l = largeur de la section au niveau de l'axe neutre.

C'est cette déformation qui donne lieu aux *flèches de cisaillement* qui s'ajoutent à celles de la flexion proprement dite (voir chap. X).

Remarque. — Cette considération semble en désaccord avec notre hypothèse de *flexion plane*, mais il convient de remarquer que, d'après le principe de la superposition des effets élastiques, les formules de résistance en flexion pure restent valables et que nous n'avons pas eu à faire appel aux déformations pour obtenir celles du glissement.

D'autre part, la différence $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ est toujours très faible. En effet, supposons une poutre en duralumin pour laquelle

$$t_{max} = \frac{T}{Zl} = 10 \text{ kg/mm}^2. \quad (1)$$

On a

$$G = 2700 \text{ kg/mm}^2$$

d'où

$$\frac{\pi}{2} - \theta = \frac{T}{GZl} = \frac{10}{2700} = 3{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ radian}$$

$$= 0{,}21 \text{ degré.}$$

3.8 CORRECTIONS DUES AUX VARIATIONS DES SECTIONS DROITES LE LONG DES POUTRES FLECHIES.

3.80 Position du problème. — Nous avons, implicitement, supposé dans les démonstrations précédentes que les sections droites des poutres étudiées étaient de *dimensions identiques* tout le long de ces poutres. Cependant, la plupart des poutres sont réalisées avec des *sections évolutives*, ce qui entraîne quelques corrections à apporter aux formules précédentes. Nous

1. — Valeur maximum courante, par suite de considération de *stabilité*.

nous limiterons aux corrections provenant de la *variation de hauteur* des poutres, c'est-à-dire de la variation de la dimension comptée parallèlement aux efforts tranchants.

Exemple. — La hauteur d'un longeron ou d'un caisson d'aile diminue de l'encastrement vers l'extrémité.

Cette correction de hauteur est industriellement la seule à opérer et nous verrons qu'elle se limite pratiquement à une correction simple de l'*effort tranchant*.

Nous nous limiterons également au cas des poutres dont les sections varient tout en restant sensiblement *homothétiques* entre elles, ce qui est le cas le plus courant.

3.81 **Données.** — La figure 22 représente une poutre de sections droites évolutives présentant un foyer d'homothétie O.

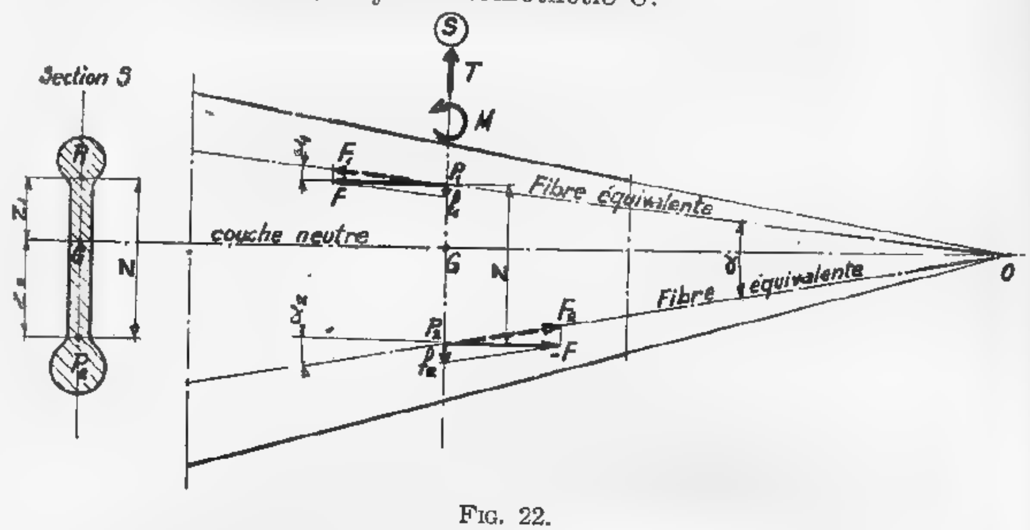


Fig. 22.

Considérons une section S (de forme quelconque) à laquelle sont appliqués un effort tranchant T et un moment fléchissant M.

Nous savons, d'après le paragraphe **3.75**, que la hauteur de la poutre peut, du point de vue cisaillement, se ramener à une *hauteur équivalente* Z définie par :

$$Z = \frac{I}{W_{max}}.$$

Cette hauteur Z se décompose en une hauteur Z_1 au-dessus de la couche neutre et Z_2 en-dessous (section dissymétrique en hauteur), telles que :

$$Z_1 = \frac{I_1}{W_{max}} \qquad \text{et} \qquad Z_2 = \frac{I_2}{W_{max}}$$

I_1 et I_2 étant les moments d'inertie respectifs (par rapport à l'axe neutre) des parties de la section situées au-dessus et au-dessous de cet axe neutre [1].

La poutre est donc équivalente à *deux fibres longitudinales équivalentes* dirigées suivant OP_1 et OP_2.

3.82 **Décomposition des efforts.** — Le moment fléchissant M appliqué à la section S est équivalent à un couple de composantes (composantes de flexion)

$$F_1 = \frac{M}{Z}.$$

1. — Ces deux parties ont, par définition de G, même moment statique W maximum.

Mais, en réalité, ces composantes sont transmises selon les directions des fibres concentrées équivalentes, d'où les deux décompositions de forces indiquées sur la figure 22.

On obtient, en désignant par α_1 et α_2 les angles formés par les *fibres équivalentes* OP_1 et OP_2 avec la couche neutre :

suivant les fibres équivalentes : $F_1 = \frac{F}{\cos \alpha_1}$ et $F_2 = \frac{F}{\cos \alpha_2}$

suivant la section S : $f_1 = F \text{ tg}$ et $f_2 = F \text{ tg } \alpha_2$

3.83 Correction d'efforts normaux. — Les composantes F_1 et F_2 sont très peu différentes de F car les angles α_1 et α_2 étant toujours très faibles leurs cosinus sont très voisins de 1.

Il n'y a donc pas lieu, industriellement, de corriger les contraintes normales de flexion [1].

3.84 Correction d'effort tranchant. — Par contre les composantes f_1 et f_2 ne sont généralement pas négligeables vis-à-vis de T, car les composantes de flexion F ont une valeur très grande (vis-à-vis de T) pour les poutres longues que l'on considère habituellement. Ces composantes f_1 et f_2 sont toujours de même sens et leur somme représente *la part d'effort tranchant qui a été directement équilibrée par les « fibres longitudinales » par suite de leur convergence (sans faire appel au cisaillement).*

Cette part d'effort tranchant appelée « *effort tranchant correcteur* » a pour valeur :

$$T'' = f_1 + f_2 = F (\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2) = \frac{M}{Z} (\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2).$$

Il reste donc à transmettre par cisaillement un « *effort tranchant corrigé* »

$$T' = T - T''$$

soit

$$\boxed{T' = T - \frac{M}{Z} (\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2).}$$

C'est cet effort tranchant corrigé qu'il y a lieu de considérer *pour tous les calculs au cisaillement.*

Expression simplifiée. — Les angles α_1 et α_2 sont toujours, dans la pratique, suffisamment faibles pour que l'on puisse admettre

$$\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2 = \text{tg } \alpha. \qquad \text{(fig. 22)}$$

En posant $k = \text{tg}\alpha =$ *coefficient de convergence total de la poutre* (poutre équivalente), on obtient :

$$\boxed{T' = T - k \frac{M}{Z}.}$$

Effort tranchant réduit. - Pour les poutres industrielles courantes, dont la hauteur augmente dans le même sens que le moment fléchissant, T et M ont des sens relatifs tels que ceux indiqués sur la figure 22. L'effort tran-

1. — Cette approximation est d'autant plus justifiée que le calcul des moments d'inertie est généralement exécuté avec les sections droites réelles des différents éléments constituant la section d'ensemble et non avec les sections de ces éléments projetées sur le plan de coupure S.

chant correcteur T″ est donc de sens contraire à T et il lui est, généralement, inférieur.

Il en résulte que *l'effort tranchant corrigé* T′=T — T″ *conserve, généralement, le sens de* T *et lui est inférieur.*

C'est pourquoi l'on appelle T′ l'**effort tranchant réduit** *et* T″ l'**effort tranchant réducteur.**

3.85 Cas particuliers.

3.851 *Effort tranchant réduit nul.* — Supposons que l'effort tranchant brut T soit produit par une force unique T appliquée au point de concours O des fibres équivalentes (voir fig. 22 et 23 *a*).

Cet effort se décompose alors directement suivant les directions de ces fibres qui assurent, à elles seules, sa transmission *sans donner lieu à aucun cisaillement de la poutre* (analogie avec un système triangulé).

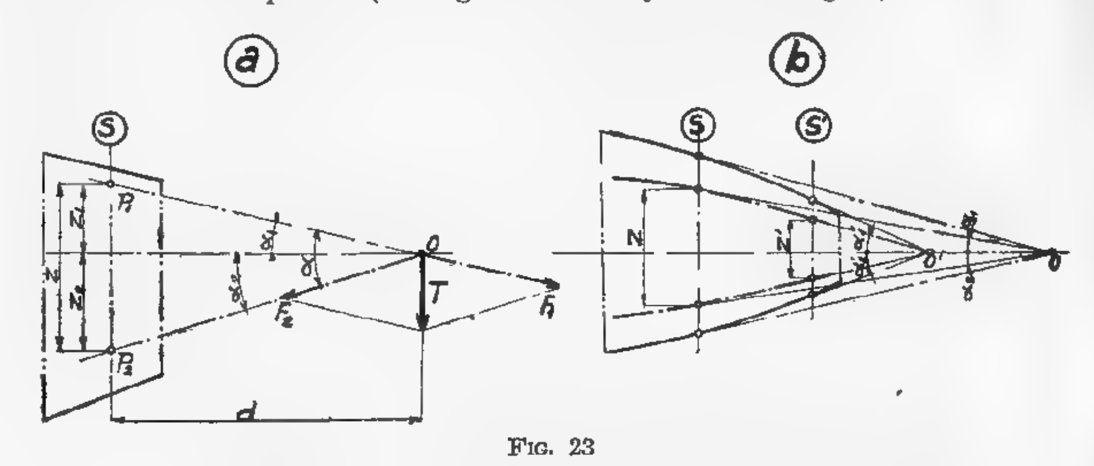


Fig. 23

On a d'ailleurs dans une section S quelconque située à une distance *d* de O

$$M=T\,d.$$

On a, de plus

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{Z_1}{d}\qquad\text{et}\qquad\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{Z_2}{d}$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{Z}{d}$$

et donc

$$T''=\frac{M}{Z}\,(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2)=\frac{Td}{Z}\,\frac{Z}{d}=T.$$

On retrouve donc bien un effort tranchant réduit

$$T'=T-T''=0.$$

Remarque. — Au lieu de considérer une force unique, nous aurions pu considérer un système de forces dont la résultante R était équivalente à T.

3.852 *Relations entre* T *et* T′. — *a*) Quand la résultante R est comprise entre O et S, T″ est *inférieur* à T et donc T′ conserve le *signe* de T.

b) Quand la résultante R est extérieure à l'intervalle O — S (cas d'une poutre chargée par un couple à son extrémité par exemple), T″ est *supérieur* à T et donc T′ a le *signe contraire* de T.

c) Il peut arriver que l'effort tranchant corrigé soit *supérieur* à l'effort tranchant brut T. Il suffirait, par exemple, sur la figure 22 d'inverser les

sens relatifs de T et de M. Ce phénomène se produit sur les longerons d'aile dans certains cas de calculs.

3.86 **Cas des poutres à foyer d'homothétie variable.** — Une poutre à arêtes non rectilignes du genre de celle schématisée par la figure 23 *b* peut présenter des foyers d'homothétie variables pour chaque section (points O et O' pour les sections S et S').

Les formules ci-dessus restent encore entièrement valables, à condition toutefois de mesurer, *pour chaque section considérée*, les angles α_1 et α_2 *par rapport aux tangentes*, au niveau de ces sections, *aux fibres équivalentes*.

On obtient alors, si l'on utilise l'expression simplifiée, un coefficient de convergence *k* variable le long de la poutre [1].

4. THÉORIE DE LA FLEXION PLANE DES POUTRES COURBES

4.1 GÉNÉRALITÉS.

Nous n'avons considéré, jusqu'à présent, que des poutres ayant un *axe longitudinal rectiligne* avant déformation.

Dans le cas contraire, les poutres prennent le nom de *poutres courbes* ou *arcs*.

Les formules précédemment établies ne s'appliquent plus, en toute rigueur, à ces poutres.

Nous nous limiterons ci-après à donner le résultat auquel on aboutit en ce qui concerne la *formule de résistance en flexion* proprement dite c'est-à-dire celle donnant les *contraintes normales* engendrées par le moment fléchissant.

Nous examinerons ensuite les *conclusions pratiques* à tirer de cette théorie.

4.2 EFFORTS APPLIQUÉS AUX SECTIONS DES POUTRES EN ARC.

Contrairement aux poutres rectilignes, les poutres en arc, ne peuvent être soumises à un système de flexion simple c'est-à-dire ne comportant qu'un moment fléchissant et un effort tranchant [2].

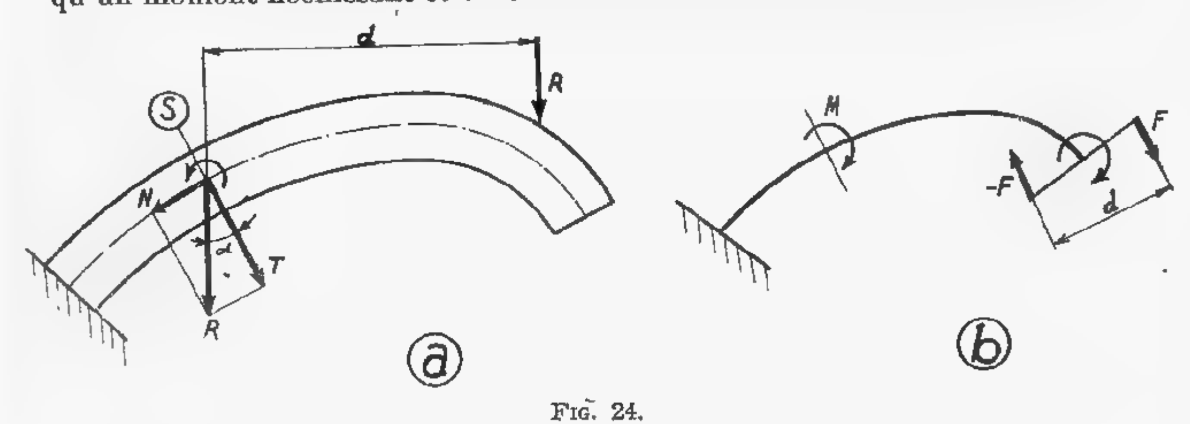


Fig. 24.

Considérons, en effet, l'arc encastré de la figure 24 *a* dans lequel les

1. — Ce type de poutres concerne, en particulier, les *fuselages-coques*. Nous verrons au chapitre XXII, lors de leur étude, des expressions simples permettant le calcul de T'.

2. — On peut cependant imaginer le cas d'un arc soumis à un moment M constant sans efforts tranchant et normal, comme c'est le cas de la figure 24 *b* où l'on a M=F*d*=constante pour toutes les sections. On obtient ainsi un phénomène analogue à la *flexion circulaire* des poutres rectilignes.

charges appliquées à droite d'une section S (normale à la fibre moyenne) admettent pour résultante la force R. Cette section est soumise à :

un moment fléchissant $M=Rd$,
un effort tranchant $T=R \cos \alpha$,
un effort normal $N=R \sin \alpha$.

Cet effort normal ne peut être nul pour toutes les sections admettant R pour résultante extérieure puisque l'angle α varie le long de l'arc.

4.3 EQUATION DE RÉSISTANCE.

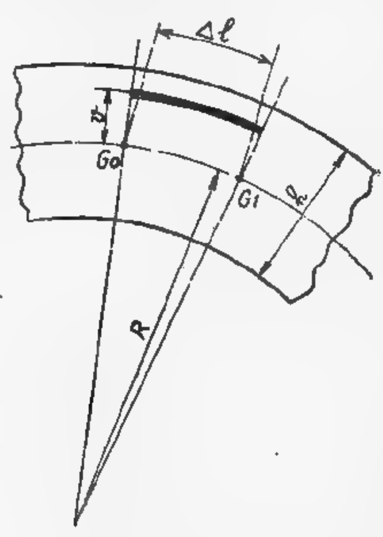


Fig. 25.

4.31 Conditions d'établissement (fig. 25). — Cette équation s'établit, comme celle des poutres droites, en envisageant un élément de poutre de longueur curviligne Δl où *le rayon de courbure moyen*[1] de l'arc a une valeur R (c'est-à-dire où une circonférence de rayon R se confond avec la ligne moyenne de cet élément avant déformation).

On considère ensuite les déformations de rotation et de translation de cet élément dues respectivement à M et N qui coexistent dans le cas général comme nous l'avons vu ci-dessus. La différence essentielle entre les résultats obtenus provient du fait que les longueurs initiales et par suite les *allongements relatifs* des différentes fibres ne sont plus des *constantes* comme dans le cas des poutres rectilignes (§ **3.212**).

4.32 Formule. — On aboutit à la formule suivante donnant la *contrainte normale de flexion composée* en un point d'une section de surface S de moment d'inertie I (par rapport à l'axe d'inertie normal au plan de flexion) situé à une distance v de la fibre moyenne dont le rayon de courbure au point considéré est R :

$$\boxed{n = \frac{N}{S} + \frac{M}{SR} + \frac{M}{AR}\,\frac{v}{R+v}\,.}$$ [2]

Dans cette expression, A est une *constante de section* définie par la relation

$$A = \sum \frac{v}{R+v}\,\Delta S \qquad \text{(voir ci-après § 4.34)}$$

où ΔS = surface de chaque élément infiniment petit composant la section S. Le terme A est donc de la *dimension d'une surface* c'est-à-dire L^2.

4.33 Conventions de signes. — L'expression de cette formule suppose les conventions de signes suivantes que nous exposons, comme au paragraphe **3.227**, sous une forme physique.

---

1. — Le rayon de courbure en un point d'un arc est la limite de ce rayon R quand l'élément Δl devient infiniment petit.

2. — Dans le cas où l'effort normal N est nul (fig. 24 *b* par exemple) le premier terme disparaît seul.

Les deux premiers termes sont de mêmes signes si :

N tend à raccourcir l'élément de poutre (compression)
et M tend à diminuer sa courbure

ou inversement si :

N tend à allonger l'élément (traction)
et M tend à accroître sa courbure.

Ils sont de signes inverses pour les deux autres combinaisons d'effets.

Le *signe du dernier terme* est relié directement à celui de N en observant si la fibre considérée (valeur de v) est tendue ou comprimée par le moment M, ce qu'il est toujours possible de constater en un point de la poutre (§ **3.227**). Cette observation revient à adopter un sens positif pour v (au-dessus ou au-dessous de la ligne moyenne).

4.34 Variation des contraintes le long d'une même section droite. — Les deux premiers termes de la formule donnent des contraintes normales:

$$n_1 = \frac{N}{S} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{M}{SR}$$

qui sont *constantes* pour une même section (traction ou compression simples).

Le dernier terme qui représente « l'effet de flexion » proprement dit donne une contrainte

$$n_3 = \frac{M}{AR} \frac{v}{R+v}$$

qui *varie*, pour une même section, comme le deuxième membre du produit (le premier membre est une constante de section pour une valeur donnée de M).

Cette *variation* n'est plus linéaire comme dans le cas des poutres droites, mais *hyperbolique*.

La contrainte n_3 croît plus vite du côté le plus près du centre de courbure.

La figure 26 (où nous avons adopté des signes arbitraires) donne l'image de variation et de combinaison de ces trois contraintes partielles.

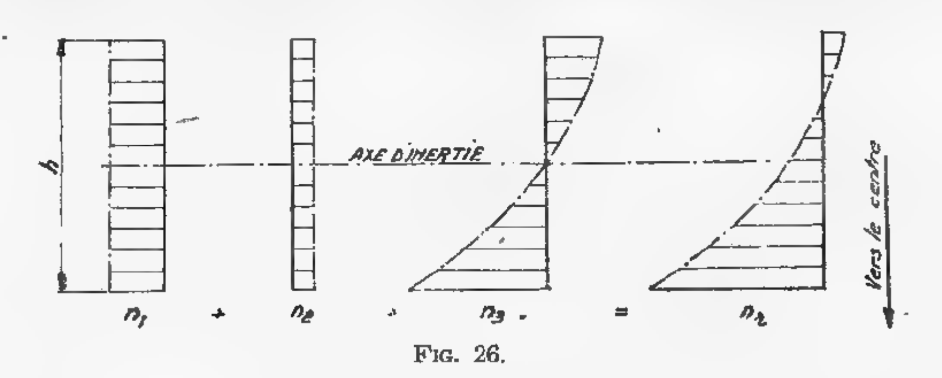


FIG. 26.

4.35 Conséquences de cette variation. — Quand le rapport $\frac{R}{h}$, $\frac{\text{rayon de courbure}}{\text{hauteur}}$, est faible, la contrainte n_3 croît très vite du côté du centre de courbure. En particulier, si l'on considère une poutre présentant un *angle rentrant* elle peut, en ce point, s'assimiler à un arc de rayon nul et la contrainte élastique devient alors infinie. C'est une explication du

phénomène d'*amorce de rupture* créé par un *angle vif* (fig. 27 *a*). Il y a toujours lieu d'arrondir les angles rentrants des pièces fléchies (fig. 27 *b*).

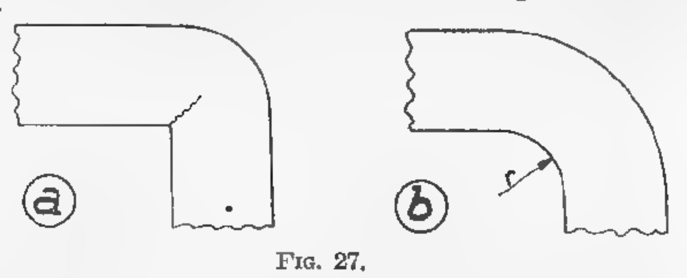


FIG. 27.

4.4 DETERMINATION DE LA CONSTANTE DE SECTION A.

Nous avons posé ci-dessus :

$$A = \sum \frac{v}{R+v} \Delta S$$

Le calcul de cette « constante de section » peut s'opérer soit *graphiquement*, soit *algébriquement*. Nous ne donnerons, dans cette dernière méthode que quelques cas particuliers simples.

4.41 Méthode graphique. — Considérons (fig. 28), dans une pièce courbe ayant un plan de symétrie (nécessaire pour qu'on soit en flexion plane) une section droite S. Soit G son centre de gravité et O le centre de courbure de la pièce au droit de la section considérée. Découpons la section en tranches élémentaires perpendiculaires à l'axe de symétrie OG de la section. Soit AA′ une telle tranche de largeur l, d'épaisseur très petite Δv située à la distance v du centre de gravité G pris comme origine des abscisses.

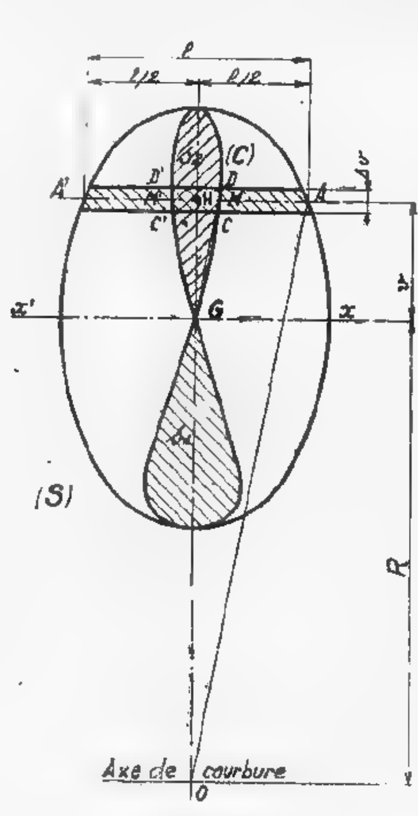


FIG. 28.

L'aire de la tranche est

$$\Delta S = l \, \Delta v .$$

Joignons AO et menons par G la parallèle à OA qui coupe AA′ en M. En considérant les triangles semblables GHM et OHA, nous pouvons écrire

$$\frac{MH}{AH} = \frac{GH}{OH} = \frac{GH}{OG+GH}$$

soit

$$\frac{MH}{\frac{l}{2}} = \frac{v}{R+v}$$

d'où

$$2\,MH = l \frac{v}{R+v} = \overline{MM'}$$

en appelant M′ le symétrique de M par rapport à OG.

L'aire partielle de la tranche limitée par CDC′D′ est égale à

$$\Delta s = \overline{MM'}\,\Delta v = \frac{v}{R+v}\, l\, \Delta v = \frac{v}{R+v}\,\Delta S.$$

Si nous construisons les points M et M′ pour un grand nombre de tranches élémentaires telles que AA′, nous obtiendrons une courbe C, lieu de M et M′.

L'aire totale comprise à l'intérieur de cette courbe C est la somme des aires Δs ci-dessus, soit

$$s = \sum' \frac{v}{R+v} \Delta S = A$$

c'est-à-dire la constante cherchée.

La courbe C affecte généralement l'allure d'un huit dissymétrique par rapport à G. Le terme A est donné par la *différence des aires* s_1 et s_2 *des deux boucles*, car le signe de v varie de part et d'autre de l'axe d'inertie xx' :

$$A = s_1 - s_2.$$

4.42 Valeurs algébriques de A pour quelques sections simples.

4.421 *Section rectangulaire de largeur b, hauteur h avec* $R > \frac{h}{2}$.

$$A = b\,h \left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2\,R}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2\,R}\right)^4 + \frac{1}{7}\left(\frac{h}{2\,R}\right)^6 \ldots\ldots\right].$$

On peut pratiquement se limiter aux deux premiers termes ce qui donne, en effectuant, la valeur approchée :

$$A = \frac{b\ h^3}{12\ R^2} + \frac{b\ h^5}{80\ R^4} = I\left[\frac{1}{R^2} + 0{,}15\left(\frac{h}{R^2}\right)^2\right]$$

en posant $I = \frac{bh^3}{12}$ = moment d'inertie autour de l'axe de flexion.

4.422 *Section circulaire de rayon r.*

$$A = \pi r^2 \left[\frac{1}{4}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{r}{R}\right)^6 + \ldots\ldots\right]$$

soit, en se limitant également aux deux premiers termes :

$$A = \frac{\pi r^4}{4\ R^2} + \frac{\pi r^6}{8\ R^4} = I\left[\frac{1}{R^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R^2}\right)^2\right]$$

avec I = moment d'inertie $= \frac{\pi\ r^4}{4}$.

4.423 *Section elliptique de largeur b et de hauteur h.*

$$A = \frac{\pi b\ h}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{h}{2\,R}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{h}{2\,R}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{h}{2\,R}\right)^6 \ldots\ldots\right]$$

soit, en se limitant aux deux premiers termes :

$$A = \frac{\pi b\ h^3}{64\ R^2} + \frac{\pi b\ h^5}{512\ R^4} = I\left[\frac{1}{R^2} + 0{,}125\left(\frac{h}{R^2}\right)^2\right].$$

4.5 REMARQUES CONCERNANT LA FORMULE DE RÉSISTANCE DES POUTRES COURBES.

4.51 Application classique. — La formule de résistance des pièces courbes est surtout utilisée pour calculer des *crochets de grue* (voir fig. 29). On se trouve dans le cas particulier d'une charge P concentrée au centre de courbure. Dans la section AA' normale à la charge le moment fléchissant est

$$M = -PR$$

(P et M étant de signes contraires puisque P = N tend à allonger et M à déplier).

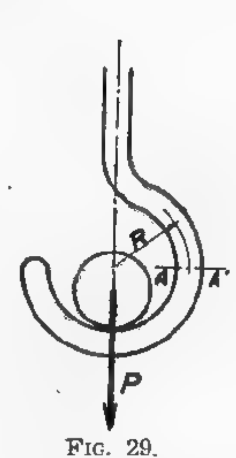


Fig. 29.

La formule donnant la contrainte dans la section AA′ se simplifie en :

$$n=\frac{P}{S}-\frac{PR}{SR}-\frac{PR}{AR}\frac{v}{R+v}$$

soit : $$n=-\frac{P}{A}\frac{v}{R+v}.$$

4.52 Extension de la formule aux poutres rectilignes. — Reprenons l'expression de la formule générale de flexion composée des poutres courbes:

$$n=\frac{N}{S}+\frac{M}{SR}+\frac{M}{AR}\frac{v}{R+v}$$

et supposons que R devienne très grand.

Le deuxième terme $\frac{M}{SR}$ devient négligeable.

Transformons le troisième terme. On peut écrire :

$$\frac{v^2}{R+v}=\frac{v^2+Rv-Rv}{R+v}=\frac{v\,(R+v)}{R+v}-\frac{Rv}{R+v}=v-R\frac{v}{R+v}$$

d'où $$R\sum\frac{v}{R+v}\Delta S=\sum\frac{v^2}{R+v}\Delta S-\Sigma v\Delta S.$$

Or $\Sigma v\Delta S=0$ (définition du c. de g.)

Donc

$$AR=R\sum\frac{v}{R+v}\Delta S=-\sum\frac{v^2}{R+v}\Delta S=-\frac{1}{R}\sum\frac{v}{1+\frac{v}{R}}\Delta S.$$

Quand R devient très grand vis-à-vis de v, le rapport $\frac{v}{R}$ tend vers 0 et *à la limite* (poutre droite) :

$$AR=-\frac{1}{R}\Sigma v^2\Delta S=-\frac{I}{R}$$

(car $I=\Sigma v^2\Delta S$ = moment d'inertie autour de l'axe de flexion).

Le troisième terme devient donc

$$-\frac{M}{\frac{I}{R}}\frac{v}{R+v}=-\frac{MR}{I}\frac{v}{R\left(1+\frac{v}{R}\right)}=-\frac{M}{I}\frac{v}{1+\frac{v}{R}}$$

soit à la limite : $$-\frac{M}{I}v.$$

On retrouve bien la formule de *flexion composée des poutres rectilignes*

$$n=\frac{N}{S}-\frac{M}{I}v$$

(le signe négatif provenant ici de la convention de signes entre M et N).

4.53 Conseil pratique. — La formule de flexion des poutres courbes donne, en réalité, des résultats peu différents de la formule classique des poutres droites quand les pièces à calculer ont un rayon de courbure important relativement à leur hauteur.

On trouve ainsi, pour une section rectangulaire, un écart n'atteignant pas 5 % quand le rayon de courbure est égal à dix fois la hauteur et cet écart diminue très rapidement quand le rapport

$$\frac{R}{h}=\frac{\text{rayon de courbure}}{\text{hauteur}}\text{ augmente.}$$

Donc, en pratique, on réservera la formule pour les pièces *très courbes* : par exemple $R < 5h$, et on calculera les pièces courbes courantes (arcs, couples de fuselage par exemple) par les formules usuelles de la flexion plane des pièces droites.

4.6 CISAILLEMENT DES POUTRES COURBES FLÉCHIES.

La formule exacte donnant la contrainte de *glissement longitudinal* le long des poutres courbes fléchies et cisaillées ne peut s'exprimer sous une forme simple, comme dans le cas des poutres rectilignes.

L'erreur commise en utilisant les formules relatives aux poutres rectilignes devient négligeable quand le rapport $\frac{R}{h}$ devient supérieur à 5, ce qui est le cas de la plupart des éléments courbes rencontrés en construction. Il y a donc lieu, dans la pratique, de généraliser ces formules au cas des poutres en arc.

4.7 DÉFORMATION DES POUTRES COURBES FLÉCHIES.

Nous donnerons au chapitre suivant des méthodes générales (déduites du potentiel élastique interne) qui permettent le calcul des flèches de flexion des poutres rectilignes et donnent une approximation suffisante dans le cas des poutres courbes.

5. DÉTERMINATION DES EFFORTS APPLIQUÉS AUX SECTIONS DROITES DES POUTRES FLÉCHIES

5.0 POSITION DU PROBLÈME.

Les expressions auxquelles nous avons abouti dans les théories ci-dessus supposent toujours connus les *efforts internes* appliqués aux différentes sections droites des poutres étudiées.

Ces efforts peuvent comprendre au maximum, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus : un *effort tranchant* T, un *moment fléchissant* M et un *effort normal* N.

Le premier travail à effectuer est donc toujours celui de la recherche de ces *sollicitations*, ce qui revient industriellement à déterminer leurs *courbes de variation* le long de l'élément étudié, voir notes [1] et [2]. Nous avons déjà donné au chapitre V, paragraphe **1.**, les principes généraux de définition de ces efforts internes et nous avons effectué *Planche* **10** une *application numérique* concernant leur recherche dans le cas d'un système à trois dimensions.

Nous résumons ci-dessous les différentes méthodes qui peuvent être utilisées dans le cas des *poutres planes isostatiques.*

Nous rappelons qu'il y a lieu, avant toute chose, d'effectuer l'*équilibre statique extérieur* du système étudié (chap. III) [3].

---

1. — Il n'est pas toujours nécessaire de connaître les efforts appliqués à toutes les sections ni donc d'en construire leur variation. En particulier, pour une poutre de section constante, il suffit de connaître les valeurs maxima de ces efforts qui définissent l'emplacement d'une *section dangereuse.*

2. — Ces courbes peuvent englober l'influence de plusieurs cas de calculs. Elles prennent alors le nom de *courbes enveloppes* des sollicitations appliquées. C'est toujours en partant de ces courbes que l'on établit un *dimensionnement d'égale résistance* (c'est-à-dire de poids minimum) des éléments étudiés.

3. — On peut se dispenser d'effectuer cet équilibre externe préalable dans le seul cas des poutres-consoles encastrées à une extrémité. Effectuer alors le cheminement de l'extrémité libre vers l'encastrement.

On se donne ensuite un *sens de cheminement arbitraire* duquel dépendront les signes des efforts trouvés (chap. V, § 1.2).

Il y a lieu également de n'envisager que des sections perpendiculaires à la fibre moyenne de la poutre, c'est-à-dire des *sections droites* de cette poutre.

Nous aurons à envisager différentes méthodes selon que les charges appliquées sont *concentrées* ou *réparties*.

5.1 DÉTERMINATION DES EFFORTS TRANCHANTS.

5.11 Charges concentrées. — Envisager une section à l'aplomb de chaque charge. On obtient au niveau de chacune de ces *sections d'introduction de charges*, deux valeurs d'effort tranchant différant entre elles de la projection de la charge introduite, ce qui donne une « courbe représentative en escalier » : Voir planche 10 et figure 30.

Remarque. — Dans le cas d'une *poutre courbe*, on opère de même en projetant sur le plan de chaque section la résultante des charges agissant *d'un même côté de cette section.* Il y a lieu généralement d'envisager des sections intermédiaires pour obtenir par points la courbe représentative de T qui dépend de la forme de l'arc et se trace en portant en abscisses le développement sur une droite de la ligne moyenne de cet arc.

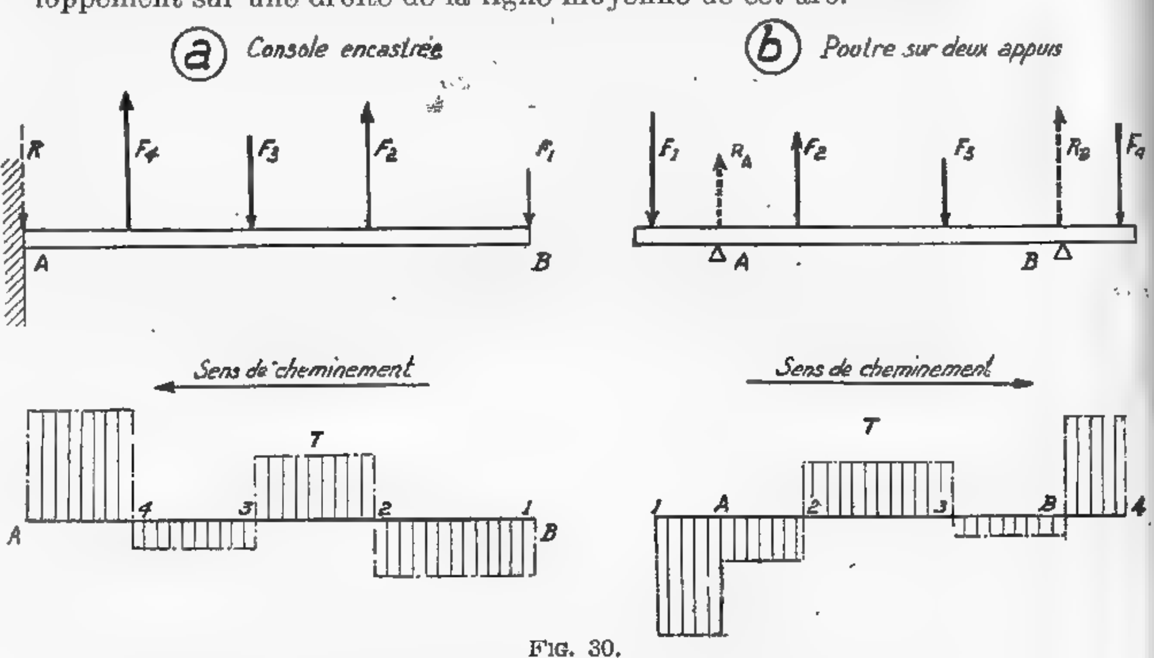


FIG. 30.

5.12 Charges réparties.

5.121 *Méthode algébrique.* — Nous avons vu au paragraphe **2.2** ci-dessus que T était relié à l'ordonnée de charge en un point par la relation

$$p = \frac{dT}{dx}.$$

On a donc dans une section d'abscisse x :

$$T = \int_0^x p\,dx + C.$$

La *constante* C représente l'effort tranchant à l'origine des abscisses x considérées, c'est-à-dire la réaction d'un appui extrême, par exemple.

Cette méthode est à conseiller quand p s'exprime lui-même par une *relation simple* en fonction de x.

La figure 31 *a* représente le cas d'une charge p = constante (*charge uniformément répartie*) agissant sur une poutre rectiligne sur deux appuis.

On a alors

$$T = px + R_A \quad \text{(variation linéaire)}$$

Nous trouverons également *Planche* 18 (application numérique § 7.4 ci-après) le cas d'une *variation linéaire* de p qui engendre une *variation parabolique* (2e degré en x) de T.

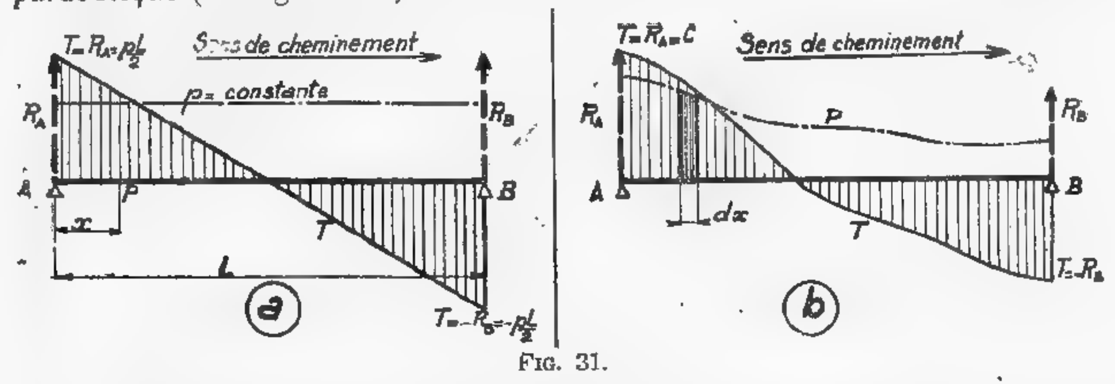


Fig. 31.

5.122 *Méthode graphique.* — Partant de la ligne de charge p tracée le long de la poutre on peut obtenir T par *intégration graphique* de cette courbe (chap. IV, § 8.) en ayant soin de tenir compte de la *constante de départ* (ou des décalages) due aux réactions d'appuis initialement calculées.

5.123 *Méthode mixte.* — Il est généralement suffisant d'obtenir la variation de T en calculant sa valeur par points, ce qui se fait en *intégrant par parties* l'aire délimitée par la ligne de charge (évaluation de surfaces partielles assimilées à des surfaces simples équivalentes).

Dans l'exemple de la *Planche* 7 on obtiendrait ainsi la valeur de T à la limite extrême de chacun des intervalles considérés en additionnant simplement les charges concentrées équivalentes (ayant servi au calcul de M) situées d'un même côté de cette limite [1].

C'est pratiquement la méthode la plus utilisée dans le cas de *charges quelconques.*

5.2 DÉTERMINATION DES MOMENTS FLÉCHISSANTS.

5.21 Méthodes graphiques. — Nous avons vu au chapitre IV, paragraphe **6.**, que la *statique graphique* permettait d'obtenir d'une façon générale les courbes représentatives de M le long des *poutres droites* dans le cas de charges concentrées ou réparties normales à la direction de la poutre [2]. Cette méthode est à conseiller dans tous les cas de systèmes de charges compliqués (grand nombre de charges concentrées ou charges réparties de variations quelconques), voir figures du chapitre IV, paragraphe **6.** et *Planche* 7.

On peut également si l'on a déterminé la courbe de T obtenir celle de M par *intégration graphique* de cette courbe. Cette méthode est également à conseiller quand la variation de T suit une loi non simple [3] [4].

1. — Le lecteur aura intérêt à tracer par points cette courbe T et à vérifier ainsi qu'elle s'annule bien au niveau de M max.

2. — Ces méthodes peuvent se généraliser aux poutres droites chargées obliquement à condition d'y faire intervenir les *projections normales* des efforts appliquées aux points de rencontre de leurs lignes d'action avec l'axe de la poutre.

3. — Cas de charges réparties quelconques, par exemple, où M peut s'obtenir par double intégration graphique de la ligne de charges réparties.

4. — Il est à signaler qu'il existe des appareils dits *intégrateurs multiples* qui permettent, dans ce cas, d'obtenir par simple opération de planimétrage la valeur de M

5.22 Méthodes algébriques.

5.221 *Charges concentrées.* — On calcule alors M *par points* au niveau de chaque *section d'introduction de charge*. Dans le cas des *poutres droites*, la variation de M est *linéaire* dans l'intervalle : voir *Planche* 7.

Dans le cas des *arcs* l'allure de variation se modifie par suite de l'accroissement non linéaire des bras de leviers dû à la forme courbe. On a alors intérêt à utiliser une méthode mixte (voir ci-dessous).

5.222 *Charges réparties.* — Quand la variation de p est simple on obtient M par double intégration de la fonction p c'est-à-dire par intégration de la fonction T.

Exemple :

$$p = \text{constante} : \qquad T = px + C \; ; \; M = \frac{p}{2} x^2 + Cx + C'.$$

C = effort tranchant à l'origine des abscisses (réaction d'un appui par exemple) et C' = moment à cette origine. La variation de M est parabolique.

Voir également, *Planche* 18, le cas d'une *variation linéaire* de p qui donne une fonction M du troisième degré (parabole cubique).

Cette méthode n'est pratiquement applicable qu'aux poutres rectilignes.

5.23 **Méthodes mixtes.** — Pour les poutres droites on peut *planimétrer par tranches* les aires délimitées par les courbes d'efforts tranchants et obtenir ainsi par points (aux limites extrêmes de ces tranches) les valeurs de M.

Pour les poutres courbes on a intérêt à construire graphiquement les *résultantes partielles* R des efforts agissant d'un même côté des sections droites envisagées et à mesurer leurs bras de levier d par rapport à ces sections, d'où

$$M = R \cdot d.$$

C'est la méthode que nous utiliserons pour le calcul des couples de fuselages-coques (voir chap. XXII.).

5.3 DÉTERMINATION DES EFFORTS NORMAUX.

Le calcul des efforts normaux s'opère d'une façon analogue au calcul des efforts tranchants en envisageant cette fois les projections des forces appliquées *normales* aux sections droites envisagées. On obtient, généralement, la courbe par points.

Voir *Planche* 10 et figure 32.

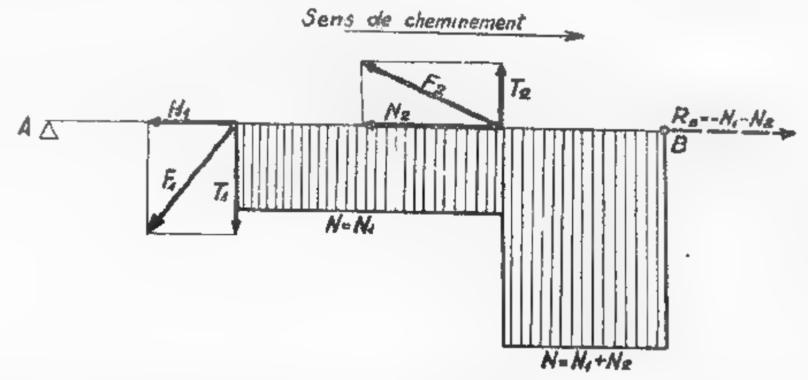


FIG. 32.

---

en un point de référence donné, matérialisé généralement par la position d'une règle figurant un axe par rapport auquel on obtient directement les *moments statiques des surfaces*. On construit ainsi par points la courbe M. Ces appareils permettent également, généralement, la lecture directe, sur un troisième cadran, des moments d'inertie des surfaces.

5.4 CAS PARTICULIER DE CHARGES APPLIQUÉES MOBILES

Nous avons dit ci-dessus qu'il y avait lieu souvent de considérer des *courbes enveloppes* des sollicitations diverses appliquées aux différentes sections.

Un cas particulier rencontré industriellement lors de l'étude des ponts, portiques, ponts roulants, etc... est celui de charges mobiles le long de l'élément étudié (passage d'un véhicule de poids donné sur un pont, par exemple). On désigne généralement ce problème par l'étude des *charges roulantes.*

Nous nous contenterons ici de signaler que cette étude, qui se trouve dans la plupart des manuels industriels ou scolaires courants, donne lieu au tracé de *lignes d'influence* (courbes enveloppes relatives à une même charge) des efforts tranchants et moments fléchissants le long des poutres étudiées.

5.5 FORMULAIRE RESUMÉ DES PRINCIPAUX CAS DE FLEXION DES POUTRES DROITES ISOSTATIQUES.

Nous donnons, **Planche 17,** deux tableaux résumant les efforts appliqués le long de quelques poutres droites isostatiques soumises à des systèmes de charges fréquemment rencontré en pratique.

Nous y avons également indiqué les *flèches de flexion* calculées selon les méthodes exposées au chapitre X.

Nous donnerons ultérieurement un tableau analogue pour les poutres hyperstatiques (chap. XVIII).

6. CALCUL DES SECTIONS DES POUTRES FLÉCHIES

Nous entendons par « *calcul des sections* » soit le *dimensionnement* de ces sections, c'est-à-dire la détermination des *dimensions minima* qu'elles doivent avoir pour résister aux efforts qui leur sont appliqués, soit la détermination des *contraintes* subies dans une section de dimensions données, ces contraintes devant être inférieures aux contraintes maxima admissibles. Nous donnons ci-dessous quelques généralités au sujet de ces calculs.

6.1 CONDITIONS.

Nous avons deux conditions de résistance à vérifier :

Condition de résistance aux contraintes normales :

$$n = \frac{N}{S} + \frac{M}{I} V \leqslant n_{ca} \text{ ou } n_{ta} ;$$

Condition de résistance aux contraintes tangentielles (glissement) :

$$t = \frac{T}{I} \frac{W}{l} \leqslant t_a$$

n_{ta} étant la contrainte maximum admissible en traction ;
n_{ca} étant la contrainte maximum admissible en compression ;
t_a étant la contrainte maximum admissible au cisaillement.

6.2 SECTIONS SYMETRIQUES ET MASSIVES.

Ce sont des sections rectangulaires, circulaires, elliptiques, etc...

Il suffit, en général, de vérifier la *première condition* car la contrainte de glissement est négligeable devant la contrainte normale.

1. — Pour les métaux usuels laminés ou étirés t_a—0,5 n_{ta} (Voir Chap. VIII, § 5.1). La contrainte n_{ca} est très souvent limitée par des considérations d'instabilité générale ou locale (Chap. XVI et XIX).

En effet, déterminons le rapport devant exister entre les dimensions d'une section métallique rectangulaire de façon que la contrainte de glissement soit prépondérante.

Soit une poutre encastrée de longueur L chargée en bout par une force F (voir fig. 33 *a*) et soient *b* et *h* son épaisseur et sa hauteur.

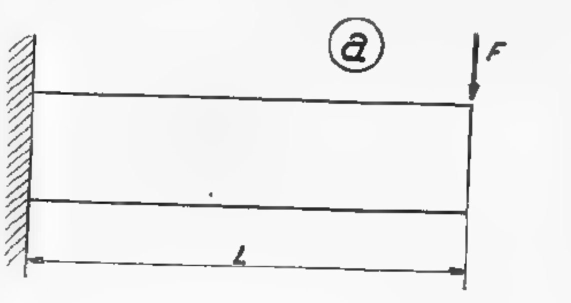
$$I = \frac{bh^3}{12} \; ; \; \frac{I}{V} = \frac{bh^2}{6}.$$

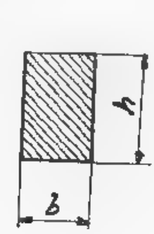
La contrainte normale est maximum à l'encastrement, soit :

$$n = \frac{M}{I/V} = \frac{6\ FL}{bh^2}.$$

La contrainte tangentielle est maximum sur l'axe neutre, soit :

$$t = \frac{T}{I}\frac{W}{b} = \frac{3}{2}\frac{F}{bh}.$$





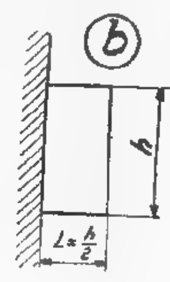


FIG. 33.

Comme $t_a = 0{,}5\ n_a$, pour que la contrainte de glissement soit prépondérante, il faut que *t* soit supérieur à la moitié de la contrainte de flexion. Prenons le cas limite

$$t = \frac{1}{2}\ n$$

ce qui nous donne

$$\frac{3}{2}\frac{F}{bh} = \frac{1}{2}\ \frac{6\ FL}{bh^2}$$

ou, en simplifiant

$$L = \frac{h}{2} \qquad \text{(fig. 33 } b\text{).}$$

La condition de cisaillement sera prédominante si

$$L < \frac{h}{2}.$$

On voit que ce cas ne correspond pas à celui des poutres étudiées en résistance des matériaux courante qui ont toujours une longueur importante vis-à-vis de leur hauteur.

Pour les poutres métalliques de section massive, il suffit donc de vérifier la condition de contrainte normale [1].

6.3 SECTIONS AMINCIES.

Les fibres les plus fatiguées en flexion étant les plus éloignées de l'axe neutre, on est immédiatement conduit, si l'on cherche à obtenir un *poids*

1. — Il n'en est plus de même pour les poutres en bois, ainsi que nous le verrons au chapitre XII.

minimum à concentrer la matière dans ces régions extrêmes, en laissant au centre juste ce qui est nécessaire pour transmettre le cisaillement [1].

On arrive ainsi aux *sections en poutrelles* utilisées dans la charpente métallique courante et aux *sections à âmes minces* utilisées d'une façon générale en construction aéronautique. Les parties extrêmes prennent alors le nom de *semelles.* Il y a alors lieu, pour ces sections, de vérifier la tenue au cisaillement de l'âme [2] conjointement à la vérification des semelles aux contraintes normales.

Cette vérification peut s'opérer par les formules générales ou par les formules simplifiées données au paragraphe suivant.

7. CALCUL DE DIMENSIONNEMENT RAPIDE D'UN LONGERON A AME MINCE

7.1 DONNÉES.

Nous nous placerons dans le cas simple d'un *longeron à deux semelles de sections rectangulaires* pour lesquelles les contraintes normales admissibles en traction et en compression sont identiques (pas de limitation due au flambage ; c'est le cas général des semelles de sections massives telles que celles d'un monolongeron de voilure par exemple).

Nous supposerons, de plus, qu'il n'existe pas d'effort normal N appréciable vis-à-vis du moment fléchissant M.

Nous sommes ainsi conduits à dimensionner deux *semelles de sections égales* c'est-à-dire d'épaisseurs égales.

Les principes de calcul exposés ci-après seront concrétisés par une application numérique (§ 7.4).

7.2 DIMENSIONNEMENT DES SEMELLES.

Désignons (fig. 34) par H la *hauteur extérieure* connue du longeron, par b la largeur des semelles et par e leur épaisseur à déterminer.

Pratiquement l'âme, de surface très faible vis-à-vis de celle des semelles, intervient très peu dans le moment d'inertie. C'est pourquoi l'on dit fréquemment que dans ce type de structure « *les semelles encaissent la totalité du moment fléchissant* » [3]. *Nous négligerons donc l'âme pour le dimensionnement des semelles.*

7.21 Calcul préliminaire. — Désignons par s la *section nécessaire* d'une semelle :

$$s = be.$$

Le moment de flexion est équivalent à un couple de composantes

$$F = \pm \frac{M}{H'}$$

avec H' = hauteur effective du longeron (distance entre les centres de gravité des semelles).

1. — Cette observation conduit à la remarque suivante : Pour renforcer une section fléchie insuffisante, il est toujours beaucoup plus avantageux de jouer sur sa *hauteur* plutôt que sur sa largeur (le module d'inertie croît comme le carré de h et proportionnellement à b).

2. — La contrainte admissible au cisaillement de l'âme est généralement limitée par des considérations de stabilité (Chap. XIX).

3. — Cette assertion se trouve pratiquement justifiée par le fait que l'âme mince ne participe effectivement plus à la résistance normale à partir du moment où elle dépasse sa *limite de stabilité* (Chap. XIX).

Assimilons d'une façon grossière H' à H. On en déduit :

$$F \approx -\frac{M}{H}$$

d'où une première indication de *l'ordre de grandeur* de la section à donner aux semelles :

$$s \approx \frac{F}{n_a} = \frac{M}{H\ n_a}.$$

Cette indication permet d'adopter une *loi de variation de la largeur b* de la semelle le long du longeron de façon à obtenir des épaisseurs *e* raisonnables [1].

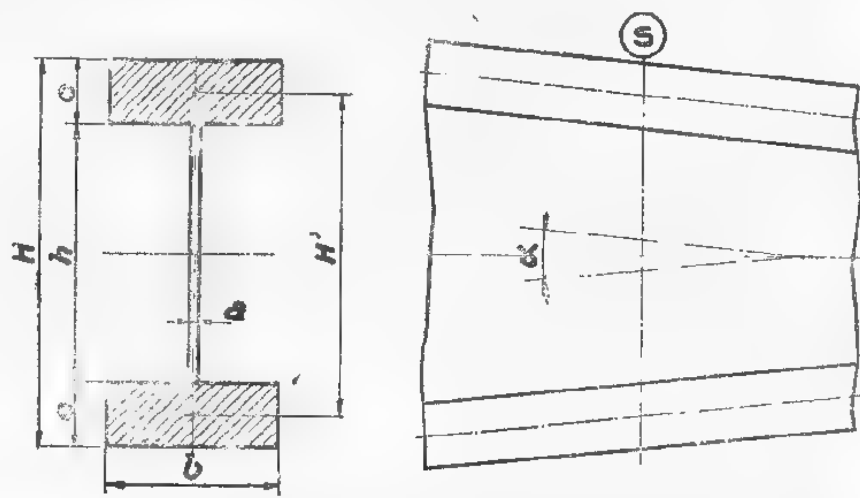


Fig. 34.

7.22 Détermination de l'épaisseur minimum des semelles. — Le *moment d'inertie* I d'une section doit être tel que l'on ait à la limite :

$$\frac{M}{I}\ \frac{H}{2} = n_a$$

d'où

$$I = \frac{MH}{2\ n_a}.$$

Ce moment d'inertie a, d'autre part, comme expression (fig. 34)

$$I = \frac{bH^3}{12} - \frac{b\ (H-2\ e)^3}{12}$$

On en déduit la relation :

$$(H-2\ e)^3 = H^3 - \frac{6\ MH}{b\ n_a} = H\left(H^2 - \frac{6\ M}{b\ n_a}\right)$$

d'où

$$H - 2e = \sqrt[3]{H\left(H^2 - \frac{6\ M}{b\ n_a}\right)} = h.$$

Connaissant cette valeur *h* (où ne rentrent que des paramètres connus) on en déduit l'épaisseur *e* des semelles à donner en chaque section :

$$e = \frac{H-h}{2}.$$

1. — On adopte généralement une variation linéaire (Voir *Planche* 18).

7.3 DIMENSIONNEMENT DE L'AME.

7.31 **Hauteur équivalente** — Nous avons vu au paragraphe **3.732** ci-dessus que l'âme d'un profilé en I était, avec une très bonne approximation, justiciable d'un calcul au *cisaillement simple*. Cette approximation est encore plus voisine de la réalité dans le cas de l'*âme mince* qui nous occupe.

La *hauteur équivalente au cisaillement* de cette âme est donnée par (§ **3.75**)

$$Z = \frac{I}{W_{max}} .$$

Or

$$I \approx 2\ s \left(\frac{H'}{2}\right)^2 = s\ \frac{H'^2}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{max} = s\ \frac{H'}{2}$$

en désignant par H′ la distance entre les centres de gravité des semelles (dont on néglige l'inertie propre dans l'expression de I ci-dessus), soit :

$$H' = H - e.$$

On a donc

$$Z = \frac{s\ H'^2 \cdot 2}{2\ s\ H'} = H' = H - e.$$

7.32 **Calcul de l'effort tranchant réduit.** — D'après l'expression du paragraphe **3.84**, cet effort tranchant T′ est donné par

$$T' = T - k\frac{M}{H'}$$

le *coefficient de convergence k* qui devrait, en toute rigueur, être compté sur les axes des semelles (hauteur H′ = Z) peut, avec une approximation très suffisante dans le cas qui nous occupe, être pris égal à celui des *faces extérieures* des semelles, c'est-à-dire

$$k = \frac{H_1 - H_0}{L}$$

H_1 et H_0 étant les hauteurs extérieures H relatives à deux sections 1 et 0 distantes de L (sections extrêmes par exemple si le longeron est rectiligne).

7.33 **Calcul de l'épaisseur.** — Si nous supposons connue la *contrainte admissible t_a au cisaillement* de l'âme (Nota [1], § **6.3**), nous déduisons directement son épaisseur minimum *a* par la relation :

$$\frac{T'}{H'\ a} = t_a$$

d'où

$$a = \frac{T'}{H'\ t_a} .$$

7.4 APPLICATION NUMÉRIQUE.

Nous donnons **Planche 18,** une application numérique de ces calculs concernant un *monolongeron de voilure* dont les dimensions extérieures H et *b* sont connues [1]. Ce longeron transmet par flexion la totalité des charges appliquées à l'aile de forme en plan trapézoïdale.

Ces charges, évaluées au *coefficient de calcul à rupture*, comprennent :

— Une *charge répartie* dirigée de bas en haut dont l'ordonnée *p* varie *linéairement* le long de l'envergure. Cette charge provient des actions aérodynamiques de portance et des forces d'inertie de délestage dues aux masses

1. — Ces dimensions extérieures varient linéairement. La hauteur H est définie par l'épaisseur du profil et la largeur *b* a été déterminée par un calcul préliminaire rapide (§ **7.21**)

réparties de la structure de l'aile (charges supposées uniformément réparties sur la surface de l'aile) ;

— Une *charge concentrée* F résultant de la force d'inertie d'une masse importante localisée.

Nous avons adopté une *contrainte normale de flexion admissible* n_o variant *linéairement* de 40 à 29,5 kg/mm² de l'encastrement à l'extrémité [1]. Cet abattement forfaitaire de la valeur de la contrainte vers l'extrémité répond à des considérations de rigidité des bouts d'ailes en vue d'éviter les vibrations. Le calcul des efforts appliqués est effectué algébriquement pour différencier cette application de celle donnée *Planche* 7.

Les notations utilisées sont identiques à celles ci-dessus. Voir ci-après, paragraphe **8.3**, le texte relatif au calcul du rivetage âme-semelles effectué *Planche* **18.**

7.5 INFLUENCE D'UNE OUVERTURE DANS L'AME D'UN LONGERON.

Nous envisagerons le cas simple d'une *ouverture rectangulaire symétrique par rapport à la fibre neutre* (fig. 35).

Considérons les deux sections droites S et S′ passant par les côtés extrêmes de l'ouverture. Désignons par M et T le moment fléchissant et l'effort tranchant moyens agissant dans l'intervalle SS′ [2].

Comme nous l'avons vu, M est équivalent à deux forces antagonistes agissant sur les semelles, d'intensité

$$F = \pm \frac{M}{H'}.$$

Isolons l'élément limité par les deux sections S et S′. Par suite de l'ouverture, cet élément se comporte pratiquement comme *deux poutres indépendantes*, du point de vue de l'action de l'effort tranchant (le passage du glissement n'est, en effet, plus possible de la partie supérieure à la partie inférieure). Par suite de la *symétrie*, cet effort tranchant est transmis par moitié par chacune de ces deux parties [3].

Nous sommes donc, pour chaque demi-section, en présence d'une *poutre encastrée à ses deux extrémités* (par continuité) *et soumise à une force normale F et à un effort tranchant* T/2 *constant.*

La transmission de l'effort normal se fait par les semelles. Elle engendre une contrainte $\frac{F}{S}$, S étant la section de la semelle. Cette contrainte n'est autre que la contrainte normale de flexion n.

L'étude de la transmission de l'effort tranchant T/2 est, dans ce cas, un *problème hyperstatique*. Mais on peut lever l'indétermination due au double encastrement par des considérations de *symétrie*. On peut, en effet, d'une façon imagée, assimiler chaque poutre à un ensemble de *deux poutres encastrées liées bout à bout* par une articulation fictive (située en O ou O′. Voir figure 35 *c* l'allure de la déformation due à l'ouverture). Les moments d'encastrement de ces poutres sont égaux et valent donc

$$\mu = \pm \frac{T}{2} \frac{l}{2} = \pm \frac{Tl}{4}.$$

---

1. — La contrainte à l'extrémité elle-même est fictive (charges nulles) et sa valeur ne sert qu'à définir la valeur de n_a.

2. — Dans le cas d'un longeron à semelles convergentes, il y a lieu d'envisager seulement l'effort tranchant réduit T′ car l'effort tranchant réducteur T″ = T — T′ continue à être transmis par la convergence des semelles sans donner lieu à aucun phénomène perturbateur.

3. — Dans le cas d'une ouverture dissymétrique partager T′ proportionnellement à l'inertie propre de chaque partie.

L'ouverture fait donc naître sur chaque poutre un *moment secondaire* dont la variation est figurée par les diagrammes hachurés de la figure 35 *b*.

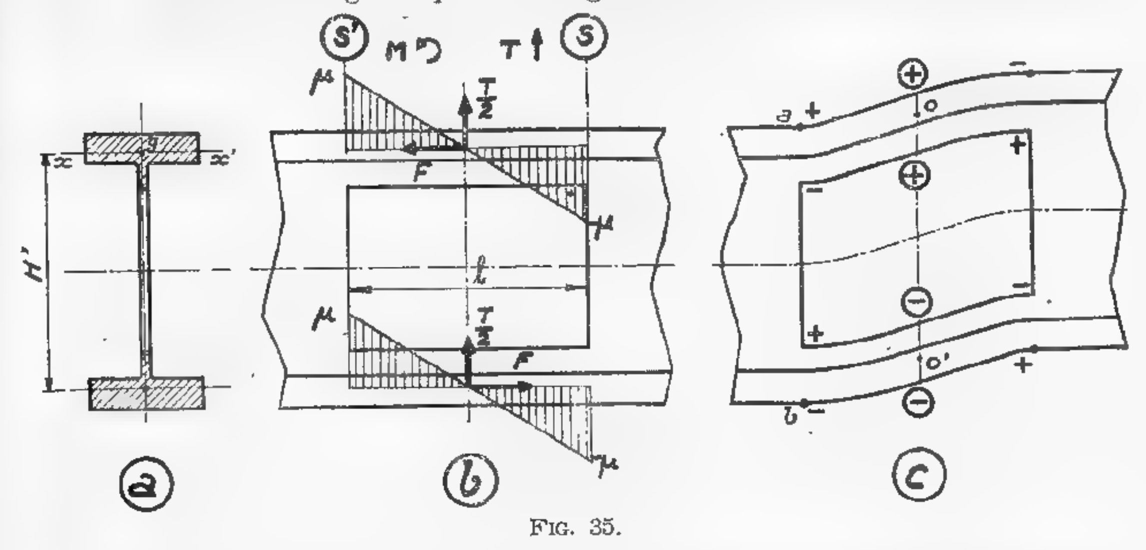


FIG. 35.

Ces moments secondaires engendrent des *contraintes normales supplémentaires* n_s *ayant pour valeurs maxima aux angles de l'ouverture*

$$n_s = \frac{\mu}{\left(\frac{i}{v}\right)}$$

$\left(\frac{i}{v}\right)$ étant le module d'inertie de la *section restant de chaque côté du trou*, autour de l'axe *xx'* passant par le *centre de gravité propre g* de cette section (module d'inertie côté semelle, voir fig. 35 *a*).

La contrainte totale est la *somme algébrique* de la contrainte générale de flexion *n* et de cette contrainte supplémentaire, soit

$$n_r = n + n_s \quad \text{(voir remarques ci-après).}$$

Remarques. — *a*) Il y a lieu, pour appliquer la formule de *combinaison de contraintes* ci-dessus de considérer les *sens relatifs* des moments M et μ, ce qui s'opère simplement en observant les *sens des déformations qu'ils provoquent*. Dans l'exemple ci dessus, en supposant le longeron encastré à gauche, le moment M comprime la semelle supérieure et tend la semelle inférieure (signes encerclés sur la fig. 35 c). Les moments d'encastrement μ donnent aux quatre angles les signes indiqués. On voit donc que, dans ce cas, les contraintes s'ajoutent sur les faces extérieures des semelles aux points *a* et *b* ;

b) L'*importance de la contrainte* n_s peut être très grande, car l'inertie propre de chaque poutre est très faible vis-à-vis de celle de l'ensemble. Pour accroître cette inertie propre on est conduit à *border l'ouverture* de façon à former deux véritables poutres avec âmes et semelles. On est, de plus, conduit à *arrondir les angles* de l'ouverture ce qui a également pour effet d'éviter les amorces de rupture. On arrive ainsi pour les ouvertures de faible importance à des *trous circulaires à bords tombés* ou à *boudins de raidissement* emboutis [1] ;

1. — Dans le cas d'une âme mince, une bordure convenable peut suffire à assurer la continuité de cisaillement de part et d'autre de l'ouverture et il n'y a ainsi plus aucune sursollicitation des semelles.

Nous trouverons au chapitre XVII un exemple de calcul de ces bordures. Les boudins de raidissement des trous ronds sont généralement établis pour parvenir à ce résultat.

c) En réalité l'influence de l'ouverture est plus complexe et se fait sentir *avant* et *après* elle, car il ne peut y avoir de modification brutale des tensions sous l'action d'un phénomène intérieur.

8. CALCUL DES ASSEMBLAGES LONGITUDINAUX DES POUTRES COMPOSÉES FLÉCHIES

On réalise très souvent les poutres fléchies en assemblant par rivets, boulons ou soudure électrique par points, des éléments différents dont l'ensemble réalise une poutre avec *âme* et *semelles*. Le calcul de ces *assemblages longitudinaux* constitue une application directe des théories du *glissement longitudinal de flexion*.

8.1 PRINCIPE DE CALCUL.

On isole, dans une section droite de la poutre, les éléments mis en charge par la jonction longitudinale considérée.

L'effort transmis par unité de longueur de cette jonction est donné par :

$$\tau = \frac{T}{I} w \qquad (\S\ 3.54)$$

avec T = effort tranchant agissant sur l'ensemble de la section [1] ; I = moment d'inertie de flexion de l'ensemble de la section ; w = moment statique des éléments mis en charge, par rapport à l'axe d'inertie de flexion.

Si l'on connaît le *pas résistant* [2] P des éléments de jonction étudiés, la charge par élément (rivet ou boulon) est donnée par

$$F = \tau P$$

d'où un calcul au cisaillage (simple ou double) selon la méthode habituelle (chap. VIII).

Si l'on désire connaître le *pas résistant maximum admissible* P_a *on a* directement, connaissant la charge admissible F_a par élément.

$$P_a = \frac{F_a}{\tau}.$$

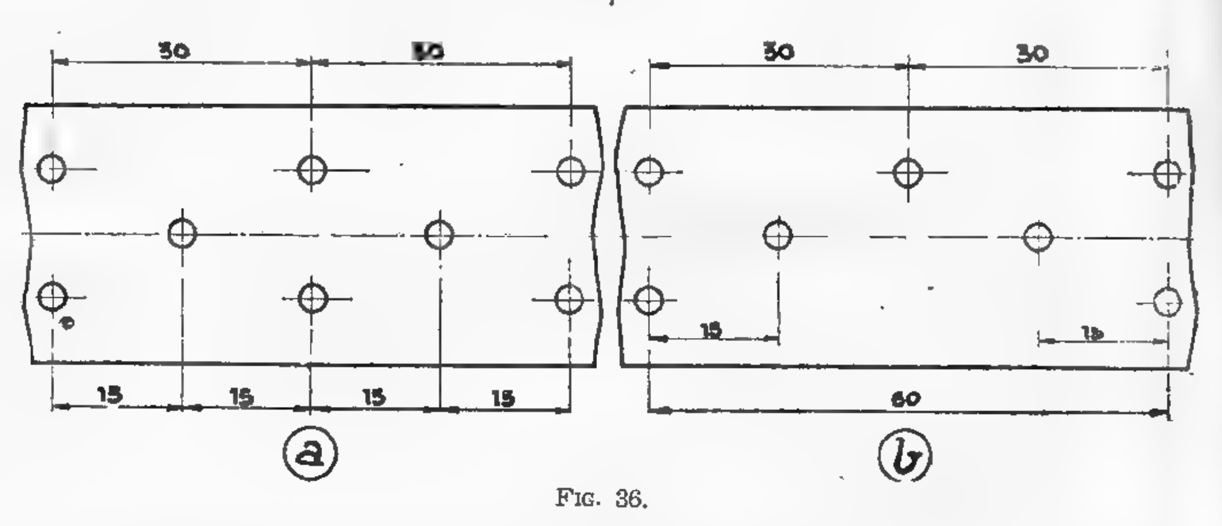


FIG. 36.

1. — Dans le cas des poutres à semelles convergentes, remplacer T par T′ = effort tranchant réduit.

2. — Nous désignons par « *pas résistant* » la distance séparant deux éléments d'assemblage (placés sur une seule rangée) de résistance équivalente à l'ensemble.

Exemples. — Fig. 36 *a* : $P = \frac{30}{3} = 10$ mm ; Fig. 36 *b* : $P = \frac{60}{5} = 12$ mm.

8.2 EXEMPLES.

8.21 FIGURE 37 *a*. — Effort de cisaillement sur la section $\alpha\alpha'$ d'un rivet de jonction

$$F = \frac{T}{I}\, s\, d\, P.$$

Effort de cisaillement section $\beta\beta'$

$$F' = \frac{T}{I}\, s'\, d'\, P.$$

Effort de matage sur l'âme : $F + F'$.

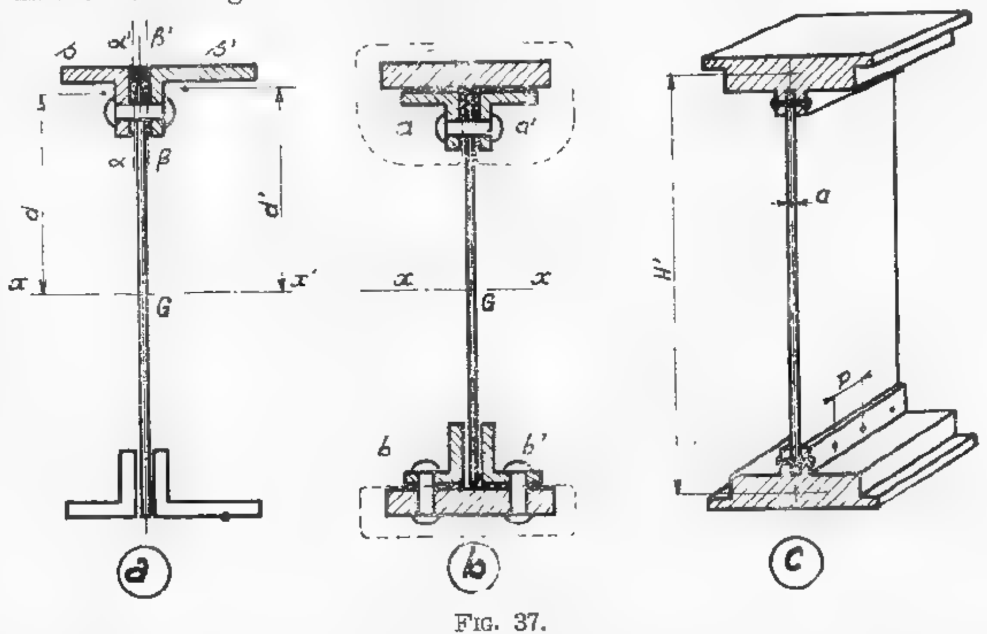


FIG. 37.

8.22 Figure 37 *b*. — *a*) *Etude du rivetage aa'* (âme-cornières) : Les éléments mis en charge par ce rivetage sont encadrés sur la partie supérieure de la figure. Ce sont leurs sections qui entrent dans le calcul du *moment statique* permettant d'obtenir l'effort d'ensemble sur un rivet ;

b) *Etude du rivetage bb'* : L'élément mis en charge ne comprend plus que la semelle elle-même (élément encadré sur la partie inférieure de la figure).

8.3 CALCUL SIMPLIFIÉ DE LA JONCTION AME-SEMELLES D'UN LONGERON A AME MINCE.

Nous avons vu que la contrainte de cisaillement de l'âme était très sensiblement constante sur toute sa hauteur et égale à

$$t = \frac{T'}{a\,H'} \quad (\S\ 7.33 \text{ et fig } 37\ c).$$

On a donc un *glissement réciproque par unité de longueur de la jonction :*

$$\tau = a\,t = \frac{T'}{H'}$$

d'où un *pas résistant maximum admissible* P_a dans le cas de la figure 37 *c* (double cisaillage)

Condition de cisaillage des rivets : $P'_a = \frac{2\,s}{\tau}\, t_a = \frac{2\,s\,H'}{T'}\, t_a$

avec $s = \frac{\pi\, d^2}{4}$ = section d'un rivet de jonction ayant une contrainte admissible t_a au cisaillage.

Condition de matage de l'âme : $P''_a = \frac{d}{\tau} p_a\, a = \frac{d\, H'}{T'} p_a\, a$

avec p_a = pression de matage admissible sur l'âme et a = épaisseur de l'âme.

Le pas résistant P_r doit être égal ou inférieur à la plus faible de ces deux valeurs.

Nous donnons, *Planche* 18, pour le longeron déjà envisagé au § 7.4, le calcul du pas maximum admissible P_a le long de l'envergure. Les notations utilisées sont identiques à celles ci-dessus. On voit que la condition de matage de l'âme est en général prédominante et conduit à l'adoption de forts diamètres de rivets jusqu'à l'extrémité.

9. CALCUL DES DENTS D'ENGRENAGES

On peut assimiler une dent d'engrenage à une poutre-console encastrée à sa base sur le noyau de l'engrenage et soumise à *l'effort tangentiel de contact*. On se place généralement, pour les engrenages courants à denture droite, dans le *cas limite défavorable suivant* (fig. 38).

On suppose qu'une seule dent est en contact et que ce contact s'opère sur son extrémité selon une direction normale à l'axe de la dent. On a alors à l'encastrement de la dent

$$M = F\,h.$$

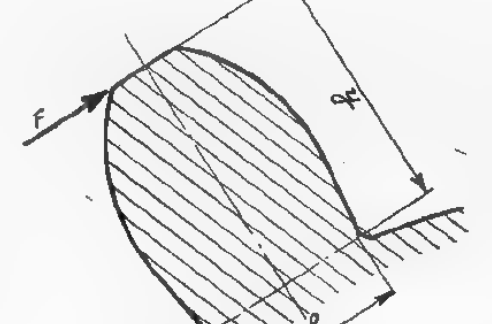


Fig. 38.

L'*effort tangentiel* F se calcule comme suit :

Soient W la puissance à transmettre en ch ; R le rayon primitif (en mm) de l'engrenage étudié et N le nombre de tours par minute. Le couple transmis C est tel que

$$W = C\omega \text{ (chap. II, § 6.23)}$$

d'où

$$C = \frac{75\, W}{2\pi \frac{N}{60}} = 716 \frac{W}{N} \text{ (en kgm)}$$

et

$$F = \frac{C}{R} = 716 \cdot 10^3 \frac{W}{RN} \text{ (en kg).}$$

Si e est l'épaisseur de l'engrenage et l la largeur de la dent à l'encastrement (en mm)

$$\frac{I}{V} = \frac{el^2}{6} \text{ (en mm}^3\text{).}$$

La *contrainte de flexion maximum est donc*

$$n = \frac{M}{\frac{I}{V}} = \frac{Fh}{\frac{el^2}{6}} = 4{,}296 \cdot 10^6 \frac{Wh}{RN\, e\, l^2} \text{ (en kg/mm}^2\text{)}$$

et la *contrainte de cisaillement maximum*

$$t = \frac{3}{2} \frac{F}{e\, l} = 1{,}074 \cdot 10^6 \frac{W}{RN\, e\, l} \text{ (en kg/mm}^2\text{).}$$

10. CAS PARTICULIER DES MATÉRIAUX NE POUVANT TRAVAILLER QU'EN COMPRESSION : NOYAU CENTRAL

Certains matériaux travaillant en *compression et flexion* ne peuvent avoir de *fibre tendue* sans rupture immédiate. C'est le cas des maçonneries (murs, piliers, cheminées, etc...) [1]. On est alors amené à rechercher dans chaque section, la trace de la résultante R des forces appliquées, qui fera coïncider la fibre neutre avec la fibre extrême.

Soit donc une section XX' d'un solide soumis à la force résultante R (voir fig. 39 *a*). Soit $N=R \cos \alpha$ la composante de R parallèle à l'axe longitudinal du solide. Le moment fléchissant dans la section XX' est

$$M=Rd'=Nd.$$

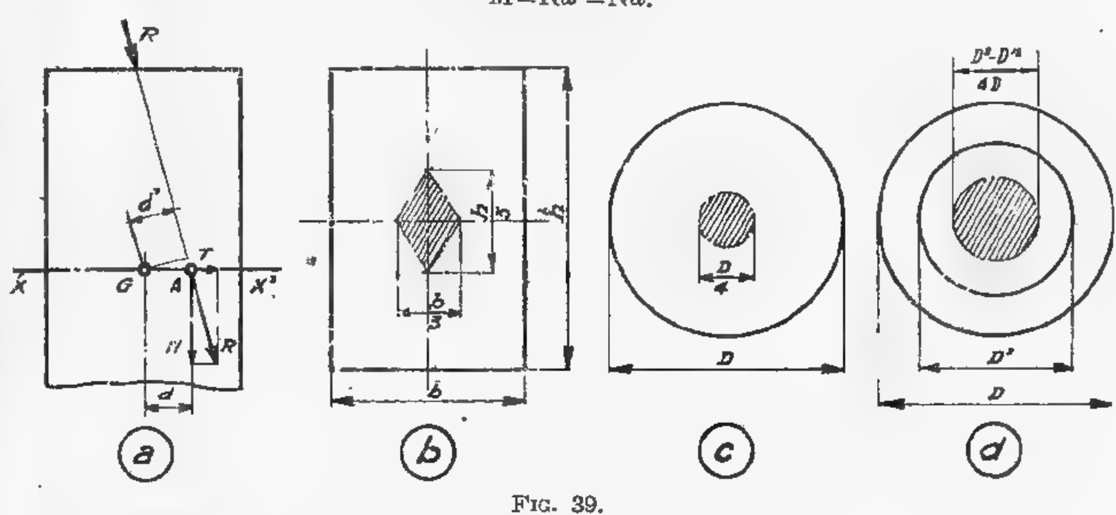


Fig. 39.

En effet

$$N=R \cos \alpha \qquad \text{et} \qquad d=\frac{d'}{\cos \alpha}.$$

La *contrainte de flexion maximum* est donc

$$n_f=\frac{N\ d}{I}\ V.$$

La *contrainte de compression* est d'autre part

$$n_c=\frac{N}{S}.$$

Nous voulons que la contrainte résultante soit nulle, soit

$$n_f - n_c = 0 \qquad \text{(signes contraires).}$$

On en déduit

$$\frac{N\ d}{I}\ V=\frac{N}{S}.$$

d'où

$$d=\frac{I}{SV}.$$

Si on fait varier la direction de la force extérieure on obtient une série de valeurs de d. Le lieu du point A, trace de la force R tel que $GA=d$ est une courbe que l'on appelle *noyau central de la section*.

Si la trace de R coupe la section à *l'intérieur du noyau central* ou sur son contour, toutes les fibres subiront des efforts de même signe, il n'y aura pas de fibre tendue, ce qui correspond à la condition recherchée.

Les figures 39 *b*, *c* et *d* donnent quelques cas particuliers classiques de noyaux centraux pour des figures simples : *rectangles* (noyau en losange), *cercle plein* et *couronne* (noyaux circulaires).

1. — La compression provient du poids propre et la flexion de l'effet du vent.

CHAPITRE X

DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES DES POUTRES FLÉCHIES

0. INTRODUCTION

Il est toujours utile, en résistance des matériaux, de prévoir les déformations des éléments étudiés sous l'action des charges qu'ils auront à supporter [1].

Cette connaissance est particulièrement nécessaire pour les éléments fléchis qui sont souvent susceptibles d'acquérir des déformations importantes dont la considération peut influer sur le dimensionnement même de ces éléments.

Nous ne donnerons qu'un exposé succinct des théories mathématiques en nous limitant au cas des poutres rectilignes.

Nous étudierons ensuite les méthodes pratiques permettant industriellement le calcul de ces déformations, ces méthodes étant essentiellement graphiques.

Nous terminerons, enfin, par un aperçu sur les flèches complémentaires dues au cisaillement qui accompagne généralement la flexion proprement dite.

1. THÉORIE SOMMAIRE DE LA LIGNE ÉLASTIQUE. DÉFORMÉE DES POUTRES RECTILIGNES TRAVAILLANT EN FLEXION PLANE

1.1 DEFINITIONS ET NOTATIONS.

On désigne par *ligne élastique déformée* d'une poutre, la courbe d'équilibre prise par la *fibre moyenne* de cette poutre soumise à un état de déformation élastique.

Pour une poutre initialement rectiligne travaillant en flexion plane, la ligne élastique est donc le lieu des *centres de gravité* de ses diverses sections droites après déformation.

Par définition de la flexion plane, la ligne élastique déformée est entièrement contenue dans le plan de flexion.

Elle sera donc entièrement déterminée par rapport à un système de deux axes rectangulaires Ox et Oy contenus dans ce plan.

1. — Comme nous l'avons déjà indiqué, ces déformations ne sont pratiquement calculables que pendant la *période élastique* des matériaux utilisés et c'est par convention qu'on les étend quelquefois jusqu'à la limite de rupture.

Nous confondrons toujours l'axe Ox avec la fibre moyenne initiale de la poutre (fig. 1).

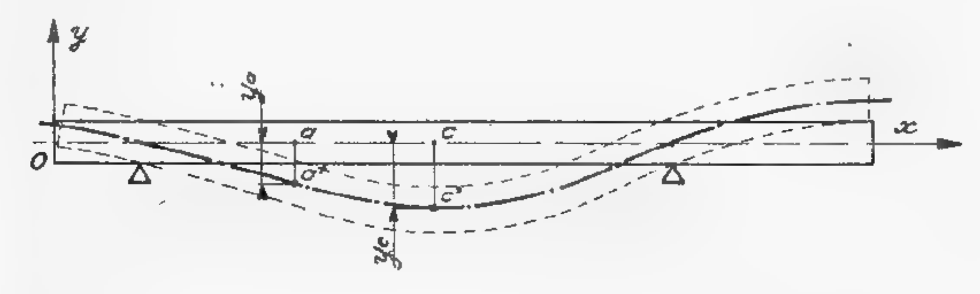


FIG. 1.

Les ordonnées y définiront alors directement les *déplacements, comptés normalement à cette fibre*, des différents points qui la constituent. Ces déplacements sont connus sous le nom de *flèches* de la poutre en ces différents points[1].

Exemple (fig. 1) : Flèche de la poutre en $a = y_a$.
Flèche maximum (en c) $= y_c$.

1.2 RAYON DE COURBURE EN UN POINT.

Nous avons établi au chapitre précédent (§ **3**.3), en isolant un élément Δx de la poutre, que la fibre moyenne prend, sous l'action du moment fléchissant M appliqué à cet élément, une forme courbe dont le *rayon de courbure r* est donné par la relation

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI}.$$

On définit ainsi le rayon de courbure de la ligne élastique déformée en chaque point d'abscisse x de la poutre rectiligne étudiée.

1.3 ANGLE DE DÉFORMATION.

Nous avons vu également que *l'angle élémentaire de rotation* $\Delta\alpha$ formé par les sections délimitant l'élément Δx était relié à r par l'expression

$$\Delta x = r\Delta\alpha = \frac{EI}{M}\Delta\alpha.$$

On en déduit

$$\Delta\alpha = \frac{M}{EI}\Delta x.$$

L'angle de rotation relatif de deux sections a et b (fig. 2) est donc donné *par la somme* des $\Delta\alpha$ relatifs à tous les éléments Δx compris entre a et b, soit

$$\left(\alpha\right)_a^b = \sum_a^b \frac{M}{EI}\Delta x.$$

L'angle de rotation absolu, c'est-à-dire l'angle formé par la tangente à la ligne élastique déformée avec Ox (fig. 2) est donné dans une section d'abscisse x par

$$\alpha = \sum_0^x \frac{M}{EI}\Delta x + \alpha_0$$

1. — On désigne quelquefois par *flèche d'une poutre*, sans autre spécification, la valeur de la flèche maximum de cette poutre.

soit, avec la notation différentielle

$$\alpha = \int_0^x \frac{M}{EI}\, dx + \alpha_0$$

l'angle α_0 désignant *l'angle de rotation de l'origine des abscisses* qui devient la *constante d'intégration* (valeur de α pour $x=0$).

Règle. — *L'angle de déformation en un point est mesuré par l'intégration première de la fonction* $\frac{M}{EI}$ *de la variable* x [1].

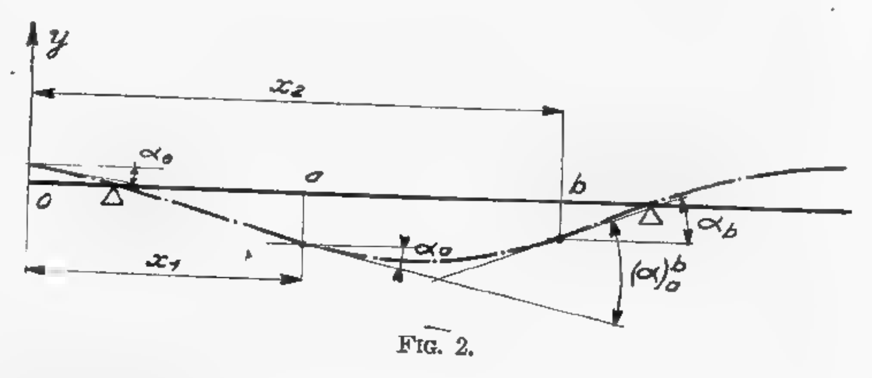


Fig. 2.

1.4 FLECHE EN UN POINT.

L'angle α mesure donc, en chaque point de la poutre, la *pente* de la ligne élastique déformée [courbe $y=f(x)$] par rapport à l'axe des x (fig. 2).

Par conséquent, α est la *dérivée de la fonction y par rapport à x* (ch. I, § 4.1), soit [2] :

$$y' = \alpha$$

soit encore, avec la notation différentielle :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha$$

Or, α s'obtient lui-même en *intégrant* la fonction $\frac{M}{EI}$ de x. Donc, le paramètre $\frac{M}{EI}$ est la *dérivée* par rapport à x de la fonction $\alpha=f(x)$.

Il s'ensuit que *le paramètre* $\frac{M}{EI}$ *est la dérivée seconde de la fonction* $y=f(x)$ *qui exprime l'équation de la ligne élastique*, soit

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

ou

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}\ ;$$

c'est l'équation différentielle de la ligne élastique déformée des poutres droites fléchies.

1. — La valeur de $\frac{M}{EI}$ en chaque section constitue un *paramètre de déformabilité en flexion* de la poutre étudiée. Ce paramètre est de dimension :

$$\frac{FL}{\frac{F}{L^2}\, L^4} = \frac{1}{L} = L^{-1} \text{ (inverse de longueur).}$$

2. — α étant ici exprimé en radians.

RÈGLE. — *La flèche y en un point s'obtiendra donc par double intégration de la fonction* $\frac{M}{EI}$ *de la variable x.*

1.5 CONSTANTES D'INTÉGRATION.

Nous savons que pour opérer une intégration simple il faut connaître une constante d'intégration. Pour l'intégration double donnant y il faut connaître *deux constantes* qui peuvent être : soit *deux points de passage* de la ligne élastique (deux valeurs de y), soit *un point* et *une tangente* (une valeur de y et une de α), soit *deux tangentes* (deux valeurs de α).

Ces constantes sont données par les *conditions particulières* à chaque cas étudié.

Exemples. — *a) Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre.* On a, à l'encastrement, c'est-à-dire pour $x=0$

$y=0$ (flèche nulle) et
$\alpha=y'=0$ (rotation nulle)

(un point et une tangente).

b) Poutre sur deux appuis A ($x=0$) *et* B ($x=$L). La flèche est nulle à chaque appui, soit :

$y=0$ pour $x=0$ et $y=0$ pour $x=L$

(deux points connus).

1.6 APPLICATIONS.

On se sert directement de ces équations dans les *cas simples* c'est-à-dire pour des systèmes de charges simples (moment du 1er ou du 2e degré par exemple) et pour des poutres dont l'inertie est constante ou de variation simple.

Dans le *cas général* de charges quelconques et inertie variable, il est préférable d'opérer selon les méthodes données aux paragraphes suivants.

Les valeurs des flèches données *Planche* 17 sont calculées en utilisant les équations ci-dessus.

Exemple. — *Poutre encastrée à une extrémité et chargée par une force concentrée* F *à l'autre extrémité libre ; caractéristiques* E *et* I *constantes.*

Equation de M (fig. 3) : $M=F(L-x)$.

Angle de déformation en un point :

$$\alpha=\int \frac{F(L-x)}{EI}\,dx=\frac{F}{EI}\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right)+C.$$

En A ($x=0$) on doit avoir $\alpha=0$, d'où

$0+C=0$ et donc $C=0$.

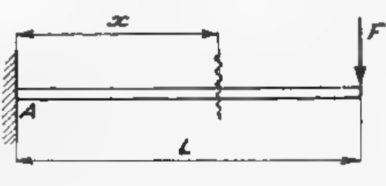


FIG. 3.

Flèche en un point :

$$y=\int \alpha\,dx=\frac{F}{EI}\int\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{F}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)+C'.$$

En A ($x=0$), on doit avoir $y=0$, d'où

$0+C'=0$ et donc $C'=0$.

Valeurs à l'extrémité B ($x=L$) :

Angle de rotation

$$\alpha=\frac{F}{EI}\left(L^2-\frac{L^2}{2}\right)=\frac{FL^2}{2\,EI}\ \text{(en radians).}$$

Flèche (flèche max. de la poutre)

$$y = \frac{F}{EI}\left(\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{6}\right) = \frac{FL^3}{3\,EI}$$ (résultat classique, voir *Planche 17*).

2. CALCUL PRATIQUE DES ANGLES DE DÉFORMATION DES POUTRES FLÉCHIES

2.1 OPÉRATION PRÉLIMINAIRE.

Nous avons vu que l'angle de déformation α s'obtenait par *intégration simple* de la fonction $\frac{M}{EI}$ de x.

On tracera donc, par points, la courbe $\frac{M}{EI}$, c'est-à-dire que l'on calculera cette valeur au niveau de diverses sections où l'on connaît le moment d'inertie I et le moment fléchissant M [1].

2.2 TRACÉ DE LA COURBE α LE LONG DE LA POUTRE.

Si l'on désire connaître la *variation de α tout le long de la poutre,* on opèrera une *intégration graphique* de la courbe $\frac{M}{EI}$ (ch. IV, § **8.**). Il faudra alors connaître la *constante* de départ. Elle est immédiate dans le cas d'une poutre encastrée (où $\alpha=0$ à l'encastrement). Nous la calculerons ci-après dans le cas d'une poutre sur deux appuis (voir § **2.**5).

2.3 CALCUL D'UNE ROTATION RELATIVE.

Si l'on désire connaître seulement la *variation d'angle entre deux sections,* il suffira de *planimétrer l'aire comprise entre l'axe des x et la courbe $\frac{M}{EI}$ dans l'intervalle délimité par ces deux sections* [2].

Echelles. — Supposons que la poutre ait été tracée à l'échelle $1/e$, c'est-à-dire à l'échelle des longueurs : 1 mm$=e$ mm, et la courbe $\frac{M}{EI}$ à l'échelle : 1 mm$=n$ mm^{-1}.

La surface planimétrée sera à l'échelle :

1 mm$^2 = e\,n$ radians

soit 1 mm$^2 = 57{,}3\; e\cdot n$ degrés

Remarque. — On peut se dispenser de tracer et de planimétrer la courbe $\frac{M}{EI}$ en calculant dans un tableau *les produits partiels* $\frac{M}{EI}\,\Delta x$ que l'on additionnera entre les limites fixées. Voir application ci-dessous.

---

1. — Quand le module d'élasticité E est constant le long de la poutre (ce qui est le cas le plus fréquent) il suffit alors de calculer et de tracer la courbe $\frac{M}{I}$. Tenir compte, dans ce cas, du facteur $\frac{1}{E}$ dans le résultat final.

2. — Les valeurs de $\frac{M}{EI}$ sont liées directement au signe de M. La courbe $\frac{M}{EI}$ peut donc avoir des parties *positives* et *négatives*. Affecter alors de *signes différents* les surfaces situées au-dessus et au-dessous de l'axe des x.

2.4 APPLICATION A UNE POUTRE DROITE ENCASTREE (fig. 4).

2.41 Données. — Soit une poutre encastrée en Duralumin AU4G (E= 7000 kg/mm²).

La figure 4 *a* représente le schéma de la poutre à l'échelle 1/10, soit

$$1 \text{ mm} = e = 10 \text{ mm}.$$

La courbe de variation de M est déterminée par la statique graphique. On obtient une échelle des moments telle que

$$1 \text{ mm} - 1 \text{ mkg} = 1000 \text{ mmkg}.$$

La variation du moment d'inertie de flexion I est figurée à l'échelle :

$$1 \text{ mm} = 1 \text{ cm}^4 = 10^4 \text{ mm}^4.$$

On en déduit, par points, la courbe $\frac{M}{I}$ qui est tracée figure 4 *b* à l'échelle [1] : $1 \text{ mm} - n - 0{,}01 \text{ kg/mm}^3 = 10^{-2} \text{ kg mm}^{-3}$.

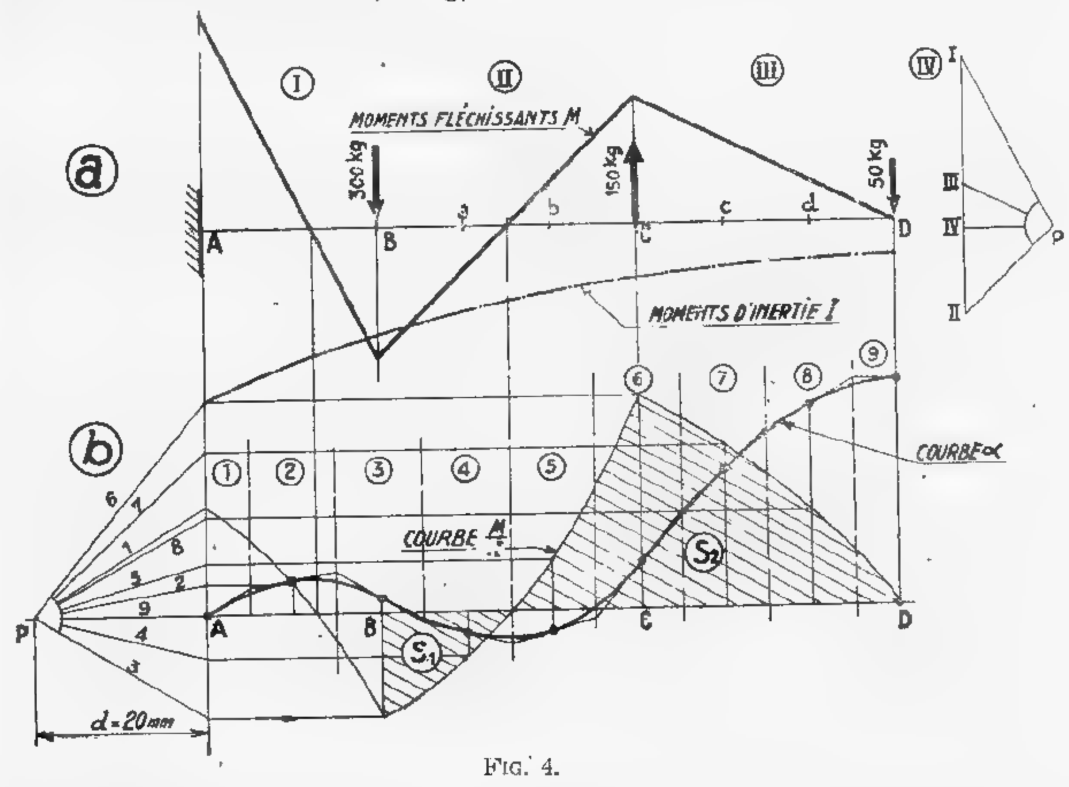


FIG. 4.

2.42 Tracé de la courbe α. — Ce tracé est opéré figure **4** *b* selon la méthode d'intégration graphique, exposée au chapitre IV, paragraphe **8.** [2]

Distance polaire $d = 20$ mm.

D'où échelle des angles de déformation (compte tenu de E)

$$1 \text{ mm} = \frac{1}{E}\, e\, n\, d = \frac{1}{7000}\, 10 \cdot 10^{-2} \cdot 20 = 2{,}86 \cdot 10^{-4} \text{ radian}$$

soit

$$1 \text{ mm} = 57{,}3 \cdot 2{,}86 \cdot 10^{-4} = 0{,}0164 \text{ degré}.$$

On trouve, par exemple, à l'extrémité D où l'ordonnée de la courbe α est de 26,5 mm

$$\alpha_D = 26{,}5 \cdot 0{,}0164 = 0{,}435 \text{ degré}.$$

1. — $\frac{M}{I}$ est de dimension $\frac{FL}{L^4} = FL^{-3}$.

2. — Remarquer la position des points de tangence de la courbe au polygone funiculaire (limites des intervalles servant à tracer la figure polaire de gauche).

2.43 Rotation relative de B et D.

2.431 *Lecture sur la courbe* α (fig. 4 *b*)

$$\alpha_D - \alpha_B = 26{,}5 - 1{,}6 = 24{,}9 \text{ mm}$$
$$= 24{,}9 \cdot 0{,}0164 = 0{,}409 \text{ degré.}$$

2.432 *Planimétrage des surfaces.* — Les surfaces S_1 et S_2 hachurées mesurent :

$S_1 = -105$ mm² ; $S_2 = 605$ mm² soit $S_1 + S_2 = 500$ mm².

Echelle des surfaces

$$1 \text{ mm}^2 = \frac{e\,n}{E} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{7000} = 1{,}43 \cdot 10^{-5} \text{ radian}$$

soit $$1 \text{ mm}^2 = 1{,}43 \cdot 57{,}3 \cdot 10^{-5} = 0{,}82 \cdot 10^{-3} \text{ degré}$$

d'où $$\alpha_D - \alpha_B = 500 \cdot 0{,}82 \cdot 10^{-3} = 0{,}5 \quad 0{,}82 = 0{,}410 \text{ degré.}$$

2.433 *Calcul numérique direct.* — Divisons BD en six intervalles égaux de longueur $\Delta x = 100$ mm (fig. 4 *a*). Evaluons les moments fléchissants M et les inerties I au milieu de chaque intervalle et disposons les calculs dans le tableau ci-dessous

INTERVALLES	M mkg	I cm⁴	$\frac{M}{I}$ kgmm⁻³
B *a*	— 10	11	— 0,091
a b	0	8,7	0
b C	10	7,0	0,143
C *c*	12,5	5,6	0,223
c d	7,5	4,6	0,163
d D	2,5	4,2	0,060
			Σ=0,498

On a donc

$$\sum \frac{M}{I} \Delta x = 0{,}498 \cdot 100 = 49{,}8 \text{ kg/mm}^2$$

d'où la rotation cherchée en degrés

$$\alpha_D - \alpha_B = \frac{57{,}3}{7000} \sum \frac{M}{I} \Delta x = \frac{57{,}3 \cdot 49{,}8}{7000} = 0{,}408 \text{ degré.}$$

2.5 CAS PARTICULIER DES POUTRES SUR APPUIS.

Soit (fig. 5 *a*) une poutre rectiligne sur deux appuis A et B pour laquelle on a déterminé la courbe de variation [1] de $\frac{M}{EI}$. Pour obtenir en chaque point la valeur de α, il faudrait connaître au moins un point de passage de cette courbe (constante d'intégration). Or, on ne connaît *à priori* la rotation en aucun point (contrairement à une poutre encastrée).

Le planimétrage de l'aire S limitée par la courbe $\frac{M}{EI}$ entre A et B don-

1. — Dans le cas de E constant la courbe $\frac{M}{EI}$ suffit ainsi que nous l'avons déjà vu.

nerait la *rotation relative* de la poutre entre ces deux appuis et non la *rotation absolue* au niveau de chaçun d'eux.

Pour déterminer ces rotations absolues une méthode simple consiste à considérer la courbe $\frac{M}{EI}$ comme la *courbe représentative d'une charge répartie* appliquée tout le long de la poutre (c'est-à-dire comme une *ligne de charge fictive*).

Les réactions d'appui R_A *et* R_B *correspondantes représentent alors respectivement les rotations absolues de la poutre au niveau de chacun de ces appuis* [1].

On peut alors opérer le calcul de α par la méthode habituelle.

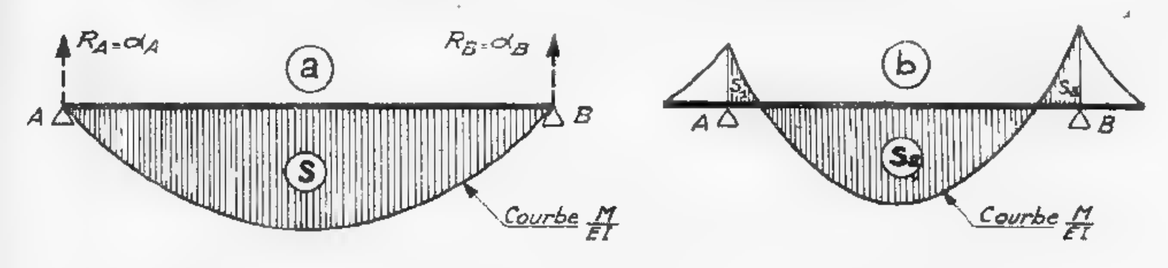


FIG 5.

Remarque. — Dans le cas d'une poutre avec porte-à-faux (fig. 5 *b*) n'envisager, pour le calcul de R_A et R_B que la partie de la courbe $\frac{M}{EI}$ *comprise entre les appuis* (c'est-à-dire les aires hachurées S_1, S_2 et S_3 dont la somme algébrique représente la rotation relative de la poutre entre A et B).

2.6 EXTENSION AUX POUTRES COURBES ISOSTATIQUES.

On peut, avec une approximation suffisante, appliquer les procédés de calcul ci-dessus aux *poutres en arc* dont le rayon de courbure est important vis-à-vis de la hauteur (ch. IX, § **4.53**). Opérer alors les tracés sur la *fibre moyenne développée* de l'arc étudié.

3. CONSTRUCTION GRAPHIQUE DE LA LIGNE ÉLASTIQUE. DÉFORMÉE DES POUTRES RECTILIGNES ISOSTATIQUES

3.1 PRINCIPE.

Les constructions graphiques ci-après utilisent la propriété établie au paragraphe **1.4**, soit

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

c'est-à-dire que *la déformée s'obtient en intégrant deux fois la courbe* $\frac{M}{EI}$ *le long de la poutre.*

Considérons cette courbe $\frac{M}{EI}$ tout le long de la poutre étudiée et suppo-

---

1. — La démonstration de cette règle se fait en utilisant l'équation de la déformée. Une notion simple en est fournie en se rappelant que l'effort tranchant dû à une charge répartie est donné par intégration de cette charge $\left(\text{de même que } \alpha \text{ vis-à-vis de } \frac{M}{EI}\right)$ Les réactions R_A et R_B mesurent cet effort tranchant en A et B.

sons qu'elle représente la variation d'une *charge répartie fictive* [1] appliquée à la poutre dont l'*ordonnée* en chaque point est donc

$$p = \frac{M}{EI}.$$

En une section quelconque l'effort tranchant a pour valeur

$$T = \Sigma p \Delta x$$

(somme des charges situées d'un même côté de la section).

Il s'obtient donc par intégration graphique de la courbe p.

Le moment fléchissant est

$$M = \Sigma\ T\ \Delta x.$$

Il s'obtient par intégration graphique de la courbe T, donc finalement par double intégration graphique de la courbe p.

Conclusion : *La courbe des moments fléchissants dus à la charge répartie fictive p figure, à une échelle près, la fibre moyenne déformée.*

3.2 POUTRES HOMOGÈNES D'INERTIE CONSTANTE.

Le produit EI étant constant, il suffit de considérer la courbe du moment M (au lieu de M/EI) comme la variation d'une charge répartie et de tenir compte dans l'échelle du facteur 1/EI.

3.21 **Poutre sur deux appuis sans porte-à-faux.** — La figure 6 représente la construction de la fibre moyenne déformée d'une *poutre sur deux appuis* AB chargée par les forces F_1, F_2, F_3 et F_4.

Nous avons effectué les opérations suivantes

3.211 *Construction graphique de la courbe des moments fléchissants M.* — Cette construction est opérée par la *statique graphique* (ch. IV, § **6.2**).

Echelles : { échelles des longueurs 1 mm = e mm, échelle des forces 1 mm = n kg, distance polaire d mm.

Donc 1 mm de vecteur moment = $e \cdot n \cdot d$ mmkg.

3.212 *Division de la surface des moments en petits éléments.* — On limite généralement ces éléments aux lignes d'action des forces appliquées et des réactions. On a ainsi une série de triangles et de trapèzes dont on détermine les centres de gravité et dont on calcule les surfaces : S_1, S_2, S_3...

3.213 *Application aux différents centres de gravité des surfaces élémentaires de forces fictives proportionnelles à ces surfaces.* — On donne à ces forces le signe des moments dans l'aire considérée (le moment change de signe selon qu'il est d'un côté ou de l'autre de la ligne de fermeture).

Echelle : Forces fictives 1 mm = s mm² de la surface des moments.

Or, 1 mm² de surface = 1 mm de vecteur moment × 1 mm de longueur à l'échelle du tracé :

$$1\ \text{mm}^2 = e\ n\ d \cdot e.$$

Donc l'échelle des forces fictives est

$$1\ \text{mm} = e^2\ n\ d\ s\ \text{mm}^2\text{kg}.$$

---

1. — La courbe $\frac{M}{EI}$ devient donc une *ligne de charge fictive* (chap. IV, § 6.41).

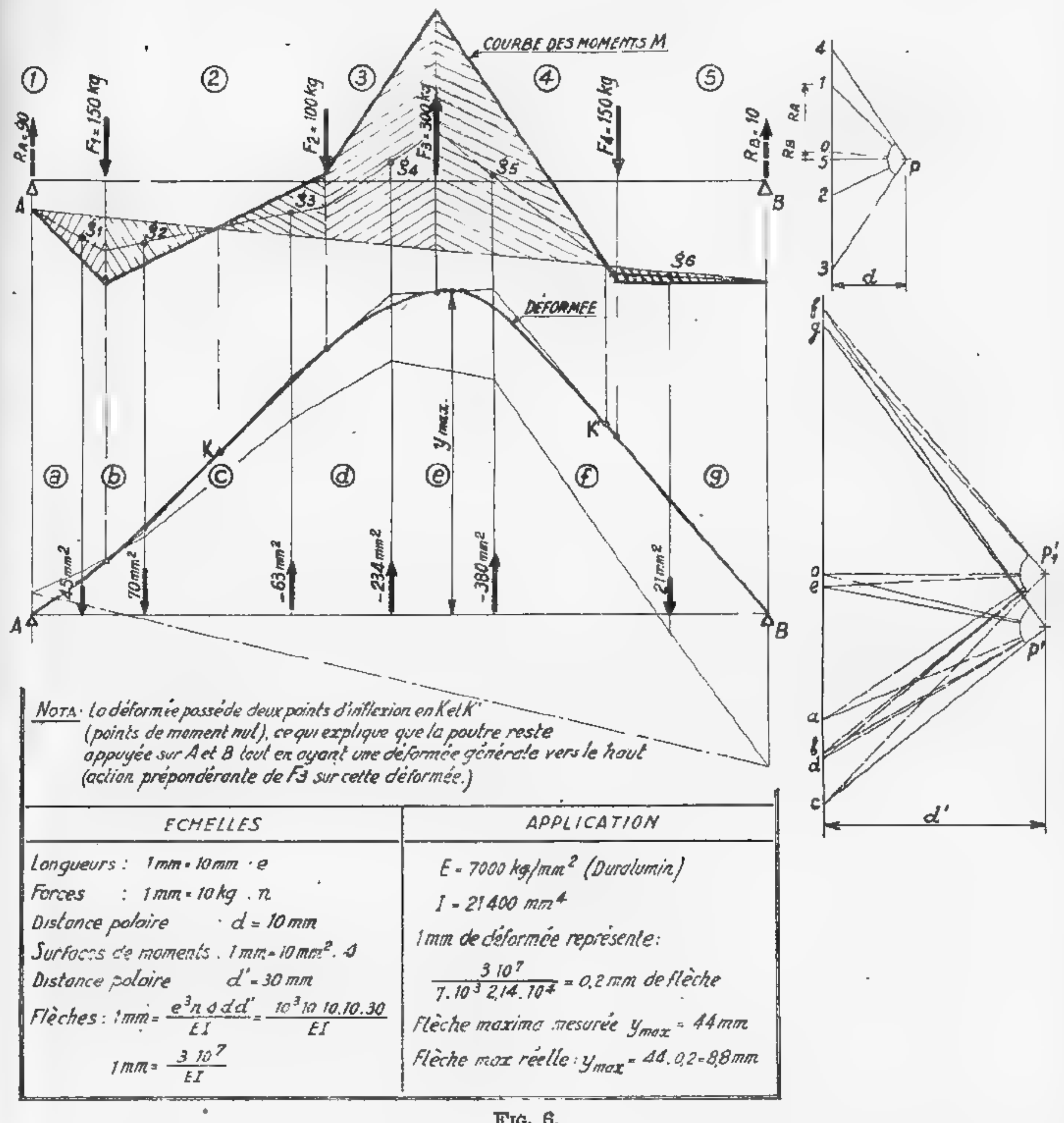


FIG. 6.

3.214 *Construction d'un dynamique et d'un funiculaire de ces forces fictives.* — On utilise une distance polaire d'. Le funiculaire est le diagramme des moments des charges réparties fictives représentées par la courbe M.

3.215 *Redressement du polygone funiculaire.* — En utilisant un pôle P'_1, on obtient le polygone funiculaire redressé sur l'axe de la poutre.

3.216 *Construction d'une courbe funiculaire.* — Comme nous l'avons vu au chapitre IV, cette courbe est tangente au polygone funiculaire à chaque limite d'intervalle, c'est-à-dire au niveau des forces appliquées.

Cette courbe figure, à une échelle près, la ligne élastique déformée de la poutre.

Echelle : L'échelle des *flèches* est égale au quotient par EI de l'échelle des moments des forces fictives, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{\mathrm{EI}} \text{ (échelle des forces fictives) } (e\ d').$$

Donc : 1 mm d'ordonnée du diagramme $= \dfrac{e^2\ nd\ s \times e\ d'}{\mathrm{EI}}$

$$= \frac{e^3\ n\ s\ d\ d'}{\mathrm{EI}} \text{ mm de flèche.}$$

Voir application numérique, figure 6, et remarquer l'allure particulière de la déformée dans le cas de charges considéré.

3.22 Poutre sur deux appuis avec porte-à-faux. — La figure 7 représente la construction de la fibre moyenne déformée d'une *poutre sur deux*

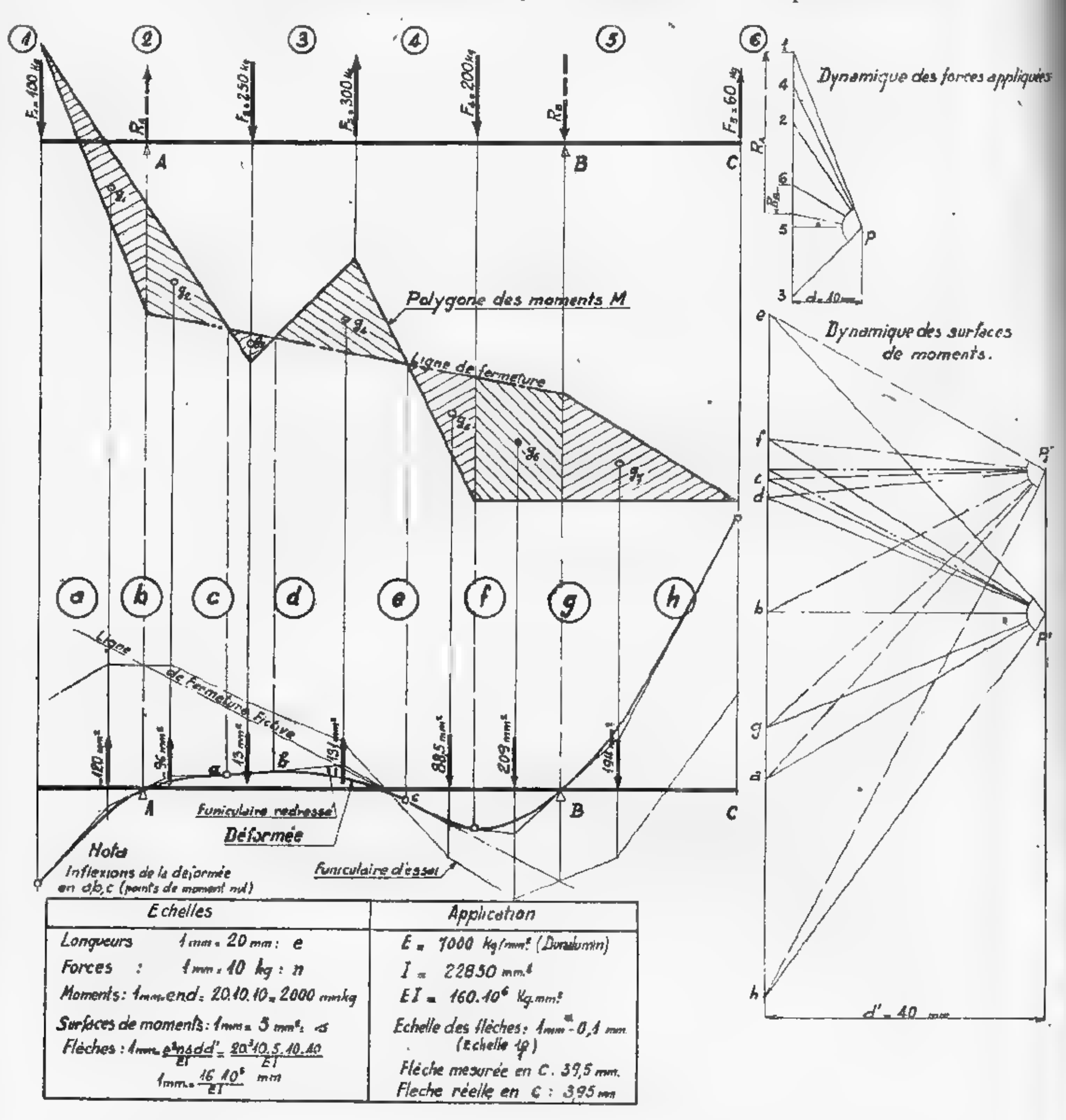


Fig. 7.

appuis A *et* B *avec deux porte-à-faux* chargée par les forces F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, les forces F_1 et F_5 étant appliquées en porte-à-faux.

Le mode opératoire est le même que celui exposé ci-dessus. On trouve ici un diagramme de moments M limité entre appuis par la ligne de fermeture et sur les porte-à-faux par les côtés extrêmes du funiculaire.

On détermine, comme précédemment, *les forces fictives* égales aux différentes surfaces élémentaires de moments et on trace le funiculaire de ces forces. Pour obtenir la déformée, il faut faire passer ce funiculaire par les points d'appuis A et B (*flèches nulles aux appuis*). La méthode pratique est de considérer une *ligne de fermeture fictive* et de redresser le funiculaire en la faisant coïncider avec la fibre moyenne de la poutre et d'opérer à partir de cette ligne selon la méthode habituelle.

On trace enfin une courbe tangente au funiculaire redressé qui figure, à l'échelle près, la fibre moyenne déformée de la poutre qui possède ici trois points d'inflexion (M nul) et trois points de flèche nulle. Voir échelles et application sur la figure.

3.3 POUTRES HOMOGÈNES D'INERTIE VARIABLE.

3.31 Méthode des distances polaires multiples (fig. 8). — Cette méthode graphique s'applique surtout aux poutres dont l'*inertie varie brusquement.*

a) On construit le diagramme des moments comme pour une poutre à inertie constante.

b) On divise la surface des moments en éléments limités aux lignes d'action des forces et aux sections de changement d'inertie, et on applique à la poutre des forces fictives proportionnelles à ces surfaces.

c) On construit le funiculaire de ces forces fictives avec des *distances polaires variables, proportionnelles aux inerties.*

En effet, dans l'échelle des flèches, la distance polaire d' est au numérateur, l'inertie I au dénominateur. Nous prendrons donc une distance polaire proportionnelle à l'inertie

$$d' = k\ \mathrm{I}$$

k étant une constante.

Le diagramme deviendra ainsi indépendant de l'inertie variable de la poutre, ainsi que l'échelle des flèches qui devient

$$1\ \text{mm} = \frac{e^3\ n\ s\ d\ k}{\mathrm{E}}\ \text{mm de flèche.}$$

Mode opératoire. — On prend une première distance polaire proportionnelle à la plus grande inertie : $d'_1 = k\ \mathrm{I}_1$ et on trace les rayons vecteurs des forces fictives qui s'appliquent sur la portion de la poutre d'inertie I_1, soit $\mathrm{P}_1\ e$, $\mathrm{P}_1\ f$ et $\mathrm{P}_1\ g$.

Sur $\mathrm{P}_1\ e$ on prend un pôle P_2 à la distance $d'_2 = k\ \mathrm{I}_2$ et on trace les rayons $\mathrm{P}_2\ d$ et $\mathrm{P}_2\ c$. Les deux pôles P_1 et P_2 se trouvent bien sur le même rayon $\mathrm{P}_1\ e$ puisque l'intervalle (e) s'étend sur les deux inerties I_1 et I_2.

On détermine de même les pôles P_3, P_4 et P_5.

On construit le funiculaire suivant la méthode habituelle et on le redresse de façon qu'il passe par les points A et B (flèche nulle aux appuis).

A l'échelle près, on a la déformée de la poutre (voir figure).

3.32 Méthode de la courbe $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}$. — *Quand l'inertie varie progressivement* le long de la poutre, il est plus exact et plus simple en même temps de *tracer par points la courbe* $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}$ surtout si la charge appliquée est *répartie.*

On opère, à partir de cette courbe, comme pour une poutre à inertie constante dont on a construit le diagramme des moments, c'est-à-dire que l'on détermine la *courbe des moments* dus à une *charge répartie fictive* repré-

sentée par la courbe $\frac{M}{EI}$. L'échelle des flèches est égale à celle de ces moments fictifs.

Voir *application numérique* au paragraphe **6.** ci-après.

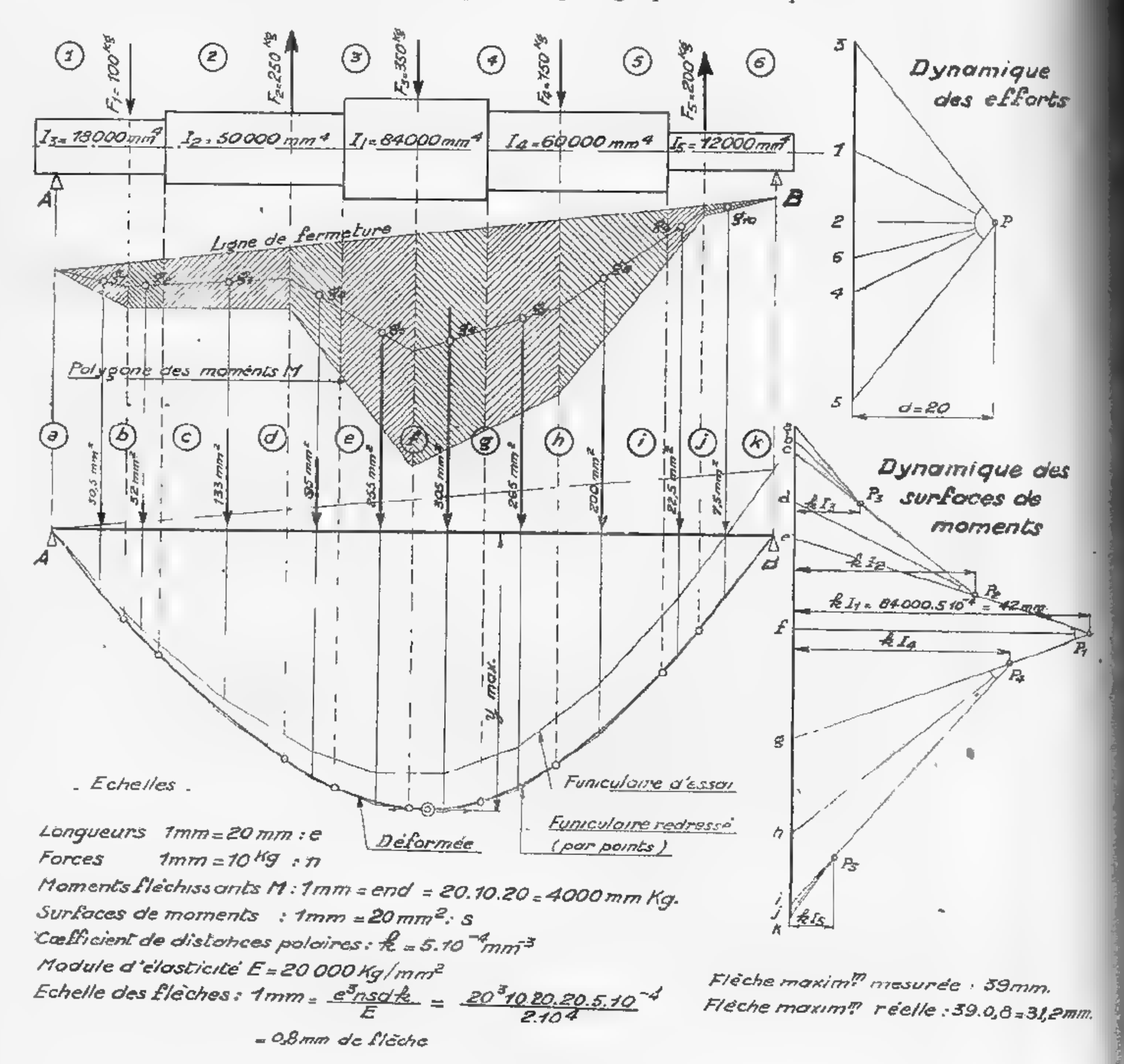


Fig. 8.

4. DÉTERMINATION DE LA FLÈCHE EN UN POINT DONNÉ D'UNE POUTRE FLÉCHIE

4.0 GÉNÉRALITÉS.

Les méthodes graphiques que nous venons d'exposer permettent de construire *l'image complète* de la déformée des poutres droites et, par conséquent, de connaître leurs *flèches* en tous points.

Mais il est souvent suffisant de connaître le *déplacement d'un point donné* de la poutre étudiée, ce déplacement étant lui-même évalué *suivant une direction donnée*.

La méthode que nous exposons ci-après permet d'obtenir rapidement et avec une très bonne précision ce résultat.

C'est, de plus, une *méthode générale* qui s'applique à tous les systèmes fléchis : isostatiques ou hyperstatiques, rectilignes ou courbes [1].

Nous l'admettrons présentement sans démonstration générale, mais celle-ci sera donnée ultérieurement au chapitre XVIII (lors de l'étude des systèmes hyperstatiques) en utilisant la méthode de dérivation du potentiel élastique interne. Nous nous contenterons simplement ici de vérifier l'exactitude de la méthode dans un cas particulier simple [2]. Cette méthode est parfois désignée sous le nom « *méthode du travail élastique virtuel* ».

4.1 EXPOSE DE LA MÉTHODE.

Soit une poutre quelconque AB chargée par un certain système de charges extérieures donnant lieu à la courbe de moments fléchissants M représentée [3] figure 9 *a*. Nous nous proposons de calculer le déplacement d'un point quelconque C de cette poutre suivant la direction arbitraire XX' ; c'est-à-dire, d'une façon plus précise, *la projection, sur cette direction, du déplacement élastique de flexion du point* C.

Appliquons au point C une *force auxiliaire fictive* φ *dirigée suivant* XX' *et d'intensité égale à l'unité de force* (φ=1 kg par exemple).

Déterminons le *moment fléchissant m agissant sur la poutre sous l'action isolée de la force* φ. La figure 9 *b* représente la variation de ce moment.

Le *déplacement cherché d* est donné par l'expression [4]

$$d = \sum \frac{Mm}{EI} \Delta l.$$

La somme figurée par le second membre de cette expression s'étend *tout le long de la poutre* dont Δl figure l'élément de longueur de la fibre moyenne.

Elle représente *l'intégration* le long de cette poutre de la fonction $\frac{Mm}{EI}$ de la variable l.

Elle est donc mesurée par l'*aire* délimitée par la courbe $\frac{Mm}{EI}$ et la poutre étudiée (voir fig. 9 *c*) [5].

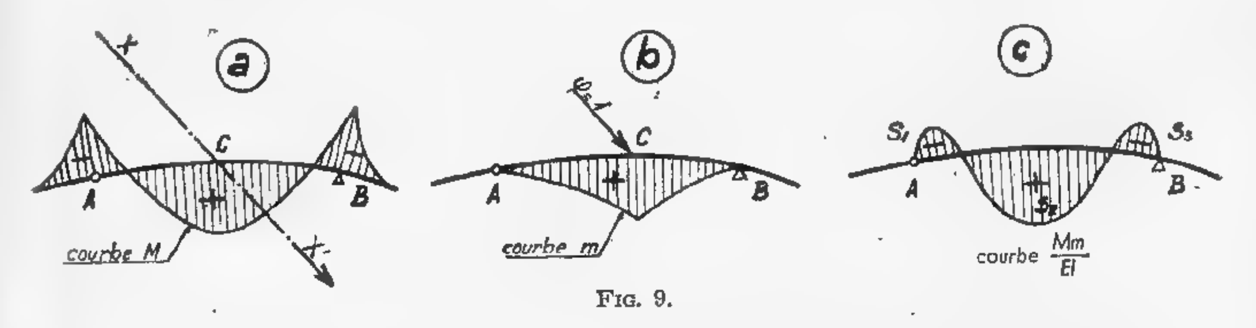


FIG. 9.

1. — Pour les poutres courbes, le résultat est valable tant que la *répartition linéaire des contraintes* le long des sections est elle-même acceptable (chap. IX, § 4.53).

2. — Il existe une méthode géométrique de démonstration applicable aux poutres droites.

3. — Cette représentation est faite par rapport à l'axe de la poutre. Il est en réalité plus pratique pour les poutres en arc de considérer le *développement* linéaire de leurs axes.

4. — Remarquer l'analogie de cette expression avec celle déterminée au chapitre VII, § 6.22, lors de l'étude des déplacements élastiques des nœuds des systèmes triangulés.

5. — Cette aire comprend la *somme algébrique* des surfaces hachurées figure 9 *c*, c'est-à-dire, dans le cas de cette figure : $d = S_2 - S_1 - S_3$ (à l'échelle correspondante).

4.2 REMARQUES IMPORTANTES.

4.21 Il y a lieu, en réalité, de ne voir dans la force auxiliaire unitaire φ qu'un *paramètre sans dimension* qu'il est commode d'assimiler physiquement à l'unité de force.

En effet, *l'équation aux dimensions* de l'expression ci-dessus s'écrit :

$$L = \frac{FL \cdot m}{\frac{F}{L^2} L^4} L \quad \text{soit} \quad L = m.$$

Le moment m est donc, en réalité, de dimension *longueur*, ce qui n'est possible que si φ est un paramètre sans dimension, c'est-à-dire un *vecteur dirigé* d'intensité égale à 1.

Ceci explique le manque d'homogénéité apparent de la formule.

4.22 *Le déplacement d est orienté suivant le sens de la force fictive* $\varphi = 1$, c'est-à-dire suivant le sens XX′ dans le cas de la figure 9.

Si le résultat trouvé est *négatif*, c'est que le déplacement de C a lieu en *sens inverse de* φ, c'est-à-dire dans le sens X′X.

4.23 Si l'on envisage, en un point C quelconque, *deux directions* XX′ *différentes* (directions perpendiculaires par exemple), l'on obtiendra deux valeurs de d représentant les *coordonnées du point* C *après déformation* par rapport à ces directions. On obtient donc, par la méthode ci-dessus, le *déplacement complet* des points étudiés, ce que les méthodes précédentes ne permettaient pas de définir.

4.24 Dans le cas d'une *poutre avec porte-à-faux* dont on évalue le déplacement d'un point entre appuis (fig. 9 par exemple), le moment m et donc $\frac{Mm}{EI}$ est nul sur les porte-à-faux. L'intégration se limite donc pratiquement entre les appuis A et B.

MODE OPÉRATOIRE PRATIQUE (fig. 10).

On calcule, au niveau de diverses sections droites : 1, 2, 3, de la poutre étudiée, le moment M dû aux *forces extérieures*, le paramètre-moment m dû à $\varphi = 1$ et la *constante de rigidité* EI. On dresse un tableau de ces valeurs, selon le modèle de la figure 10, on y inscrit les grandeurs correspondantes du paramètre [1] $\frac{Mm}{EI}$.

On peut alors :

a) Soit *tracer la courbe correspondante* (se limiter alors à la colonne n° 5 du tableau figure 10) et *planimétrer* cette courbe [2].

Echelles { Longueurs : 1 mm $= e$ mm,
courbe $\frac{Mm}{EI}$: 1 mm $= n$,
déplacements : 1 mm² de surface planimétrée $= e\ n$ mm.

b) Soit calculer la *valeur moyenne* de $\frac{Mm}{EI}$ dans chaque intervalle

1. — Le terme $\frac{Mm}{EI}$ est un paramètre sans dimension, puisque m est en réalité une longueur. Dans le cas, le plus fréquent, où la poutre étudiée est homogène (E constant), il suffit de calculer $\frac{Mm}{I}$ et diviser globalement le résultat par E; le terme $\frac{Mm}{I}$ est alors de dimension FL^{-2} (kg/mm² par exemple).

2. — En opérant toujours pour les poutres courbes sur un diagramme développé de la fibre moyenne.

(colonne 6). On inscrit (colonne 7) les longueurs Δl de ces intervalles et l'on forme (colonne 8) les produits partiels $\frac{Mm}{EI}\Delta l$.

La *somme* algébrique des termes de cette dernière colonne donne directement le résultat cherché.

TABLEAU DE CALCUL TYPE							
Sections N°	M	m	EI	$\frac{Mm}{EI}$	$\frac{Mm}{EI}$ moyen	Δl	$\frac{Mm}{EI}\Delta l$
1							
2							
3							
4							
							$\Sigma = d$
1	2	3	4	5	6	7	8

Fig. 10.

4.4 SIMPLIFICATION RELATIVE AUX POUTRES HOMOGÈNES A INERTIE CONSTANTE.

Le produit EI est alors *constant* le long de la poutre ce qui permet de le faire sortir du signe Σ. L'expression du déplacement devient

$$d = \frac{1}{EI}\sum Mm\,\Delta l.$$

Il suffit de planimétrer la courbe figurative de Mm (colonne 5) ou encore d'effectuer la somme des produits partiels $Mm\,\Delta l$ (colonne 8). La division par EI s'effectue sur le résultat global.

4.5 VERIFICATION DE LA MÉTHODE DANS UN CAS PARTICULIER SIMPLE.

Plaçons-nous dans le cas d'une *poutre-console rectiligne d'inertie constante soumise à une charge répartie constante p par unité de longueur* (fig. 11). Nous nous proposons de calculer la *flèche à l'extrémité libre* B de cette poutre.

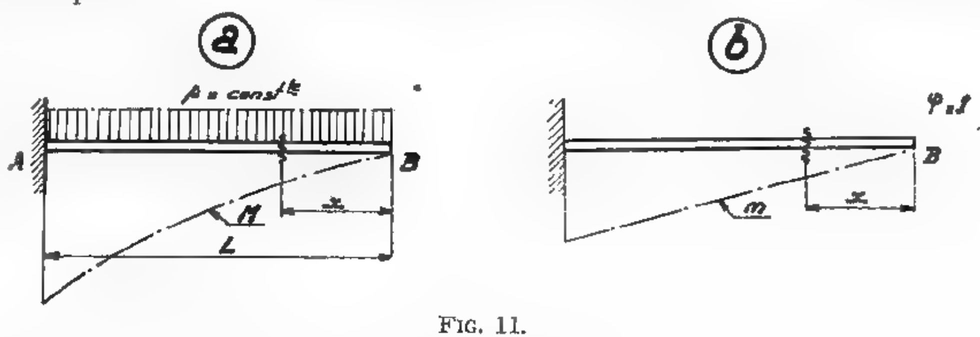


Fig. 11.

Dans une section d'abscisse x, on a (fig. 11 a)

$$M = p\,x\,\frac{x}{2} = p\,\frac{x^2}{2} \quad \text{(variation parabolique de M).}$$

Appliquons $\varphi=1$ en B ; on a dans la même section courante :

$$m=\varphi x=x$$

donc

$$\mathrm{M}m=p\,\frac{x^3}{2}$$

d'où la flèche en B

$$d=y=\frac{1}{\mathrm{EI}}\int_0^{\mathrm{L}} p\,\frac{x^3}{2}\,dx=\frac{p}{2\ \mathrm{EI}}\int_0^{\mathrm{L}} x^3\,dx=\frac{p}{2\ \mathrm{EI}}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{\mathrm{L}}=\frac{p}{2\ \mathrm{EI}}\,\frac{\mathrm{L}^4}{4}$$

soit

$$y=\frac{p\ \mathrm{L}^4}{8\ \mathrm{EI}}$$: résultat classique (*Planche 17*).

Il est à remarquer que d'une façon générale la méthode du travail virtuel conduit à des démonstrations algébriques très élégantes.

4.6 CAS PARTICULIER DES POUTRES CHARGÉES PAR UNE FORCE CONCENTRÉE UNIQUE.

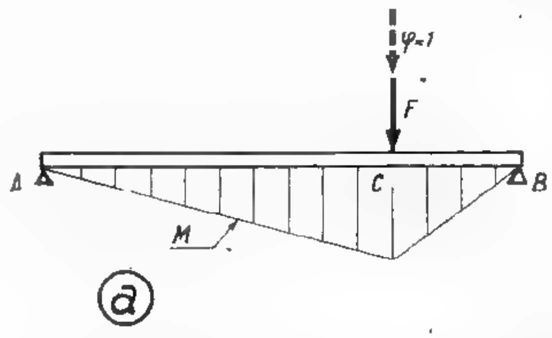
Considérons, par exemple, une poutre sur deux appuis A et B chargée en C par la force F (fig. 12 *a*). Nous nous proposons de déterminer sa *flèche au point d'application* C *de cette charge unique*.

En appliquant $\varphi=1$ en C dans le sens de F, on obtiendra évidemment un moment m dont la valeur sera en tout point F fois inférieure à celle du moment M dû à F, soit

$$m=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{F}}.$$

L'expression générale se simplifie donc en

$$y=\frac{1}{\mathrm{F}}\sum\frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{EI}}\,\Delta l.$$



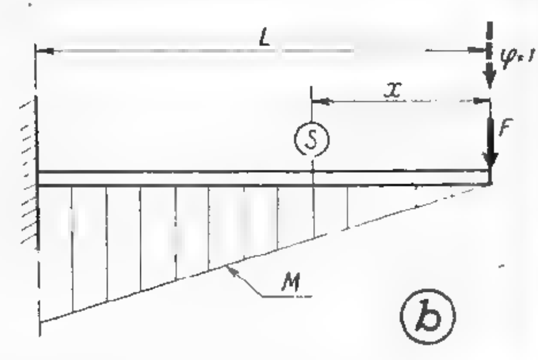


FIG. 12.

Remarque. — On peut aisément établir cette formule en utilisant simplement la notion de *travail*.

Le travail de F dans son déplacement est (travail élastique)

$$\mathscr{E}_1=\frac{1}{2}\ \mathrm{F}y.$$

Or, le travail intérieur de flexion a pour expression (ch. IX, § 3.4)

$$\mathscr{E}_2=\sum\frac{\mathrm{M}^2}{2\ \mathrm{EI}}\,\Delta l.$$

La poutre étant en *équilibre*, les travaux extérieur et intérieur sont égaux ; d'où

$$\frac{1}{2}\ \mathrm{F}y=\sum\frac{\mathrm{M}^2}{2\ \mathrm{EI}}\,\Delta l$$

soit

$$y = \frac{1}{F} \sum \frac{M^2}{EI} \Delta l.$$

Exemple (fig. 12 *b*). — Poutre console d'inertie constante chargée par F en bout.

On a évidemment dans une section d'abscisse x

$$M = Fx$$

d'où l'expression directe de la flèche à l'extrémité

$$y = \frac{1}{F} \int_0^L \frac{F^2 x^2}{EI} \, dx$$

$$y = \frac{FL^3}{3\,EI}$$: résultat classique (*Planche 17*).

4.7 CAS PARTICULIER DES POUTRES D'EGALE RESISTANCE EN FLEXION.

4.71 Définition. — Nous rappelons qu'une poutre est dite d'*égale résistance* quand toutes ses sections subissent la même contrainte qui est ici la *contrainte normale maximum de flexion* .

$$n = \frac{M}{I} V = constante$$ [1].

4.72 Expression de la flèche en un point. — L'expression générale $d = y = \sum \frac{Mm}{EI} \Delta l$ peut se transformer. En effet

$$M = \frac{n\,I}{V}$$

d'où

$$y = \sum \frac{n}{V} \frac{I}{E} \frac{m}{I} \Delta l$$

soit [2]

$$\boxed{y = \frac{n}{E} \sum \frac{m}{V} \Delta l.}$$

Conclusion. — L'examen de cette expression montre *qu'il n'est plus nécessaire de connaître le moment fléchissant appliqué* M *ni le moment d'inertie* I *pour calculer la flèche d'une poutre quelconque d'égale résistance dont on connaît la contrainte* (constante) *de flexion.*

4.73 Application : Prédétermination de la rigidité de flexion d'une aile d'avion. — Connaissant simplement les *caractéristiques de forme extérieure* et le *métal utilisé* pour construire l'ossature résistante d'une aile d'avion, il est possible, à priori, d'évaluer sa rigidité en flexion en escomptant simplement que le dimensionnement de cette ossature sera effectué rationnellement, c'est-à-dire que l'on obtiendra une *poutre d'égale résistance en flexion* [3].

1. — Ce résultat est à priori recherché en construction aéronautique afin d'obtenir le *poids minimum* de la structure.

2. — Cette expression suppose E constant le long de la poutre, ce qui est le cas le plus fréquent.

3. — En réalité, la contrainte réelle ira généralement en diminuant vers l'extrémité, ce qui est dû le plus souvent à des considérations d'épaisseurs minima réalisables ou encore à un accroissement volontaire de la rigidité des bouts d'ailes pour éviter les vibrations. (Voir application, chap. IX, § 7.4 et *Planche* 18). Les flèches calculées par cette méthode seront donc, en général, supérieures aux flèches réelles.

Exemple numérique. — Soit à prédéterminer la flèche en bout d'une *aile en porte-à-faux* dont les dimensions dans une vue de face sont données figure 13. L'ossature résistante (qui sera placée au niveau de l'épaisseur maximum du profil) sera réalisée en Duralumin (E=7000 kg/mm²) et sera calculée au *coefficient de calcul c=5 à la rupture.*

On aura, au coefficient 5 : $n=n_a=40$ kg/mm², soit au coefficient 1 (vol normal) où nous voulons calculer la flèche

$$n=8 \text{ kg/mm}^2.$$

Dans une section située à l'abscisse x (en mm) de l'extrémité, l'ossature a une hauteur totale h (en mm) donnée par :

$$h=100+\frac{700-100}{12000}x=100+0,05\ x.$$

La distance maximum V des fibres les plus éloignées de l'axe neutre est donc (en supposant l'ossature symétrique, ce qui est le cas le plus fréquent) :

$$V=\frac{h}{2}=50+0,025\ x.$$

Appliquons en bout d'aile une force auxiliaire fictive $\varphi=1$ dirigée de bas en haut (sens des déformations en vol). Le « moment » m engendré a pour expression dans la même section d'abscisse x :

$$m=\varphi\, x=x$$

d'où l'expression de la flèche en bout d'aile au coefficient 1 :

$$y=\frac{8}{7000}\sum\frac{x}{V_e}\ \Delta x=1,141\cdot 10^{-3}\sum\frac{x}{V}\,\Delta x.$$

Pour effectuer simplement cette intégration, divisons l'aile en six tranches de longueur égale à 2 mètres, soit ; $\Delta x=2000$ mm et évaluons au milieu de chacune d'elles, c'est-à-dire au niveau des sections repérées sur la figure 13, les valeurs de V et de $\frac{x}{V}$.

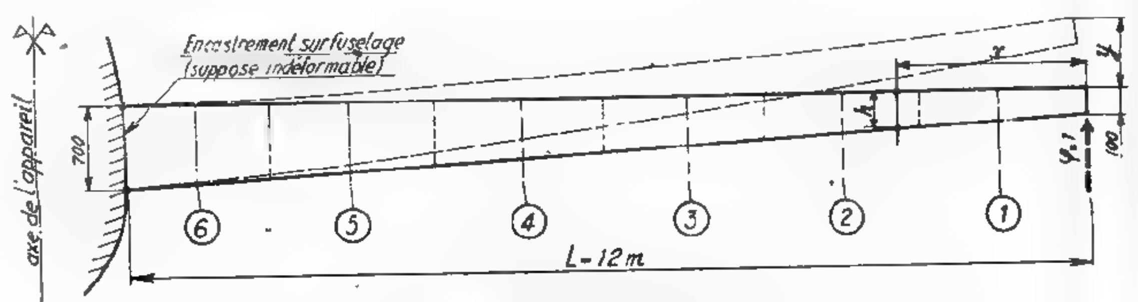


TABLEAU DE CALCUL

SECTIONS		CALCUL DE V		$\frac{x}{V}$
Repère	abscisse x	0,025 x	V	
	mm	mm	mm	
1	1000	25	75	13,3
2	3000	75	125	24,0
3	5000	125	175	28,6
4	7000	175	225	31,1
5	9000	225	275	32,7
6	11000	275	325	33,8
				Σ=163,5

Fig. 13.

Nous obtenons le tableau de calcul de la figure 13 d'où l'on déduit :

$$\sum\frac{x}{V}\ \Delta x=2000\sum\frac{x}{V}=2000\cdot 163,5=327\cdot 10^3 \text{ mm.}$$

La flèche cherchée vaut donc :

$$y=1,141\cdot 327=\mathbf{373\ mm.}$$

Remarques. — *a*) La méthode ci-dessus équivaut à une *intégration par tranches.* On obtiendrait une précision supérieure en traçant, à l'aide des valeurs de $\frac{x}{V}$ au niveau de six sections envisagées, la courbe $\frac{x}{V}$ et en *planimétrant* cette courbe, ou encore en calculant *mathématiquement* l'intégrale

$$\int_0^{12000} \frac{x}{50+0{,}025\,x}\,dx = \frac{1}{0{,}025}\left[x - \frac{50}{0{,}025}\,L\,(50+0{,}025\,x)\right]_0^{12000} = 324300$$

d'où

$$y = 1{,}141 \times 324{,}3 = 370 \text{ mm.}$$

soit un écart de 0,8 % par rapport à la méthode approchée ci-dessus.

b) Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, cette valeur représente une *limite supérieure* de la flèche réelle de flexion due à la déformation propre d'un porte-à-faux. Il conviendrait cependant d'y ajouter l'influence de la déformation de la partie intérieure au fuselage (qui travaille en flexion circulaire) et la flèche de cisaillement (voir ci-après).

c) On voit que la rigidité est indépendante du *type de réalisation de la structure* (monolongeron ou multi-longerons ou caisson) pourvu que cette structure occupe toute la hauteur h envisagée et qu'elle travaille au même taux de contrainte n.

d) Ce sont donc, en résumé, les paramètres envergure et hauteur, c'est-à-dire *allongement* et *épaisseur relative* qui influent le plus sur la rigidité de flexion d'une structure d'aile.

4.8 REMARQUE : CALCUL DE LA ROTATION, EN UN POINT, D'UNE POUTRE FLÉCHIE.

La méthode du « *travail virtuel* » peut également s'appliquer pour le calcul de la rotation en un point, c'est-à-dire pour le calcul de l'angle de déformation d'une section droite, d'une poutre fléchie.

On aboutit au résultat suivant

$$\alpha = \sum \frac{M\mu}{EI}\,\Delta l \qquad \text{(avec } \alpha \text{ en radians)}$$

dans lequel μ désigne le moment dû à un *couple unitaire fictif* appliqué à la poutre au niveau de la section dont on cherche l'angle de déformation.

Les autres symboles ont même signification que dans l'expression de y donnée au paragraphe **4.1**.

Le mode opératoire pratique et les cas particuliers sont analogues à ceux décrits ci-dessus pour le calcul des flèches.

5. DÉFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES ACCOMPAGNANT CELLES DE FLEXION

Nous avons vu que le phénomène de flexion proprement dit (c'est-à-dire l'effet du moment fléchissant M) s'accompagnait le plus souvent de *cisaillement* (dû à l'effort tranchant T) et parfois d'*efforts normaux* (dus aux efforts N).

5.1 INFLUENCE DES EFFORTS NORMAUX.

Nous verrons au chapitre XVI, que les *efforts normaux* (compression ou traction) appliqués à une poutre fléchie exercent des influences amplificatrices ou réductrices sur les flèches de flexion pure de ces poutres.

L'étude de ces phénomènes nécessite l'examen préalable de la stabilité axiale (ou *flambage*) des poutres. C'est pourquoi nous l'avons incluse au chapitre XVI.

Notons toutefois que, pour les poutres industrielles courantes, où les efforts normaux engendrent des contraintes faibles relativement à celles de flexion, l'influence des efforts normaux pourra être négligée dans le calcul de leurs déformations.

5.2 FLECHES COMPLÉMENTAIRES DE CISAILLEMENT.

D'après ce que nous avons vu au chapitre VIII, paragraphe **4.2**, une poutre soumise au cisaillement seul prend une flèche

$$f=\sum \frac{t}{G}\,\Delta l$$

avec t=contrainte de cisaillement au point considéré et G=module d'élasticité transversal.

Dans le cas du cisaillement de flexion, on obtient une valeur approchée de cette flèche complémentaire en assimilant la répartition réelle de l'effort tranchant T dans chaque section droite à une répartition de cisaillement simple calculée à l'aide de « *sections équivalentes au cisaillement* » :

$$S'=Ze$$

avec Z=hauteur équivalente définie au chapitre IX, paragraphe **3.75**, et e épaisseur au niveau de l'axe neutre.

On a alors une *flèche complémentaire*

$$y'=\sum \frac{T}{GS'}\,\Delta l.$$

Remarque. — Pour les poutres métalliques longues utilisées en pratique, cette flèche complémentaire est très faible vis-à-vis de celle de flexion (voir ci dessous).

Elle peut cependant ne plus être négligeable pour des pièces courtes ni surtout pour des poutres en bois dont le module G est très faible.

APPLICATION.

Evaluons la flèche complémentaire de cisaillement de l'aile étudiée au § **4.73** ci-dessus en supposant que l'âme, ou les âmes, de l'ossature subissent une contrainte de cisaillement : t = 10 kg/mm² au coefficient de rupture [1], soit

$$t=2 \text{ kg/mm}^2 \text{ au coefficient 1.}$$

Nous supposerons cette contrainte uniformément répartie sur toute la hauteur de l'âme [2]. On a alors directement avec les notations du § **4.73**.

$$y'=\sum \frac{t}{G}\,\Delta x$$

avec G=0,385 E=2700 kg/mm² (Duralumin)

d'où
$$y'=\frac{2}{7000}\cdot\Sigma\,\Delta x=\frac{2}{7000}\cdot 12000$$

y'=**3,4 mm** (à comparer avec y=373 mm).

Cette valeur est donc 110 fois plus faible que celle de flexion dans le cas con-

1. — Cette valeur correspond à une moyenne généralement acceptable pour des âmes minces eu égard à des considérations de stabilité.

2. — Ce qui est très admissible pour une âme mince comme nous l'avons déjà vu notamment au chapitre IX, § **7.31**.

sidéré, bien que la contrainte envisagée soit beaucoup plus élevée que pour des poutres massives [1].

6. APPLICATION NUMÉRIQUE

En application aux théories précédentes, nous donnons, **Planche 19**, le *calcul des déformations du longeron de voiture dimensionné planche* 18 (chap. IX, § 7.4).

Nous avons effectué dans cette application :

— le *tracé de la déformée* par la statique graphique (méthode de la courbe M/EI § 3.32 ci-dessus),

— le *calcul de l'angle de rotation d'une section*,

— le *calcul de la flèche à l'extrémité* (déterminée par trois méthodes différentes). On voit que la méthode du travail virtuel donne une solution rapide et précise, même en opérant directement l'intégration par parties dans un tableau.

Nous n'avons pas tenu compte des flèches complémentaires de cisaillement qui seraient négligeables.

Tous ces calculs sont effectués aux deux tiers des charges de rupture, c'est-à-dire aux « charges limites ».

---

1. — Ce résultat s'explique physiquement très clairement si l'on considère que les déformations de cisaillement propres à tous les éléments Δx qui composent la poutre ne font que s'ajouter bout à bout sans bénéficier de « l'effet amplificateur de bras de levier » qui entre en jeu pour les rotations de flexion.

CHAPITRE XI

FLEXION GAUCHE

1. GÉNÉRALITÉS

Nous avons été conduits à considérer, dès le début de l'étude de la flexion, deux catégories de phénomènes se distinguant par l'allure des déformations des poutres auxquelles ils correspondent :

flexion plane : déformée contenue dans le plan de flexion,
flexion gauche : déformée non contenue dans ce plan.

Le phénomène de flexion gauche ainsi défini par une simple opposition comprend un vaste domaine.

Nous aborderons son étude par celle d'un cas particulier simple : celui de la *flexion déviée* des poutres possédant deux plans de symétrie.

Nous envisagerons ensuite le cas des poutres de sections minces ouvertes non symétriques (*flexion des profilés ouverts*) qui nous permettra de faire apparaître la notion très utile de *centre de cisaillement.* Nous traiterons enfin succinctement le cas des poutres de sections quelconques.

Cette étude nous permettra de définir, d'une façon plus précise et plus complète, les *conditions de réalisation du phénomène de flexion plane* (ainsi que nous l'avions annoncé au chapitre IX, paragraphe 1.4) et du phénomène de flexion déviée.

2. FLEXION DÉVIÉE DES POUTRES POSSÉDANT DEUX PLANS DE SYMÉTRIE

2.1 DEFINITION. CLASSIFICATION.

On dit qu'une poutre prismatique possédant *deux plans de symétrie* [1] travaille en *flexion déviée,* quand le *plan des forces extérieures,* qui contient toujours la fibre moyenne de la pièce comme dans la flexion plane, *ne coïncide pas avec l'un des plans de symétrie.*

La flexion déviée est dite *simple* quand les forces sont normales à la fibre moyenne, donc quand *il n'y a pas d'effort normal.* Elle est dite *composée* dans le cas contraire.

2.2 EQUATION DE RESISTANCE EN FLEXION DÉVIÉE SIMPLE.

Considérons une section droite d'une poutre travaillant en flexion déviée simple (fig. 1 *a*). Cette section comporte deux axes de symétrie xx' et yy' passant par G. Soit zz' la trace du plan des forces et T la résultante de ces

1. — Nous verrons ci-après que le phénomène de flexion déviée peut également exister pour des poutres ne possédant pas cette double symétrie. Nous préciserons alors les conditions générales de son établissement.

forces situées d'un même côté de la section considérée, c'est-à-dire *l'effort tranchant* agissant dans cette section.

Décomposons la force T en deux composantes dirigées suivant Gx et Gy. Elles produisent chacune de la *flexion plane* (puisqu'elles agissent toutes deux suivant un plan de symétrie).

Ces deux composantes sont :

suivant Gx : $T_x = T \cos \alpha$
suivant Gy : $T_y = T \sin \alpha$

α étant l'angle de zz' avec xx'.

Soit M le moment fléchissant total correspondant à l'effort tranchant T. La composante T_y engendre donc un moment fléchissant $M_x = M \sin \alpha$ autour de xx' et la composante T_x un moment $M_y = M \cos \alpha$ autour de yy' [1].

Donc, en un point quelconque A de la section, de coordonnées x et y, les *contraintes normales* dues à ces moments partiels seront :

$$n_y = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{M}{I_x} y \sin \alpha$$

$$n_x = \frac{M_y}{I_y} x = \frac{M}{I_y} x \cos \alpha$$

I_x et I_y désignant respectivement les moments d'inertie autour de xx' et yy' qui sont ici des *axes principaux d'inertie* [2]. La *contrainte normale résultante* est la *somme algébrique* de ces deux contraintes partielles, soit

$$n = n_x + n_y$$

ou

$$\boxed{n = M \left(\frac{y \sin \alpha}{I_x} + \frac{x \cos \alpha}{I_y} \right).}$$

Fig. 1.

1. — Ce raisonnement revient à une simple décomposition du vecteur-moment M qui est normal à T et fait donc l'angle α avec yy'.

2. — Voir chapitre II, § 8.42.

Règle pratique. — Nous avons dit que la somme ci-dessus était *algébrique*. Il y a donc lieu, pour appliquer la formule, d'orienter les axes Gx et Gy. Cette orientation peut-être pratiquement guidée par un raisonnement tel que celui ci-dessous :

Supposons que le fer poutrelle dont la section est représentée figure **1** *b* soit *entre appuis*. La flexion verticale (due à T_y) comprime la partie supérieure et tend la partie inférieure (signes encerclés) tandis que la flexion horizontale (due à T_x) comprime la partie droite et tend la partie gauche. Il y a donc *addition* des effets en B (compression) et en C (traction) et *soustraction* de ces effets en A et D.

Les axes xx', yy' et l'angle α doivent être orientés selon la figure pour aboutir directement à ces résultats en utilisant la formule ci-dessus.

2.3 POSITION DE L'AXE NEUTRE EN FLEXION DÉVIÉE SIMPLE.

2.31 Expression mathématique. — Par définition, l'axe neutre est le lieu des points où la contrainte normale n est nulle.

L'équation de cet axe est donc donnée immédiatement par

$$\frac{y \sin \alpha}{I_x} + \frac{x \cos \alpha}{I_y} = 0. \qquad (1)$$

On en déduit directement l'*angle* ω *formé par l'axe neutre uu' avec xx'* (fig. 2 *a*) :

$$\boxed{\operatorname{tg} \omega = \frac{y}{x} = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{cotg} \alpha}$$

et l'angle θ *formé par uu' avec la direction zz' de* **T** :

$$\theta = \omega - \alpha$$

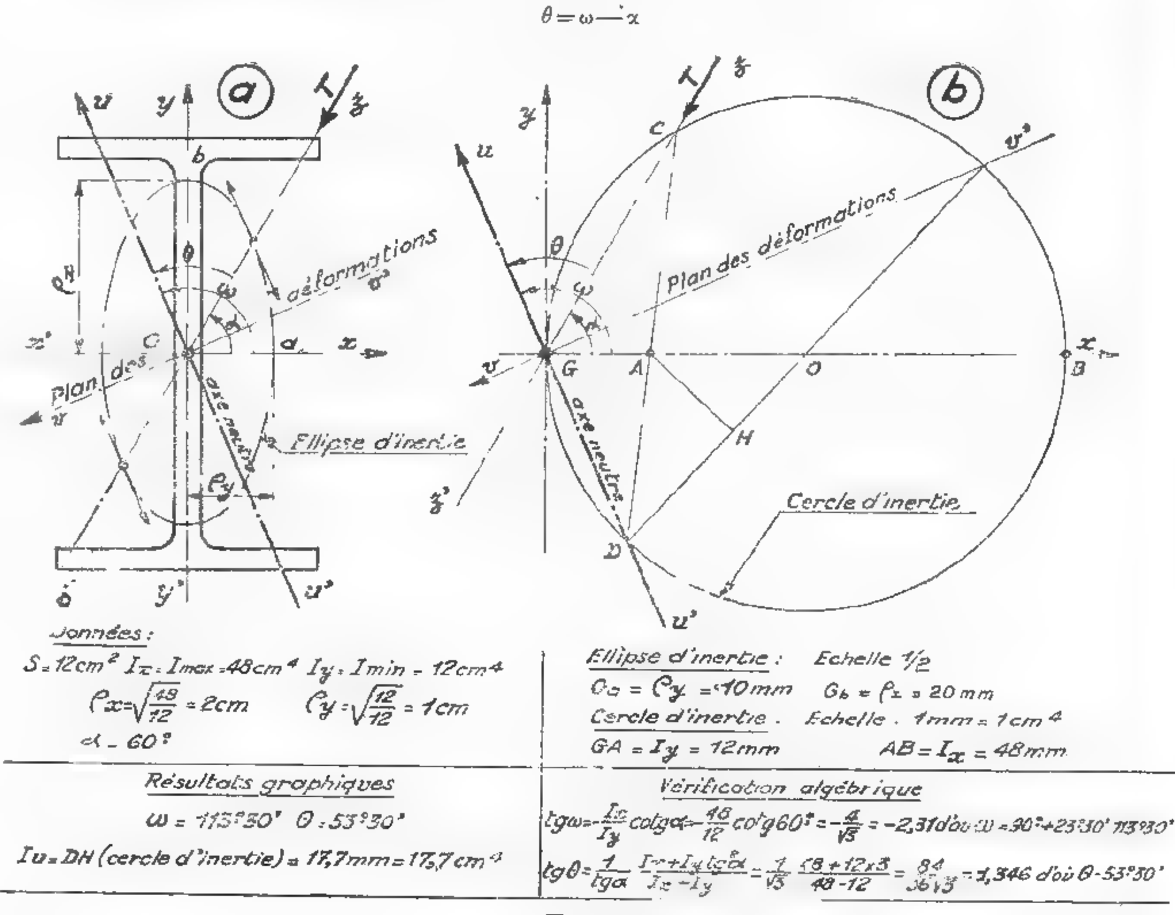


FIG. 2.

d'où

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \cdot \frac{I_x + I_y \operatorname{tg}^2\alpha}{I_x - I_y}.$$

Ces angles étant, de même que α, orientés dans le *sens trigonométrique.*

2.32 Construction géométrique. — L'équation (1) ci-dessus signifie que *l'axe neutre est la direction conjuguée à* T *dans l'ellipse centrale d'inertie de la section droite considérée* (ch. II, § **8.**5).

On obtient donc sa direction uu' selon la figure 2 *a* en partant de l'*ellipse d'inertie* ; ou d'une façon plus précise, en opérant selon la figure 2 *b* à l'aide du *cercle d'inertie* (ch. II, § **8.**52).

Les résultats de ces constructions géométriques sont vérifiés sur la figure à l'aide des expressions algébriques ci-dessus.

2.4 FLEXION PLANE ÉQUIVALENTE.

Le vecteur-moment fléchissant total M qui est normal à la direction de T se projette sur l'axe neutre en donnant un moment

$$M_u = M \sin\theta \quad \text{(fig. 3).}$$

On démontre aisément que les contraintes normales de flexion n dont l'expression a été établie au paragraphe **2.2** ci-dessus se calculent directement par la formule :

$$n = \frac{M \sin\theta}{I_u} v$$

I_u étant le *moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre uu'*, et v étant la *distance de cet axe neutre au point considéré de la section.*

Vérification numérique. — La figure 3 reproduit les caractéristiques du profilé en I dont l'axe neutre a été déterminé figure 2.

Supposons que le moment fléchissant total appliqué à cette section ait pour valeur : $M = 50$ mkg $= 5 \cdot 10^4$ mmkg.

La contrainte normale maximum de flexion est atteinte en B et C et vaut, en valeur absolue (§ **2.2**)

$$n_{max} = M\left(\frac{y \sin\alpha}{I_x} + \frac{x \cos\alpha}{I_y}\right) \qquad \text{soit (fig. 2 et 3)}$$

$$n_{max} = 5 \cdot 10^4 \left(\frac{50 \cdot 0{,}866}{48 \cdot 10^4} + \frac{30 \cdot 0{,}5}{12 \cdot 10^4}\right) = 4{,}51 + 6{,}25 = 10{,}76 \ \text{kg/mm}^2.$$

Or, le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre a pour valeur (voir cercle d'inertie fig.2)

$$I_u = 17{,}7 \ \text{cm}^4 = 17{,}7 \cdot 10^4 \ \text{mm}^4$$

et la distance de B ou C à cet axe (fig. 3)

$$v = 47{,}4 \ \text{mm}.$$

On retrouve bien directement

$$n_{max} = \frac{M \sin\theta}{I_u} v = \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 0{,}804}{17{,}7 \cdot 10^4} 47{,}4 = 10{,}76 \ \text{kg/mm}^2.$$

L'exemple ci-dessus montre de plus que l'*emplacement* des contraintes maxima est mis directement en évidence quand on a déterminé l'axe neutre, puisque ces contraintes ont lieu aux points les plus éloignés de cet axe. Nous

avions obtenu le même résultat par un raisonnement plus long au paragraphe 2.2 (fig. 1 *b*).

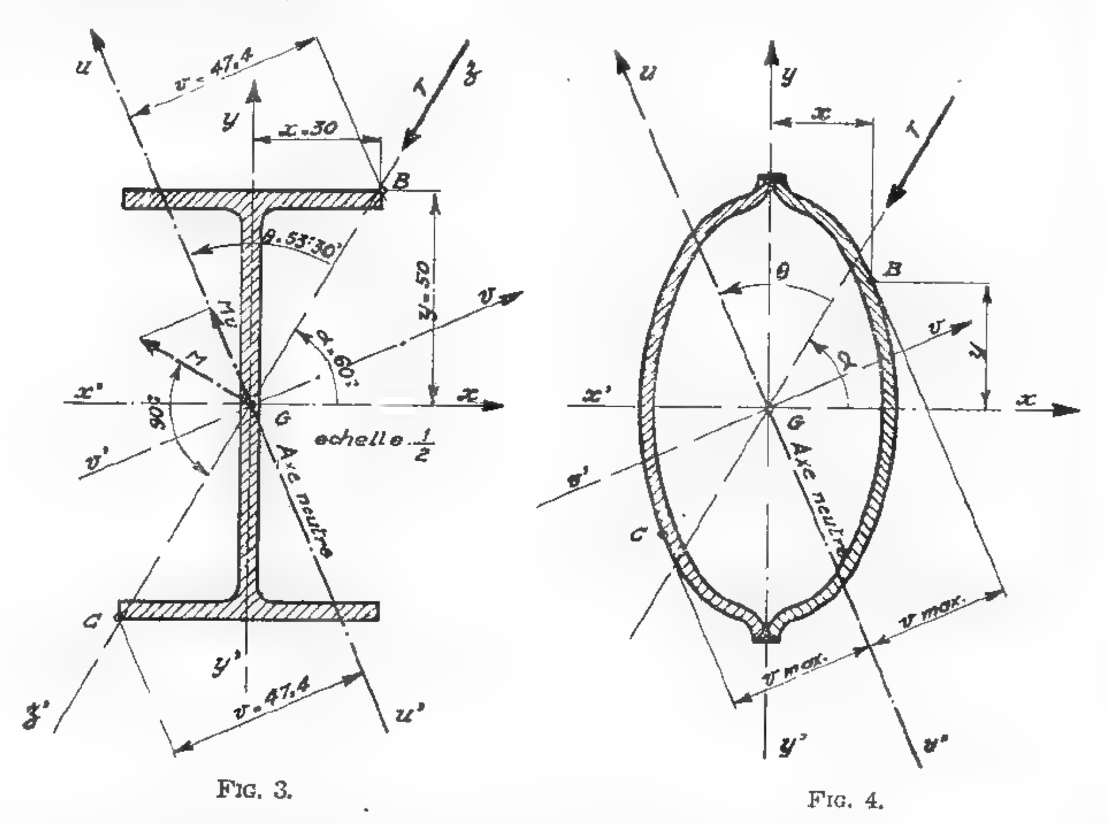


FIG. 3.

FIG. 4.

Conclusion. — On voit donc que, du point de vue des contraintes normales, *la flexion déviée se réduit, dans une section donnée, à une flexion plane unique équivalente autour de l'axe d'inertie conjugué à la direction de l'effort tranchant appliqué à cette section ; à condition de remplacer le moment fléchissant* M *appliqué, par sa projection* M_u *sur l'axe neutre préalablement déterminé* [1].

Nous avons vu également au paragraphe 2.2 qu'elle se réduisait à *deux flexions planes simultanées agissant suivant les axes principaux d'inertie de la section.*

Les deux méthodes de calcul sont *équivalentes*. La méthode de réduction à une flexion plane unique présente cependant l'avantage de faire apparaître clairement les points B et C de contrainte normale maximum.

Cet avantage est particulièrement appréciable pour l'étude de sections de forme arrondie, telles que celle de la figure 4 (levier de commande de vol par exemple) pour laquelle il faudrait, par l'autre méthode, opérer par tâtonnements en faisant varier x et y.

2.5 DÉFORMATIONS DE FLEXION DÉVIÉE.

La méthode de réduction à une flexion plane unique équivalente permet également de faire apparaître directement le *sens des déformations de* flexion déviée. Celles-ci ont lieu, en effet, dans le plan de la flexion plane équivalente, c'est-à-dire *suivant une direction vv' normale à l'axe neutre uu'* (voir fig. 2) [2].

1. — On peut encore évaluer directement M_u en projetant initialement toutes les charges sur un plan normal à l'axe neutre *uu'*.

2. — C'est à ce phénomène d'obliquité des déformations par rapport aux efforts appliqués qu'est dû le nom de *flexion déviée*.

Ces déformations se calculent exactement comme celles de flexion plane à partir du moment fléchissant projeté M_u et du moment d'inertie de flexion équivalente I_u.

2.6 CAS PARTICULIERS.

2.61 Supposons que les *moments d'inertie principaux* I_x *et* I_y *des sections étudiées soient égaux* [1].

La formule du paragraphe **2.31** donne alors

$$\operatorname{tg}\theta=\infty \qquad \text{d'où} \qquad \theta=90°.$$

Ces sections travaillent donc en *flexion plane ordinaire* quelle que soit l'orientation des efforts appliqués (pourvu, évidemment, que ceux-ci passent par leurs centres).

2.62 Supposons que sur la figure 2, par exemple, l'angle α soit égal à 0 ou à 90°, c'est-à-dire que la *flexion s'opère suivant un axe de symétrie.*

On trouve alors, en levant l'indétermination accusée par la formule du paragraphe **2.31** pour $\alpha=90°$.

$$\operatorname{tg}\theta=\infty \qquad \text{soit} \qquad \theta=90°$$

On démontre ainsi mathématiquement que l'on retombe alors sur la flexion plane ordinaire des sections symétriques.

2.7 FLEXION DÉVIÉE COMPOSÉE.

La résultante R des forces agissant d'un même côté d'une section droite n'étant plus normale à l'axe longitudinal, elle se décompose en un effort tranchant T (cas précédents) et en un effort normal N.

Les formules donnant les *contraintes normales composées* s'écrivent :

$$\boxed{n=\frac{N}{S}+M\left(\frac{y\sin\alpha}{I_x}+\frac{x\cos\alpha}{I_y}\right)}$$

ou

$$\boxed{n=\frac{N}{S}+\frac{M\sin\theta}{I_u}v.}$$

Ces expressions algébriques étant sujettes aux conventions de signes habituelles.

La figure 5 donne le résultat obtenu dans le cas d'une poutrelle reposant sur un appui P et un point P′ (mêmes conventions de signes que pour la figure 1 *b*). On voit qu'il ne se produit alors *addition* globale des effets qu'en un seul point (arête B). Il se produit un *décalage d de l'axe neutre identique* à celui de la flexion plane composée (chap. IX, § **3.226**) *ce décalage étant compté perpendiculairement à la direction uu′* (fig. 5). L'angle surchargé est le plus éloigné de l'axe neutre décalé [3] $u_1 u'_1$.

1. — L'ellipse d'inertie devient alors un cercle. C'est le cas des sections circulaires et des sections polygonales régulières inscrites (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone, etc...). Voir chapitre II, § **3.4**.

2. — Cette formule se met en effet sous la forme :

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{I_x\operatorname{cotg}\alpha+I_y\operatorname{tg}\alpha}{I_x-I_y}$$

pour $\alpha=90°$:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{0+\infty}{I_x-I_y}=\infty$$

3. — Il y a toujours lieu, bien entendu, d'évaluer les moments d'inertie inclus dans

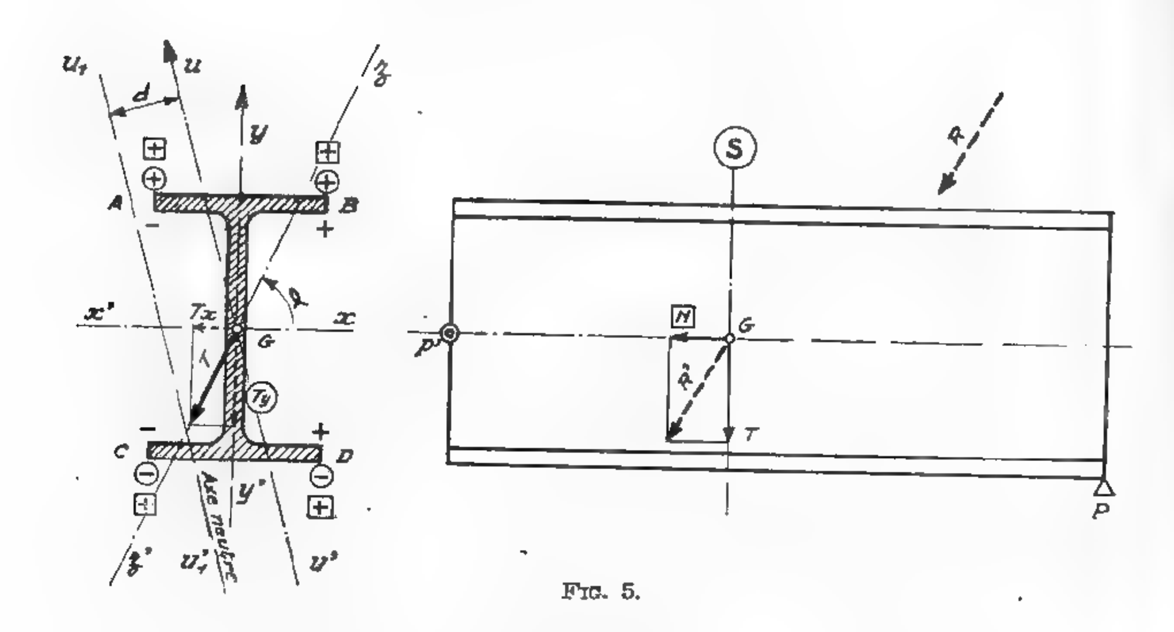


FIG. 5.

2.8 GLISSEMENT EN FLEXION DÉVIÉE.

La répartition des contraintes de cisaillement se calcule selon les méthodes établies pour la flexion plane (ch. IX, § **3.5** à **3.7**) en décomposant la flexion déviée en deux flexions planes agissant suivant les axes de symétrie et en superposant les tensions trouvées dans chaque cas.

On peut encore opérer en une seule fois en considérant la flexion plane unique équivalente définie ci-dessus. Il y a alors lieu de remplacer l'effort tranchant T par sa projection sur le plan de flexion équivalente, soit (fig. 2, 3 ou 4)

$$T_v = T \sin \theta.$$

2.9 FLEXION DÉVIÉE MULTIPLE.

Si la poutre considérée reçoit des charges qui, tout en restant orientées vers la fibre moyenne, ne sont pas contenues dans un *même plan*, les axes neutres des différentes sections ne sont également plus contenus dans un plan unique. Il n'existe donc plus de *plan de flexion équivalente*. La déformation s'opère suivant un phénomène complexe engendrant de la torsion.

On peut cependant toujours se contenter, pour calculer les contraintes normales, de décomposer directement le phénomène en deux flexions planes ordinaires, ce qui revient à projeter initialement les charges sur les plans de symétrie et à évaluer séparément les moments fléchissants M_x et M_y relatifs à chacun de ces plans.

Cas particulier. — Dans le cas particulier de poutres possédant des *sections à inertie constante dans toutes les directions* (sections circulaires ou polygonales régulières inscrites, voir ci-dessus), on peut opérer directement avec le *moment fléchissant résultant* M_r sans se préoccuper de son orientation. On établit ainsi des *diagrammes de moments résultants* que l'on traite comme ceux des moments plans. C'est ce que nous avions fait *Planche* 10, lors de l'étude du levier de commande de vol qui nous a servi d'exercice de calcul des efforts appliqués aux sections.

---

les formules ci-dessus par rapport aux mêmes axes d'inertie passant par G que dans le cas de la flexion déviée simple (axes *xx'* ou *uu'*).

3. FLEXION DES POUTRES DE SECTIONS MINCES OUVERTES NON SYMÉTRIQUES OU NON CHARGÉES SUIVANT LEURS AXES DE SYMÉTRIE

3.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Ces poutres comprennent la plupart des *profilés laminés* courants ou des *profilés en tôle pliée* utilisés particulièrement en construction aéronautique.

3.1 EXPÉRIENCE CLASSIQUE.

Considérons un *profilé laminé en* U *chargé parallèlement à son âme*, c'est-à-dire *normalement* à son seul plan de symétrie (fig. 6). Supposons, pour nous placer apparemment dans un cas particulier favorable, que ces charges agissent suivant le plan longitudinal de trace *yy'* passant par les centres de gravité des sections droites. L'axe *yy'* est évidemment *axe principal d'inertie* puisque issu du centre de gravité et normal à l'axe de symétrie *xx'* qui est obligatoirement axe principal (chap. II, § **8.42**). Nous avons donc affaire à une poutre chargée suivant un plan principal d'inertie *qui n'est pas plan de symétrie*.

Fig. 6.

L'expérience permet de constater les phénomènes suivants [1].

a) *La déformation de flexion s'accompagne d'un phénomène de rotation* autour d'un axe longitudinal rejeté en arrière de l'âme du profilé (fig. 6) [2].

b) En disposant des *extensomètres* sur les ailes, on s'aperçoit que *les contraintes normales ne sont pas uniformes* le long de celles-ci, *dans une même section droite*. Elles sont, en général, plus élevées aux angles *a* ou *a'* qu'aux bordures *b* ou *b'* bien que ce points soient situés à même distance de l'axe neutre (axe de symétrie).

c) Les *flèches* mesurées sont généralement *supérieures* à celles calculées d'après les théories de la *flexion plane*. Nous ne sommes donc pas en présence de flexion plane (ni même de flexion déviée).

Les mêmes phénomènes se produisent, quoique moins accusés, si les charges sont appliquées à l'aplomb de l'âme.

3.2 EXPLICATION DU PHENOMENE : AXE ET CENTRE DE CISAILLEMENT (fig. 7).

L'explication du phénomène, en particulier en ce qui concerne le « déversement » du profilé, peut être fournie par de simples considérations basées sur *l'équilibre entre les efforts appliqués et les tensions internes* (ou contraintes).

Supposons, en effet, que l'on puisse réaliser, en jouant sur la *position en profondeur* des charges, un *état de flexion plane*.

1. — *Expériences de* BACH *sur les U laminés*. Cet auteur a déduit de ses expériences des « *modules d'inertie fictifs* » applicables à ces profilés selon divers cas de chargement. Ces résultats présentent un intérêt pratique certain, pour le cas particulier étudié, mais ils ne peuvent malheureusement pas être généralisés.

2. — Ce phénomène est connu sous le nom de *déversement du profilé*.

Les contraintes normales n calculées par la formule classique :

$$n = \frac{M}{I_x} y$$

équilibrent alors intégralement le *moment fléchissant* M. Il reste à étudier l'équilibre entre les *contraintes tangentielles* (cisaillement) et l'*effort tranchant* T ; ce que nous effectuerons en faisant apparaître l'allure des tensions de cisaillement le long de la section, c'est-à-dire le *flux de cisaillement* défini précédemment au chapitre IX, paragraphe **3.54**. Nous savons que, par suite de la minceur des parois, ce flux s'écoule *tangentiellement au contour* (voir chap. IX, § **3.73**) [1].

Il affecte l'allure schématisée par le système de flèches de la figure 7 *a* où nous avons orienté ces flèches *dans le sens des réactions* fournies à l'effort tranchant appliqué, de façon à mieux illustrer le phénomène d'*équilibre*.

Ce flux engendre sur les *semelles* deux forces résultantes φ et $-\varphi$ égales et opposées (par suite de symétrie) formant un *couple* de moment

$$\mu = \varphi h.$$

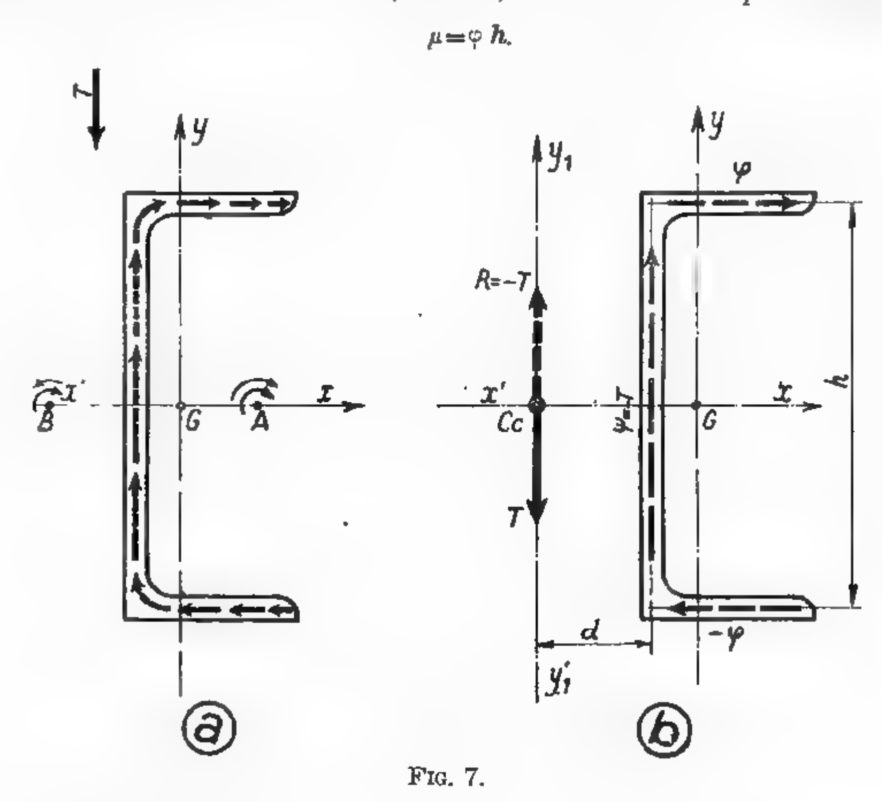


Fig. 7.

Le flux agissant sur l'*âme* équilibre la totalité de l'effort tranchant (équilibre des projections verticales des forces). Il est donc équivalent à une réaction globale $\psi = -T$, centrée sur l'âme. L'*ensemble du flux* fournit donc une réaction R égale à $-$ T (projections horizontales nulles), *mais cette réaction qui est la résultante des trois forces :* φ, φ et ψ (c'est-à-dire de la force $-$ T et du couple μ) *se trouve rejetée à une certaine distance d de l'âme, telle que l'on ait l'équilibre de moments, soit :*

$$-T\,d - \mu = \varphi\,h$$

---

1. — Cette hypothèse n'est, en réalité, pleinement satisfaite que pour des épaisseurs infiniment minces, mais elle s'écarte peu de la réalité dans le cas qui nous occupe.

d'où [1]

$$d = -\frac{h\varphi}{T}.$$

Il est aisé de voir que cette distance d doit être portée *en arrière* de l'âme c'est-à-dire *extérieurement* au profilé. En effet, le moment μ dû aux forces φ et le moment dû au transport de ψ s'ajoutent pour tout point tel que A (fig. 7 *a*) situé vers l'intérieur du profilé. Il n'y a donc pas possibilité d'obtenir un équilibre de ce côté. Il existe, par contre, une possibilité d'équilibre en arrière de l'âme où les moments par rapport à un point quelconque, tel que B, sont de sens inverses.

Conclusion. — *Le décalage d, ainsi mis en évidence, situe donc un axe* $y_1y'_1$ *parallèle à yy', à l'aplomb duquel il est nécessaire d'appliquer l'effort tranchant* T *envisagé, pour que celui-ci soit directement équilibré par un état de cisaillement de flexion plane* (fig. 7 *b*).

Cet axe est appelé l'*axe de cisaillement* de la section relatif au sens de flexion étudié. Il rencontre l'axe de symétrie xx' (qui est évidemment axe de cisaillement en flexion horizontale) en un point C_c caractéristique de la section, que l'on désigne par *centre de cisaillement* de cette section.

CALCUL DE LA DISTANCE d (fig. 8). — On sait que le flux de cisaillement de flexion plane est donné par l'expression

$$\tau = \frac{T}{I} w \text{ (chap. IX, § 3.54)} \quad [2]$$

avec ici : $I = I_x = \frac{e' h^3}{12} + 2 e b \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{4}\left(\frac{e' h}{3} + 2 e b\right)$

(inerties propres des semelles négligées).

Aux angles a et a' des semelles on a

$$\tau = \tau_1 = \frac{T}{I} w_{(\text{semelle})} = \frac{T}{I} e b \frac{h}{2} = \frac{6 T}{h\left(6 + \frac{h}{b}\frac{e'}{e}\right)}.$$

La variation de τ étant linéaire sur les semelles (ch. IX, § 3.73), la résultante φ est donnée par

$$\varphi = \frac{1}{2}\tau_1 b = \frac{3 T b}{h\left(6 + \frac{h}{b}\frac{e'}{e}\right)}.$$

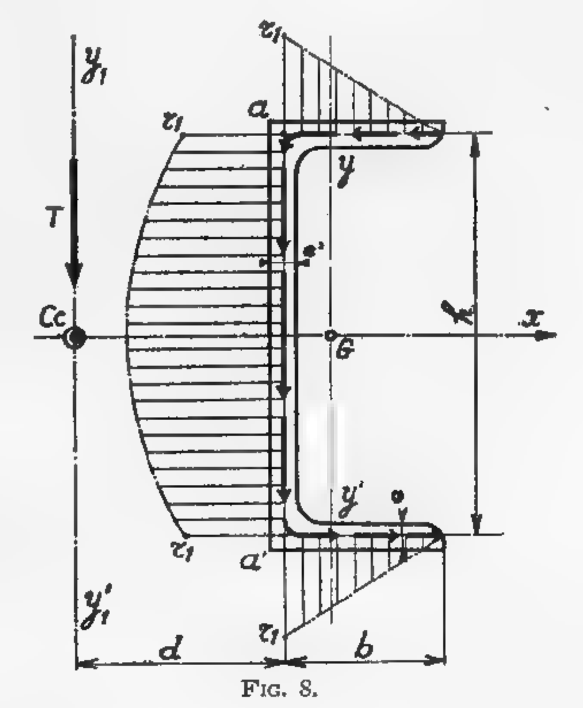


FIG. 8.

On a donc d'après la relation ci-dessus

$$d = \frac{\varphi h}{T} \text{ (en valeur absolue)}$$

soit

$$\boxed{d = \frac{3 b}{6 + \frac{h}{b}\frac{e'}{e}}.}$$

1 — Voir ci-après le calcul de d en fonction des dimensions de la section.

2. — Nous rappelons que w représente le moment statique par rapport à l'axe neutre de tous les éléments mis en charge à travers la section, normale aux lignes de flux, passant par le point considéré. Pour les profilés ouverts, ces éléments comprennent donc ceux situés entre le point considéré et l'extrémité libre voisine.

On voit que cette distance constitue bien uniquement un *paramètre géométrique* de la section, indépendant des efforts appliqués (l'effort tranchant T inclus dans la première expression s'est éliminé).

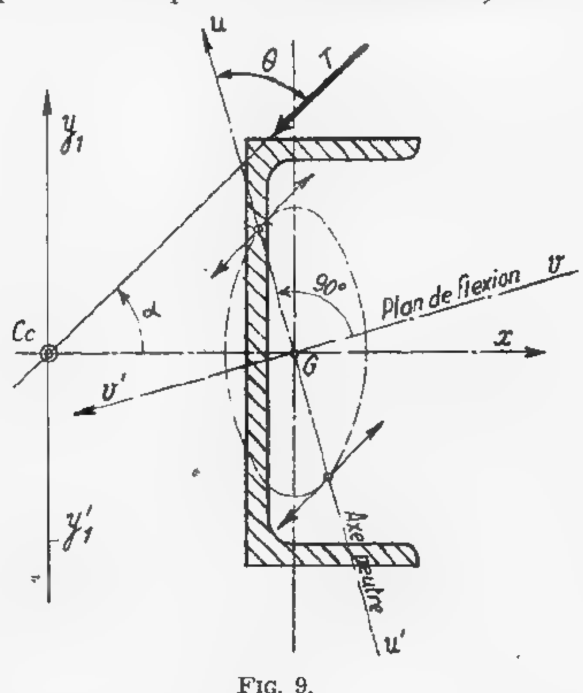


Fig. 9.

3.3 PROPRIÉTÉS DU CENTRE DE CISAILLEMENT VIS-A-VIS DES SOLLICITATIONS DE FLEXION.

3.31 Efforts passant par le centre de cisaillement. — *a*) Nous venons de démontrer que si l'effort tranchant T avait été appliqué suivant $y_1 y'_1$ c'est-à-dire *parallèlement à un axe d'inertie principal, et au niveau du centre de cisaillement, il y aurait eu état de flexion plane* [1].

b) *Si l'effort tranchant* T, *toujours orienté vers le centre de cisaillement, avait été dirigé obliquement par rapport aux axes principaux d'inertie* (fig. 9), *il y aurait eu un état de flexion déviée* identique à celui qui a été défini au paragraphe **2.** ci-dessus dans le cas particulier simple des sections bi-symétriques.

C'est-à-dire que l'axe neutre et les déformations auraient été simplement *déviées* d'un angle θ, que nous savons calculer, *sans qu'il se produise de rotation (ou déversement) de la poutre, autour d'un axe longitudinal.*

3.32 Efforts ne passant pas par le centre de cisaillement. — Supposons maintenant que l'effort tranchant T soit *appliqué suivant une direction quelconque ne passant pas par le centre de cisaillement.*

L'expérience montre que *le phénomène de déversement* constaté ci-*dessus* (fig. 6) *se produira toujours, quelle que soit l'orientation de* T.

Nous verrons au chapitre XIII que cette rotation des sections droites autour d'un axe parallèle à la dimension longitudinale de la poutre constitue une *torsion* de cette poutre. Nous sommes donc en présence d'un *phénomène complexe comprenant de la flexion et de la torsion* [2].

---

1. — Il n'est donc pas *suffisant* que T soit parallèle à un axe d'inertie principal, selon une opinion trop répandue. La direction $y_1\ y'_1$ définit un axe que l'on peut désigner, par analogie avec les axes d'inertie, par l'appellation d'*axe principal de cisaillement*.

2. — Pour les poutres de sections minces ouvertes, cette sollicitation complexe prend le nom de *torsion-flexion* (Voir chap. XXII).

Nous verrons également au chapitre XIII, que l'axe longitudinal de rotation, appelé *axe de torsion* de la poutre, est précisément matérialisé, pour les poutres prismatiques minces telles que les profilés ouverts, par le lieu des centres de cisaillement de leurs diverses sections droites.

Nous verrons enfin que la torsion peut engendrer des contraintes normales supplémentaires, ce qui explique l'anomalie constatée ci-dessus (§ **3.1**) pour la répartition de ces contraintes et pour la valeur des flèches.

3.33 **Remarque.** — Les états de flexion plane et de flexion déviée dont les conditions de réalisation sont définies au paragraphe **3.31** se groupent sous la désignation commune d'*états de flexion pure*, par opposition à l'état de flexion avec torsion défini au paragraphe **3.32**.

3.4 CONDITIONS DE RÉALISATION DE LA FLEXION PURE POUR QUELQUES PROFILÉS OUVERTS.

Nous avons groupé sur la **Planche 20** les schémas représentatifs des *sections droites* de quelques *profilés ouverts* courants ou caractéristiques.

Les *centres de cisaillement* correspondants C_c sont situés pour chacune de ces sections. Leurs positions se déduisent pour quelques-unes de simples considérations de double symétrie (profilés en I) d'anti-symétrie (profilés en Z) ou de composition de flux concourants (profilés en T et en L). Pour les autres sections, le décalage d se calcule par un procédé analogue à celui utilisé ci-dessus pour le profilé en U.

Il est à noter que ce décalage est toujours orienté vers l'extérieur pour les profilés du genre U, C ou tubes fendus. Le centre de cisaillement peut, par contre, être situé à l'intérieur de la section pour les profilés du genre Ω si les ailes terminales sont importantes ou si la hauteur est faible (la formule donnant d fournit alors un résultat négatif).

Nous avons indiqué sur ces figures

— Les lignes d'action des efforts tranchants T produisant de la *flexion plane* (efforts agissant suivant les axes principaux de cisaillement) ;

— Quelques lignes d'action d'efforts tranchants T_1 produisant de la *flexion déviée* (efforts passant par C_c et non dirigés suivant les axes principaux) ;

— Quelques lignes d'action caractéristiques d'efforts T_2 produisant des états de *flexion avec torsion* (efforts ne passant par C_c).

Un *cas particulier* intéressant est fourni par les profilés en tubes fendus circulaires [1] ou carrés qui possèdent une infinité de directions de sollicitations en flexion plane convergeant toutes au centre de cisaillement. Ils peuvent donc être assimilables aux tubes fermés identiques sous réserve d'être chargés au niveau de leurs centres de cisaillement [2].

3.5 CONCLUSIONS PRATIQUES.

La plupart des profilés ouverts possèdent donc des « *directions privilégiées* » de sollicitations transversales qui sont généralement extérieures aux figures. Ces directions correspondent à des *déformabilités minima*. Nous verrons, en effet, ultérieurement (ch. XIII) que les sections ouvertes possèdent une *faible rigidité en torsion*. C'est ce qui explique les phénomènes de « *déversements prématurés* » facilement constatés pour ces sections quand on les sollicite d'une façon quelconque par rapport à leurs centres de cisaillement (états de flexion avec torsion).

Une méthode pratique pour éviter ces effets consiste à *coupler* ces pro-

---

1. — Tringles à rideaux du commerce, par exemple.

2. — Il est à noter, cependant, que les contraintes de cisaillement sont toujours plus élevées (par suite de la dissymétrie des flux).

filés dos à dos, soit directement (fig. 10 *a*), soit à l'aide d'entretoises qui peuvent alors servir au chargement (fig. 10 *b*).

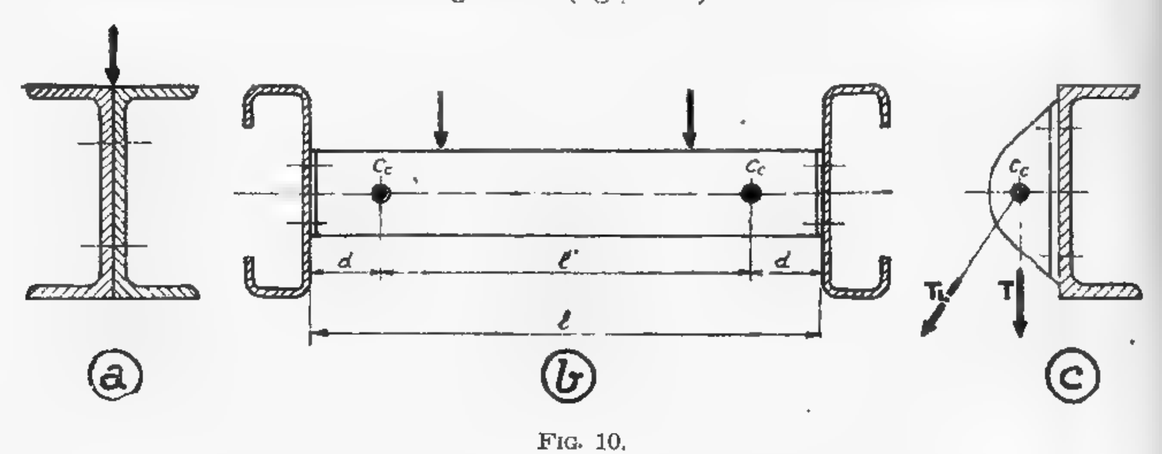


Fig. 10.

Il est à noter alors que la « *portée pratique* » de ces entretoises est sensiblement égale à la distance $l' = l - 2d$ séparant les centres de cisaillement de chaque profilé [1]. On pourrait encore se contenter de charger extérieurement ces profilés selon la figure 10 *c* à l'aide de ferrures déportées.

Remarque. — Les théories ci-dessus ne concernent toujours que des *profilés fléchis isolément*. On commettrait une erreur grossière en les appliquant à des profilés *stabilisés* longitudinalement par leurs fixations sur un autre élément, même si celui-ci est mince (cas d'une nervure en forme de U fixée sur un revêtement, par exemple).

4. FLEXION DES POUTRES DE SECTIONS MINCES FERMÉES

4.1 CENTRE DE CISAILLEMENT.

On définit, de même que pour les sections minces ouvertes, des *centres de cisaillement* des sections minces fermées. Ils se trouvent toujours situés aux foyers des flux de cisaillement engendrés par des états de flexion plane et jouissent donc des mêmes propriétés vis-à-vis de l'orientation à donner aux efforts tranchants.

Ces centres de cisaillement restent toujours, pour des sections d'allure régulière (convexe), à l'intérieur des contours et non loin des centres de gravité.

Leur recherche théorique se complique du fait que l'on ignore *à priori* les « points de tension nulle » qui servent au calcul des flux agissant sur les profilés ouverts. Nous donnerons ultérieurement (chap. XXII) les procédés de calcul généraux à appliquer.

4.2 UTILISATION DES SECTIONS MINCES FERMÉES.

4.21 Les *profilés minces fermés* utilisés en pratique possèdent en général deux axes de symétrie (tubes circulaires, carrés, ovales ou rectangulaires). Leurs centres de cisaillement et leurs centres de gravité sont donc confondus au foyer de symétrie. Il suffit alors de charger ces profilés suivant des directions convergeant vers leurs centres pour obtenir des états de flexion pure.

1. — A condition que la dimension longitudinale de la poutre soit suffisante pour que la rigidité de torsion propre de chaque profilé puisse être négligée.

4.22 Les *sections minces fermées dissymétriques* constituent, par contre, la majorité des structures d'*ailes-caissons* ou de *fuselages-coques*. Nous avons réservé à l'étude de ces structures (appelées *structures en coquille*) un chapitre particulier (chap. XXII). Nous verrons, en effet, que des considérations de *stabilité locale* des éléments minces qui les constituent se greffent aux problèmes généraux de flexion qui ne peuvent, pratiquement, s'étudier indépendamment.

4.3 RIGIDITÉ EN TORSION.

Nous verrons ultérieurement (chap. XIII) que les poutres de sections fermées possèdent une rigidité en torsion considérable vis-à-vis de celle des poutres de sections ouvertes.

La transmission de la torsion se fait, pour ces sections fermées, par un phénomène simple n'engendrant pas de contraintes normales supplémentaires.

Ces considérations expliquent que l'on ne rencontre pas, pour ces sections, les phénomènes de déversement propres aux sections ouvertes.

4.4 CONCLUSION.

La connaissance des centres de cisaillement des sections fermées n'est pratiquement utile que pour déterminer la position de l'axe de torsion, c'est-à-dire pour calculer les moments de torsion. Ceux-ci n'engendrant que des contraintes tangentielles, il reste rigoureux de calculer les contraintes normales de flexion des poutres de sections fermées, sans se préoccuper de la position, par rapport à l'axe de torsion, des lignes d'action des charges appliquées.

5. FLEXION DES POUTRES DE SECTIONS PLEINES QUELCONQUES

Nous avons vu au chapitre IX, paragraphe **3.72**, que l'effort tranchant engendrait à l'intérieur des sections pleines des poutres fléchies, un système de tensions de cisaillement dirigées en tous points suivant les « *lignes de glissement nul* » de ces sections (voir fig. 18 du chap. IX).

On conçoit donc qu'il puisse exister pour ces sections un « *foyer des tensions de flexion plane* », analogue au centre de cisaillement des sections minces. Ce foyer jouirait alors des mêmes propriétés en ce qui concerne l'orientation à donner aux efforts tranchants pour obtenir des états de flexion pure.

Pratiquement, la recherche de ces foyers serait très complexe et exigerait la prédétermination des courbes de glissement nul. On se contente donc de les assimiler aux *centres de gravité* des sections étudiées.

Les moments de torsion sont alors évalués par rapport à l'axe longitudinal de la poutre déterminé par le lieu des centres de gravité de ses sections droites (fibre neutre de flexion simple).

6. CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Les études qui précèdent permettent d'énoncer les *conditions générales de réalisation* d'un *état de flexion pure* (*flexion plane ou flexion déviée*)

Ces conditions, énoncées ci-après complètent celles données au début de l'examen de chacun de ces phénomènes [1].

Pour qu'une poutre prismatique quelconque travaille selon un état de flexion pure (c'est-à-dire sans torsion) *il est nécessaire que les efforts tranchants appliqués à chaque section droite convergent vers un « point caractéristique » de ces sections.* Ce point est appelé « *centre de cisaillement* » dans le cas des sections minces et on l'assimile au centre de gravité pour les sections pleines.

Cette première condition étant satisfaite :

a) si l'effort tranchant est *parallèle à un axe principal d'inertie*, il se produit un *état de flexion plane ;*

b) s'il est *orienté de façon quelconque par rapport aux axes principaux* il se produit un *état de flexion déviée.*

---

1. — Nous avions alors posé comme conditions :

un plan de symétrie et charges dans ce plan pour la flexion plane,
deux plans de symétrie et charges quelconques pour la flexion déviée.

Les conditions générales énoncées maintenant adoucissent ces restrictions que nous nous étions imposés pour obtenir une simplification d'exposé.

CHAPITRE XII

FLEXION DES POUTRES EN BOIS
CALCUL DES POUTRES HÉTÉROGÈNES

0. INTRODUCTION

Nous avons supposé, au cours des chapitres précédents, que les déformations élastiques des poutres étudiées s'établissaient selon la loi de proportionnalité connue sous le nom de « *Loi de Hooke* » [1].

Nous avons admis au surplus, que ces poutres étaient *homogènes* et *isotropes*.

Ces deux hypothèses nous ont permis d'aboutir aux formules et aux procédés de calcul classiques que nous venons d'étudier.

Nous avons groupé dans le présent chapitre *deux problèmes distincts* ne présentant pour trait commun que celui de ne pas satisfaire à l'une ou l'autre de ces deux hypothèses.

Nous nous sommes limités pour le *calcul des poutres en bois* à l'exposé de méthodes pratiques et à quelques considérations de réalisation de ces poutres pour leur emploi en construction aéronautique.

Nous n'avons abordé que très succinctement les procédés de calculs particuliers aux poutres hétérogènes qui présentent pour application principale le calcul des *constructions en béton armé*.

1. FLEXION DES POUTRES EN BOIS

1.1 DIAGRAMMES D'ESSAIS DES BOIS.

Supposons que l'on représente sur un même diagramme les résultats d'essais en *traction* et en *compression longitudinales* (efforts orientés parallèlement aux fibres) effectués sur deux éprouvettes d'un même échantillon de bois dans les mêmes conditions de température et d'état hygrométrique.

En portant, de même que pour les métaux, les *allongements relatifs* i en abscisses et les *contraintes normales* n en ordonnées, nous obtiendrions un diagramme présentant l'allure générale de celui de la figure **1** *a*.

Nous constatons d'abord que la contrainte de rupture en traction n_{ta} est plus élevée que la contrainte de rupture en compression n_{ca}.

Le bois résiste donc mieux à la traction qu'à la compression. Ce résultat est mis en évidence par le *Tableau des caractéristiques mécaniques des bois* donné *Planche* **21**.

---

1. — Voir chapitre V, § 3.222. Cette hypothèse n'est pratiquement satisfaite que pour les métaux usuels en dessous de leur limite élastique. Elle reste donc satisfaisante pour le calcul des *poutres métalliques* pour lesquelles on s'impose généralement de n'atteindre en aucun point la limite d'élasticité lors de leur utilisation pratique.

Nous constatons, au surplus, que seule la partie du diagramme relative à la *traction* suit une loi sensiblement *linéaire* jusqu'au voisinage de la rupture. En *compression*, par contre, *la partie linéaire est très courte ou pratiquement inexistante.* Les raccourcissements croissent de plus en plus vite au fur et à mesure que les contraintes de compression augmentent.

Conclusion. La flexion qui engendre simultanément des contraintes normales de traction et de compression ne pourra donc s'étudier, suivant les règles courantes, *que pour des charges* (ou contraintes) *très faibles* qui correspondraient à la petite partie linéaire du diagramme du côté des fibres comprimées. Ces charges sont pratiquement inférieures à celles d'utilisation. *Il y a donc lieu d'envisager d'autres méthodes de calcul en flexion tenant compte du phénomène de non proportionnalité rencontré pour les fibres comprimées.*

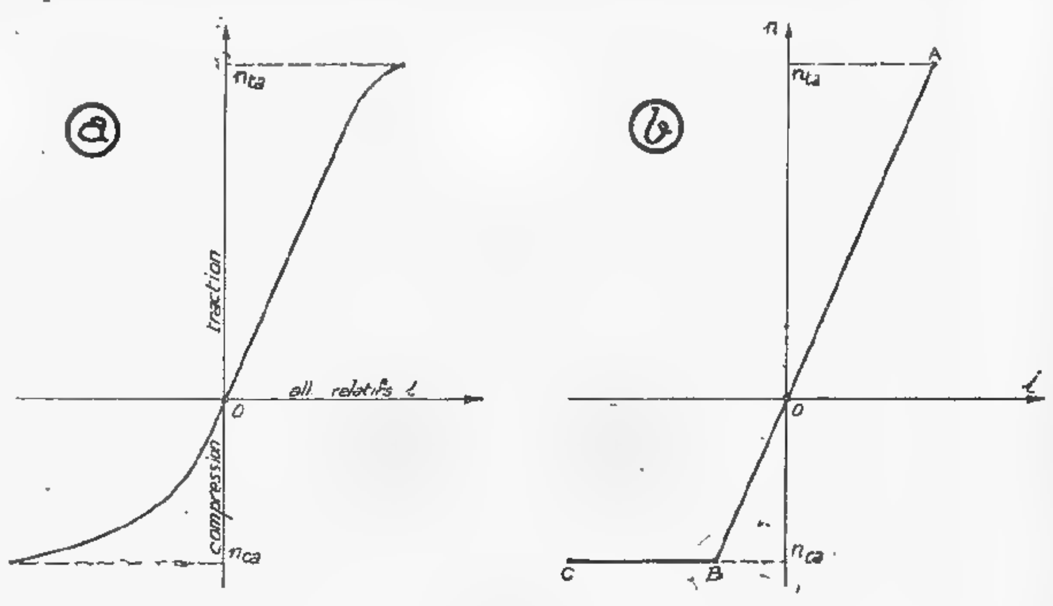


FIG. 1.

1.2 RÉPARTITION DES CONTRAINTES NORMALES DE FLEXION AU MOMENT DE LA RUPTURE (THÉORIE DE PRAGER).

Pour simplifier les calculs, substituons au diagramme expérimental de la figure 1 *a* le diagramme approché de la figure 1 *b* : Les allongements relatifs sont supposés *linéaires jusqu'à la limite* n_{ta} *de rupture en traction* (partie OA), tandis qu'en *compression* la courbe réelle est remplacée par *deux droites*, OB et BC, cette dernière étant une horizontale partant du point B (prolongement de OA jusqu'à n_{ca}) et allant jusqu'au raccourcissement de rupture en compression.

Envisageons maintenant une *section droite pleine* d'une poutre en bois soumise à un état de *flexion simple* (sans effort normal) *produisant la rupture.* Supposons que cette section reste plane jusqu'à la limite de rupture. Les allongements relatifs de chaque fibre sont proportionnels aux distances de ces fibres à l'axe neutre (flexion plane). On obtient donc, en s'aidant de la figure 1 *b*, un *diagramme de répartition des contraintes normales de flexion à la rupture le long de la section* tel que celui représenté sur la figure 2.

Dans la partie tendue des fibres extrêmes A supportent seules la contrainte limite n_{ta}.

Par contre, dans la partie comprimée, toute une région de la section allant de B à C supporte la contrainte n_{ca}. Cette hypothèse a servi de base au physicien PRAGER pour établir une *méthode de calcul à la rupture des pou-*

tres en bois [1]. Il convient de remarquer que cette méthode qui a été sanctionnée par de nombreux essais, permet seulement de définir des *charges admissibles à la rupture* et non de connaître les contraintes correspondant à une charge donnée.

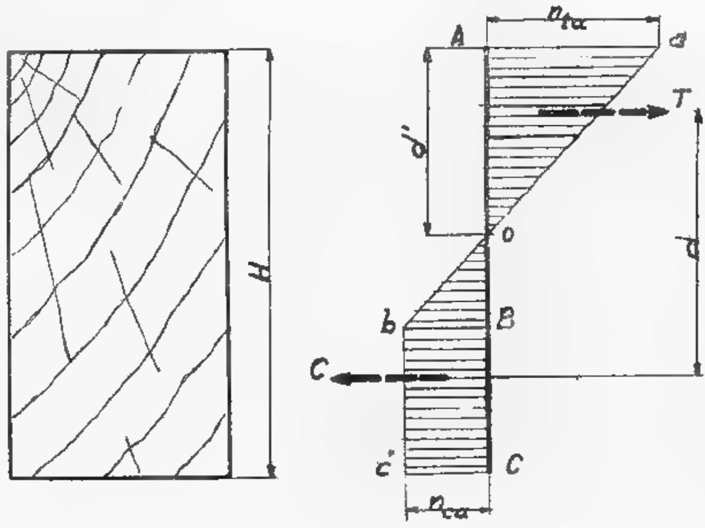


FIG. 2.

1.3 APPLICATION AUX POUTRES DE SECTIONS PLEINES.

1.31 Méthode de calcul. — On pose, en fonction des dimensions extérieures de la section, les deux *équations générales d'équilibre* suivantes :

a) Les résultantes T et C des forces intérieures agissant dans les parties tendues et comprimées doivent être égales en valeur absolue (*projection normale nulle*) ce qui s'écrit d'une manière générale :

$$T = \sum_0^A n_t \Delta S = C = \sum_0^C n_c \Delta S$$

ΔS figurant dans ces expressions un élément de surface sur lequel agit la contrainte n_t ou n_c correspondant au diagramme de la figure 2.

On déduit de cette première équation *l'emplacement de l'axe neutre* O (repéré par exemple par sa distance d' au sommet A de la section) *en fonction du rapport des contraintes admissibles*

$$\alpha = \frac{n_{ta}}{n_{ca}}.$$

b) On écrit ensuite que le couple formé par T et C équilibre le *moment fléchissant admissible* M_a *à la rupture*, soit

$$M_a = Td.$$

On obtient finalement pour chaque type de section étudié une expression donnant la valeur de M_a en fonction de α et des dimensions de la section.

1.32 Application aux sections rectangulaires. — Nous avons vu au chapitre V, paragraphe **6.32**, que l'on effectuait sur des éprouvettes rectangulaires des essais normalisés de *flexion statique*. Ces essais permettent de faire ressortir une *contrainte apparente de rupture* calculée par la formule usuelle de flexion plane :

$$n_{fo} = \frac{M}{I} V.$$

1. — Cette hypothèse revient à admettre que le bois atteint prématurément *sans se rompre* sa contrainte extrême de compression. La rupture est entraînée par celle des parties tendues.

On établit, à l'aide des équations de principe ci-dessus, la courbe représentée figure 3 qui permet de connaître le rapport

$$k = \frac{n_{fo}}{n_{ca}} = \frac{\text{contrainte apparente de flexion admissible}}{\text{contrainte de compression admissible}}$$

en fonction du rapport caractéristique

$$\alpha = \frac{n_{ta}}{n_{ca}}.$$

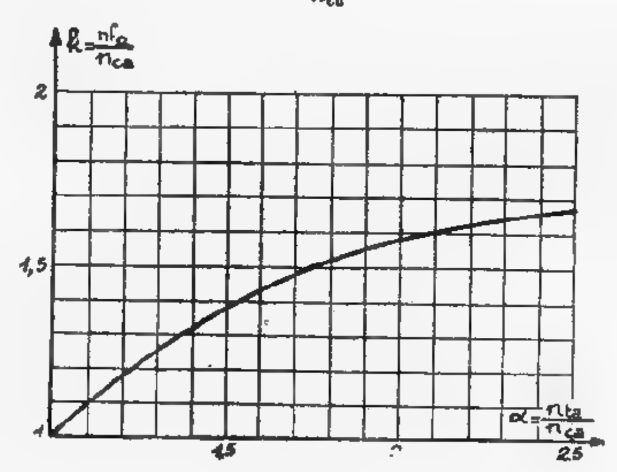


Fig. 3.

On définit ainsi pour un échantillon de bois donné (valeur de α connue) la *contrainte apparente* n_{fo} *admissible à rupture* en fonction de la valeur n_{ca} (qui est la plus facile à mesurer expérimentalement).

Exemple. — Pour le *spruce* $\alpha=2$ d'où (fig. 3) $k=1,58$.
Comme $n_{ca}=3,5$ kg/mm² (*Planche* 21), on a

$$n_{fo}=3,5 \cdot 1,58=5,53 \text{ kg/mm}^2.$$

Remarque. — La courbe figure 3 est générale pour toutes les sections rectangulaires de dimensions quelconques (la largeur s'élimine dans les équations). Il est donc possible de calculer les poutres en bois de sections pleines rectangulaires à l'aide des formules de flexion plane à condition de se limiter à la contrainte maximum de flexion apparente admissible à la rupture.

$$n_{fo}=k\ n_{ca}.$$

Les valeurs de k différeraient pour tous les autres types de sections.

1.4 CONSTITUTION D'UN LONGERON EN BOIS.

1.41 Considérations générales. — De même que pour les poutres métalliques on a intérêt, pour les poutres en bois fléchies, à écarter la matière le plus possible de l'axe neutre de façon à obtenir un poids de construction minimum.

1.42 Sections amincies. — C'est cette considération qui a conduit, dès les débuts de l'aviation, à réaliser des longerons d'ailes en forme de I (fig. 4), l'amincissement central étant obtenu par *toupillage* en partant d'un *plateau* de bois.

Cette solution est dangereuse et généralement à proscrire. En effet, *le bois résiste mal au cisaillement* orienté dans le sens du décollement des fibres (phénomène de *fendage* mis en évidence par le « coup de hache » servant à fendre une bille de bois). On a ainsi, pour le *spruce* qui est le bois le

plus utilisé en construction aéronautique, par suite de sa faible densité jointe à une bonne résistance aux contraintes normales (voir tableau *planche* 21)

$$n_{ca}=3{,}5 \text{ kg/mm}^2 \qquad n_{ta} \geqslant 7 \text{ kg/mm}^2$$

tandis que la contrainte admissible au cisaillement (glissement longitudinal) vaut, en moyenne :

$$t_a=0{,}6 \text{ kg/mm}^2$$

soit près de *dix fois moins* que la contrainte normale de flexion admissible dans le cas des sections rectangulaires.

Une rupture en cisaillement longitudinal peut donc être à craindre dans les parties amincies (fig. 4).

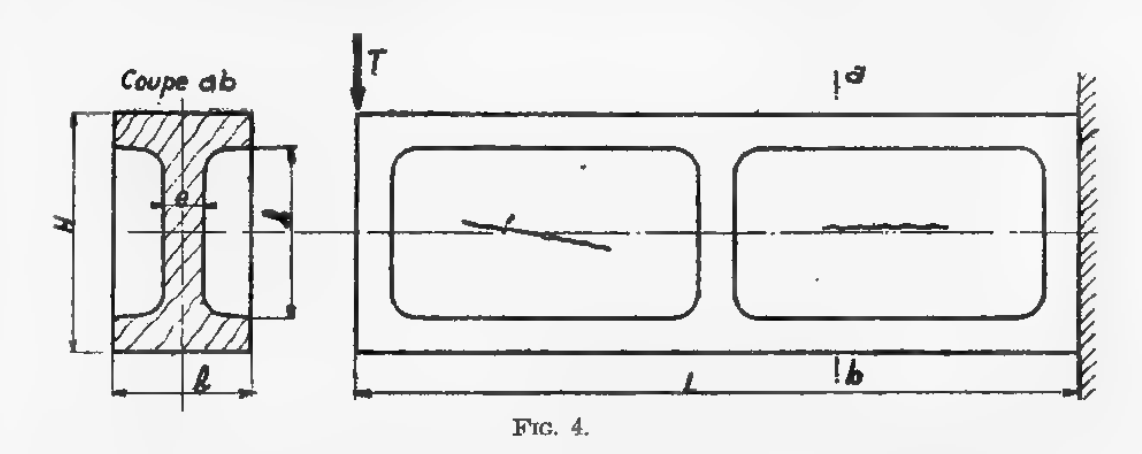


Fig. 4.

Démontrons cette proposition par un *calcul rapide* analogue à celui effectué au chapitre IX, paragraphe 6.2, pour une poutre métallique.

Cherchons le rapport qui doit exister entre les dimensions L et H de la poutre en *spruce* de la figure 4 pour que la condition de résistance au cisaillement devienne équivalente à celle de flexion pure.

Données particulières :

$$h=0{,}7 \text{ H} \qquad e=0{,}2\ b$$

$$\text{I}=\frac{b\text{ H}^3}{12}-\frac{0{,}8\ b\ (0{,}7\text{ H})^3}{12}=0{,}0605\ b\text{ H}^3\ ; \qquad \frac{\text{I}}{\text{V}}=0{,}121\ b\text{ H}^2.$$

Admettons, pour ce calcul rapide, que la contrainte maximum de flexion soit donnée par la formule courante :

$$n=\frac{\text{M}}{\frac{\text{I}}{\text{V}}}=\frac{\text{TL}}{0{,}121\ b\text{ H}^2}=\frac{8{,}26\text{ TL}}{b\text{ H}^2} \text{ (à l'encastrement).}$$

Admettons de même pour contrainte de cisaillement de l'âme :

$$t=\frac{\text{T}}{e\text{ H}}=\frac{\text{T}}{0{,}2\ b\text{ H}}=\frac{5\text{ T}}{b\text{ H}}.$$

Egalons ces deux contraintes maxima aux *contraintes admissibles* à rupture pour le spruce, il vient [1] :

$$n=\frac{8{,}26\text{ TL}}{b\text{ H}^2}=n_{ta}=5{,}53$$

$$t=\frac{5\text{ T}}{b\text{ H}}=t_a=0{,}6.$$

1. — En admettant la valeur qui correspond, en réalité, aux sections rectangulaires pleines (§ 1.32).

De ces deux équations on tire la relation cherchée :

$$\frac{L}{H} = 5{,}57.$$

Quand la « *longueur effective* » de la poutre (c'est-à-dire le rapport M/T) devient inférieure à 5,57 fois la hauteur, *la condition de résistance au cisaillement de l'âme devient prépondérante*. Ce résultat peut être fréquemment atteint en pratique, dans certains cas de calculs de longerons d'ailes, par exemple.

Il est à signaler, au surplus, qu'il est toujours délicat d'approvisionner un plateau de bois bien régulier sur de grandes dimensions.

1.43 Emploi des contreplaqués. — Les difficultés ci-dessus ont conduit à adopter, pour la plupart des longerons utilisés en aviation, des *sections composées de formes caissons* pour lesquelles on utilise comme *âmes* des feuilles de contreplaqués collées à des *semelles* généralement en *spruce* (fig. 5 *a*).

Les *contreplaqués* sont constitués par des feuilles très minces de bois fibreux, appelées *plis*, réunies entre elles par collage à chaud sous pression en ayant soin de *croiser* les fibres des différents plis, à 90° les unes par rapport aux autres. On réalise toujours un nombre impair de plis (cpl. 3 plis, 5 plis, 7 plis). Les essences les plus utilisées en construction aéronautique sont l'*okoumé* et le *bouleau*. Les contreplaqués présentent l'avantage d'une *bonne tenue* au cisaillement, ce qui s'explique simplement en remarquant que le phénomène de fendage est contrarié par la superposition alternée des fibres.

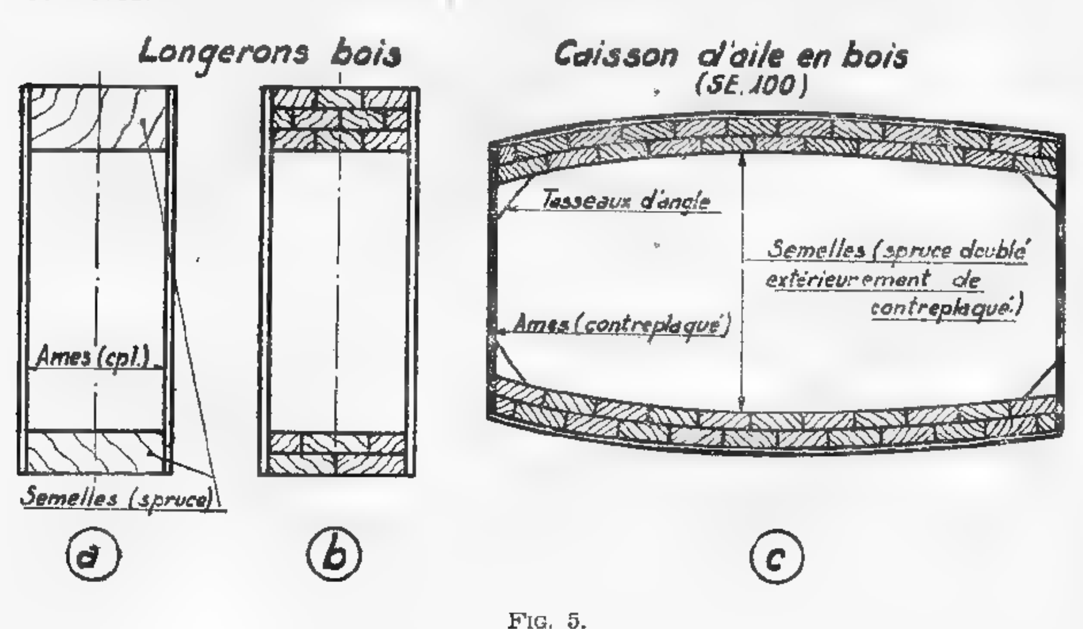


Fig. 5.

Le tableau de la *Planche* 21 résume les *caractéristiques moyennes de résistance au cisaillement des contreplaqués type aviation*. On voit qu'il est toujours avantageux de *disposer les fibres du contreplaqué à 45° par rapport à la direction de l'effort tranchant* (c'est-à-dire par rapport à la direction longitudinale de la poutre [1]).

Les contreplaqués possèdent, par contre, des caractéristiques de résis-

1. — Cette disposition nécessite, par contre, des chutes importantes pour l'approvisionnement quand on ne possède pas des feuilles directement réalisées selon ce principe.

tance aux efforts normaux (traction ou compression) *inférieures* à celles des bois en plateaux (voir tableau *Planche* 21), ce qui fait réserver leur emploi pour les parties subissant essentiellement du cisaillement (âmes de longerons, de nervures, revêtements, etc...).

Remarques. — Nous indiquons également *Planche* 21 les valeurs moyennes des *modules d'élasticité longitudinaux* E *et transversaux* G *des contreplaqués.* Il est à remarquer que les valeurs de E sont faibles vis-à-vis de celles des bois en plateaux. Cette propriété, jointe à celle d'une bonne résistance au cisaillement, permet de doubler par du contreplaqué les semelles en spruce de certaines *structures genre caisson* (fig. 5 *c*). Le contreplaqué transmet alors la majeure partie des efforts de cisaillement, sans subir des contraintes normales exagérées par suite de sa déformabilité normale (module E) plus grande que celle du spruce (voir § **2.** : calcul des pièces hétérogènes).

Il est également à remarquer que *les valeurs de* G *sont très faibles pour un même bois, vis-à-vis de celles de* E (la relation G=0,4 E traduisant la moyenne admise pour les métaux n'est plus satisfaite pour les bois qui ne satisfont pas aux lois générales de l'élasticité). Il en résulte que, dans une poutre en bois fléchie, *les flèches de cisaillement ne sont généralement pas négligeables,* contrairement à ce que nous avions établi au chapitre X pour les poutres métalliques.

1.44 **Fragmentation des semelles.** — Pour remédier à la difficulté d'approvisionnement énoncée ci-dessus, on réalise très souvent les semelles des longerons (ou caissons) en bois par des *lattes* de faibles dimensions transversales réunies entre elles par *collage.* On profite de cette disposition pour *alterner les couches annuelles* de ces lattes. Cette disposition a pour effet de contrarier au maximum le phénomène de fendage qui reste le vice essentiel des constructions en bois. On arrive ainsi à des structures telles que celles représentées sur les figures 5 *b* et 5 *c*.

1.45 **Caractéristiques des collages.** — Les différents collages servant d'assemblages aux structures en bois sont généralement réalisés à froid et sous pression. Leurs *caractéristiques de résistance au cisaillement* varient avec le type de bois et les précautions prises pour effectuer l'opération (notamment le serrage après collage). On peut admettre en pratique les *valeurs moyennes* suivantes (à la rupture) :

— Bois tendre sur bois tendre (spruce sur spruce ou spruce sur cpl okoumé par exemple)

$$t_a = 0{,}3 \text{ à } 0{,}5 \text{ kg/mm}^2.$$

— Bois dur sur bois tendre ou dur (frêne sur spruce ou frêne par exemple)

$$t_a = 0{,}2 \text{ kg/mm}^2.$$

A l'*arrachement*, les collages ont une certaine tenue (bien qu'il ne soit jamais à conseiller de les faire travailler ainsi). On peut admettre, en moyenne

$$n_a = 0{,}1 \text{ kg/mm}^2.$$

Remarque. — Pour réaliser une jonction d'éléments longitudinaux (semelles de longerons par exemple), on réalise des « *collages en sifflets* » en biseautant les extrémités à coller. La pente de ces biseaux se déduit des caractéristiques de résistance.

Exemple (fig. 6). — Pour une *semelle tendue en spruce* où $n_{ta}=7$ kg/mm², on adoptera un angle de biseau tel que la surface de collage soit

environ vingt fois supérieure à la section de l'élément assemblé (pente 1/20[e]) ce qui donnera à la rupture un taux de cisaillement du collage [1]

$$t=\frac{7}{20}=0{,}35\ \text{kg/mm}^2.$$

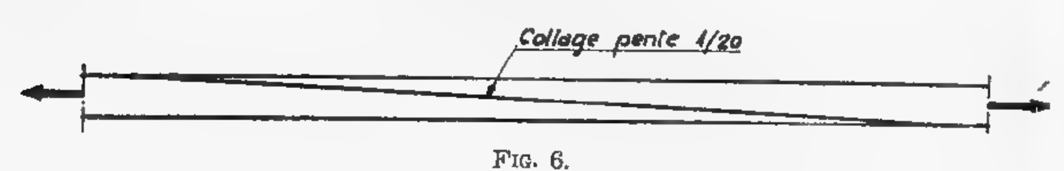


Fig. 6.

1.46 Epaisseurs des semelles. — Le bois résistant mieux à la traction qu'à la compression et les charges prédominantes agissant sur un longeron étant généralement appliquées suivant un sens bien déterminé (bas en haut pour les longerons d'aile), on est conduit à dimensionner des *semelles d'épaisseurs inégales*.

Les essences de bois les plus utilisées pour les semelles sont le *spruce* et éventuellement le *sapin* de pays (qui présente des caractéristiques peu différentes) ou le *peuplier*. On réserve les bois denses et durs tels que frêne, noyer, etc..., pour les tasseaux ou cales devant supporter des efforts de matage (voir ci-après § 1.6).

1.5 CALCUL EN FLEXION, A LA RUPTURE, DES LONGERONS EN BOIS.

1.51 Principe de calcul. — On applique aux sections évidées la *répartition de Prager* envisagée ci-dessus pour les sections pleines et *on néglige la participation des âmes à la flexion.* Cette hypothèse est justifiée non seulement par la faible section des âmes vis-à-vis de celle des semelles mais aussi par suite de leur « participation réduite » aux contraintes normales provenant de ce que les modules d'élasticité E des contreplaqués sont faibles vis-à-vis de ceux des bois en plateaux (remarque § 1.43).

On pose encore les deux équations d'équilibre :

projection : $\Sigma n_c \Delta S = C = \Sigma n_t \Delta S = T$ (valeurs absolues)
moment : $Td = M_a$.

Deux cas peuvent se présenter, selon les épaisseurs relatives des semelles vis-à-vis de la hauteur Z du point de brisure :

a) la semelle comprimée travaille entièrement au taux n_{ca} (fig. 7 *b*),
b) une partie seulement de la semelle comprimée travaille à ce taux (fig. 7 *c*).

La forme des équations varie selon le cas considéré.

1.52 Abaques. — Les calculs étant assez longs, sinon compliqués, nous donnons **Planche 22,** deux *abaques* pratiques permettant le calcul rapide des longerons rectangulaires en bois [2]. *Ces abaques sont établis pour le cas* (le plus fréquent) où

$$\alpha=\frac{n_{ta}}{n_{ca}}=2 \text{ (spruce par exemple).}$$

1.521 *Notations.* — Ces abaques utilisent les notations suivantes (répétées sur la planche 22).

---

1. — Pour une semelle comprimée on peut adopter une pente deux fois plus forte (pente 1/10). On renforce souvent les sections des semelles au niveau des collages pour éviter des sifflets trop allongés.

2. — Référence : STAé 659 B. C 1.

Dimensions :

e=épaisseur de la semelle comprimée, b=largeur des semelles,
H=hauteur extérieure du longeron, e'=épaisseur de la semelle tendue.

Contraintes admissibles :

compression : n_{ca} **traction** : $n_{ta}=2\,n_{ca}$.

Paramètres sans dimension :

$\mu=\frac{e}{e'}=\frac{\text{épaisseur semelle comprimée}}{\text{épaisseur semelle tendue}}$

$\delta=\frac{e'}{H}$ =épaisseur relative de la semelle tendue

$\gamma=\frac{e}{H}$ =épaisseur relative de la semelle comprimée

$\Delta=\frac{e+e'}{H}=\delta+\gamma=\frac{\text{hauteur remplie}}{\text{hauteur totale}}$ =« coefficient de remplissage »

$\beta=\frac{H-e-e'}{H}=1-\gamma-\delta=1-\Delta=\frac{\text{hauteur vide}}{\text{hauteur totale}}$ =« coefficient d'évidement »

$\eta=\frac{H}{Z}$ =hauteur relative du point de brisure de la courbe des tensions

$\Phi=\frac{M_a}{b\,H^2\,n_{ca}}$ =paramètre de charge admissible.

Dans ce dernier paramètre, M_a désigne le *moment fléchissant admissible à la rupture* [1] :

$$M_a=\Phi b\,H^2\,n_{ca}$$

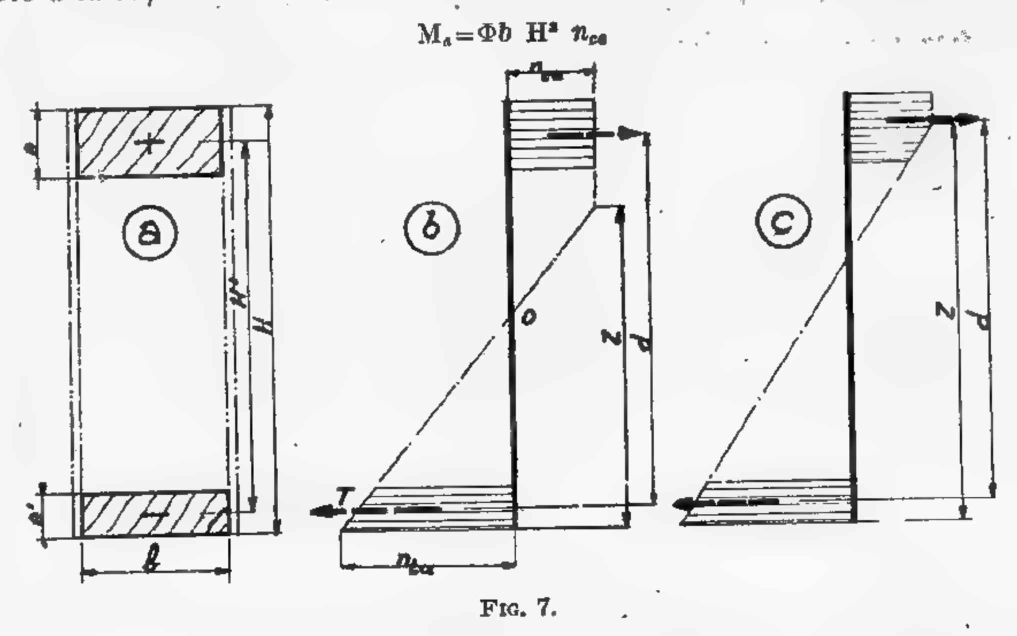


FIG. 7.

1.522 *Abaque n° 1 : Vérification des sections.* — On connaît alors toutes les dimensions de la section et l'on veut vérifier si cette section *tient sans rupture* le moment M qui lui est appliqué [2].

1. - Le moment admissible est donné dans un système d'unités homogène à celui des grandeurs du second membre. *Exemple :* M_a est en mmkg si b et H sont en mm et n_{ca} en kg/mm².

2. — Il convient de remarquer que l'abaque ne permet pas de connaître la contrainte réelle.

On porte en abscisses le paramètre μ et l'on élève en ce point une *verticale* jusqu'au point de rencontre avec la « courbe de remplissage » Δ qui correspond au cas étudié.

En cheminant *horizontalement* à partir de ce point, on lit sur l'échelle des ordonnées la valeur du « paramètre de charge admissible » (l'abaque est gradué en 1000 Φ pour faciliter les notations).

On en déduit la valeur de M_a à l'aide de l'expression ci-dessus et l'on doit avoir :

$$M_a \geqslant M.$$

Remarque. — La courbe sinueuse joignant les points de brisure des courbes Δ figure le passage de la répartition figure 7 *b* à la répartition figure 7 *c*. Le domaine compris en-dessous de cette courbe correspond à la répartition 7 *b*, c'est-à-dire à $\eta < 1 - \gamma$.

1.523 *Abaque n° 2 : Détermination du « longeron optimum ».* — Etant données les dimensions extérieures H et b et le moment fléchissant appliqué M (au coefficient de rupture) cet abaque permet d'obtenir les épaisseurs e et e' à donner aux semelles pour que l'on ait à la fois $M_a = M$ et un *poids minimum de construction* [1].

On connaît donc le coefficient $\Phi = \dfrac{M}{b\, H^2\, n_{ca}}$.

On porte cette valeur en ordonnée à droite de l'abaque et l'on trace à partir de ce point une *horizontale* jusqu'au point de rencontre avec la courbe Φ. Une *verticale* passant par ce point définit sur leurs différentes courbes les valeurs de tous les autres paramètres et en particulier de

δ (échelle de gauche) permettant d'obtenir $e' = \delta\, H = \text{ep}^r$ sem. tendue,
γ (échelle de droite) permettant d'obtenir $e = \gamma\, H = \text{ep}^r$ sem. comprimée.

Remarque. — La courbe des Δ optima (valeurs minima de Δ) est tracée sur l'abaque n° 1 où elle se situe au-dessus de la courbe des brisures. On voit ainsi que la répartition optimum correspond toujours au cas de la figure 7 *c*.

1.53 Opérations pratiques de dimensionnement d'un longeron en bois. — Dans le cas d'un longeron d'aile, par exemple, on connaît en chaque section le *moment fléchissant M maximum maximorum* qui a généralement lieu dans le « sens porteur » (vol normal) et le moment M′ maximum et de *signe contraire* (vol sur le dos).

On commence par définir le « longeron optimum » à l'aide de l'abaque n° 2. On vérifie ensuite si ce longeron est satisfaisant en flexion suivant le moment M′ à l'aide de l'abaque n° 1 (la semelle tendue devenant comprimée et vice-versa). Dans le cas contraire, on renforce le longeron en procédant par approximations à l'aide de l'abaque n° 1 [2].

1.54 Application numérique.

1.541 *Données.*

Soit à dimensionner les semelles d'un *longeron de planeur* à sa section d'encastrement sur fuselage, étant données les caractéristiques et les charges appliquées suivantes :

H = 240 mm b = 115 mm
M = 3800 mkg (vol normal : semelle inférieure tendue)
M′ = — 2000 mkg (vol sur le dos : semelle supérieure tendue)
Semelles en spruce : $n_{ca} = 3{,}5$ kg/mm² ; $n_{ta} = 7$ kg/mm².

---

1. — Ce poids minimum correspond au minimum de Δ compatible avec la condition de résistance. L'abaque s'établit en exprimant les différents paramètres en fonction de Δ et en dérivant par rapport à cette variable.

2. — On sait alors que le longeron optimum n'est pas compatible avec le système de charges appliquées.

1.542 *Longeron optimum en vol normal.*

$$\Phi = \frac{3800 \cdot 10^3}{115 \cdot 240^2 \cdot 3{,}5} = 0{,}164$$

$$1000\,\Phi = 164$$

d'où d'après l'*abaque n° 2, Planche 22* (construction indiquée)

$$\Delta = 0{,}3\ ; \qquad \delta = 0{,}1075 \qquad \text{et} \qquad \gamma = 0{,}1925\ ;$$

on obtient donc les *épaisseurs optima* suivantes :

semelle inférieure (tendue) : $e' = \delta H = 0{,}1075 \cdot 240 = 25{,}8$ mm
semelle supérieure (comprimée) : $e = \gamma H = 0{,}1925 \cdot 240 = 46{,}2$ mm.

Le « coefficient de remplissage » Δ a pour valeur

$$\Delta = 0{,}3 \text{ (abaque)}$$

$$\left(\text{Vérification} : \Delta = \frac{25{,}8 + 46{,}2}{240} = \frac{240}{72} = 0{,}3.\right)$$

1.543 *Vérification en vol sur le dos.*

On a alors en tenant compte de l'inversion du sens des efforts :

$$\mu = \frac{25{,}8}{46{,}2} = 0{,}558 \qquad \text{avec} \qquad \Delta = 0{,}3$$

d'où en utilisant l'*abaque n° 1, Planche 22* (construction indiquée)

$$1000\,\Phi = 100 \qquad \text{soit} \qquad \Phi = 0{,}3$$

d'où un moment admissible à rupture (signe négatif)

$$M_a = -0{,}1 \cdot 115 \cdot 240^2 \cdot 3{,}5 = 232 \cdot 10^4 \text{ mmkg}$$
$$M_a = -2320 \text{ mkg.}$$

On a donc, en valeur absolue, $M_a > M$ (avec $M = 2000$ mkg).

Le longeron optimum convient en vol sur le dos où il présente une *marge de sécurité à rupture* de

$$100\,\frac{2320 - 2000}{2000} = 16\%$$

Remarque. — L'abaque n° 2 permet de lire :

$$\eta = 0{,}812 \qquad \text{d'où} \qquad 1 - \eta = 0{,}188 < \gamma \qquad \text{avec} \qquad \gamma = 0{,}1925.$$

Le point de brisure de la courbe de répartition se trouve donc, en vol normal, à l'intérieur de la semelle comprimée (semelle supérieure) à une distance de

$$0{,}188 \cdot 240 = 45 \text{ mm du haut du longeron.}$$

1.6 CISAILLEMENT DE FLEXION DANS LES POUTRES EN BOIS.

1.61 Méthode de calcul. — La *loi de répartition de l'effort tranchant* se trouve, en toute rigueur, modifiée par rapport à celle de la flexion plane ordinaire, étant donnée l'allure non linéaire de la répartition des tensions.

Le calcul exact de cette répartition serait très ardu et devrait être effectué dans chaque cas particulier.

Aussi se contente-t-on, généralement, d'appliquer la formule classique établie au chapitre IX, paragraphe 3.52.

$$t = \frac{T}{I}\,\frac{W}{l}.$$

Dans le cas des *longerons-caissons à âmes minces en contreplaqué*, il suffit, plus simplement, d'admettre une égale répartition de T le long des âmes (ce qui est du reste conforme à l'hypothèse de calcul des semelles).

On a alors

$$t = \frac{T}{H'a}$$

avec H′= « hauteur équivalente » des âmes $\approx H - \frac{e+e'}{2}$ (fig. 7 et chap. IX, § 7.31) et a=épaisseur totale des deux âmes.

1.62 Application numérique.

Reprenons les données du paragraphe 1.54 et cherchons à *dimensionner les âmes*, celles-ci étant prévues en *contreplaqué okoumé disposé à* 45°.

Effort de cisaillement total (comprenant l'effort tranchant réduit et la composante due à la torsion générale de l'aile) :

$$T = 2.800 \text{ kg.}$$

Hauteur équivalente des âmes :

$$H' = 240 - \frac{46,2+25,8}{2} = 204 \text{ mm.}$$

Contrainte de cisaillement admissible à rupture :

$$t_a = 2,2 \text{ kg/mm}^2 \text{ (Planche 21).}$$

Epaisseur totale nécessaire des âmes :

$$a = \frac{T}{H't_a} = \frac{2800}{204 \cdot 2,2} = 6,25 \text{ mm.}$$

On utilisera, comme âmes, deux feuilles de contreplaqué trois plis d'épaisseur

e=3,2 mm (épaisseur standard aéronautique).

Vérification du collage des âmes aux semelles. — L'effort de cisaillement (glissement longitudinal) à transmettre par chaque âme à chaque semelle a pour valeur, par unité de longueur du longeron

$$\tau \approx \frac{T}{2H'} = \frac{2800}{2 \cdot 204} = 6,85 \text{ kg/mm.}$$

En admettant une égale répartition de cet effort sur chaque hauteur de collage (épaisseurs des semelles fig. 7) on obtient les contraintes de cisaillement suivantes :

$$\text{semelle supérieure : } t_s = \frac{\tau}{e} = \frac{6,85}{46,2} = 0,15 \text{ kg/mm}^2$$

$$\text{semelle inférieure : } t_i = \frac{\tau}{e'} = \frac{6,85}{25,8} = 0,265 \text{ kg/mm}^2.$$

Remarque. — Dans les cas de caissons profonds, tels que celui de la figure 5 *c*, on est conduit à utiliser des *tasseaux d'angle* pour augmenter les surfaces de collage âmes-semelles qui seraient insuffisantes.

1.7 FIXATION DES FERRURES SUR LES BOIS.

La fixation d'une attache concentrée sur une poutre en bois demande toujours à être étudiée avec soin par suite de la faible résistance au matage des bois courants, et de la tendance au fendage amorcée par les trous des éléments de fixation.

Nous donnons ci-dessous quelques indications pratiques extraites de la Publication américaine A. N. C. 5 (traduction française G. R. A. n° T-E 2, 1938).

1.71 Résistance au matage des boulons dans le bois. — Nous donnons *Planche* 23 deux abaques pratiques permettant d'obtenir directement la *charge admissible au matage dans le spruce* pour des boulons en acier ou en duralumin.

L'*abaque n° 1* correspond au cas d'efforts P dirigés parallèlement aux fibres du bois et l'*abaque n° 2* à celui d'efforts Q perpendiculaires (fig. 8). On voit que la résistance au matage dans le sens des fibres (compression axiale) est nettement plus élevée que celle dans le sens perpendiculaire (compression radiale).

La *Planche* 23 indique les *coefficients correcteurs* à apporter pour quelques essences différentes du spruce. Dans le cas d'efforts N faisant un angle θ avec la direction des fibres, la charge admissible est donnée par la formule

$$N_a = \frac{P_a \cdot Q_a}{P_a \sin^2\theta + Q_a \cos^2\theta}.$$

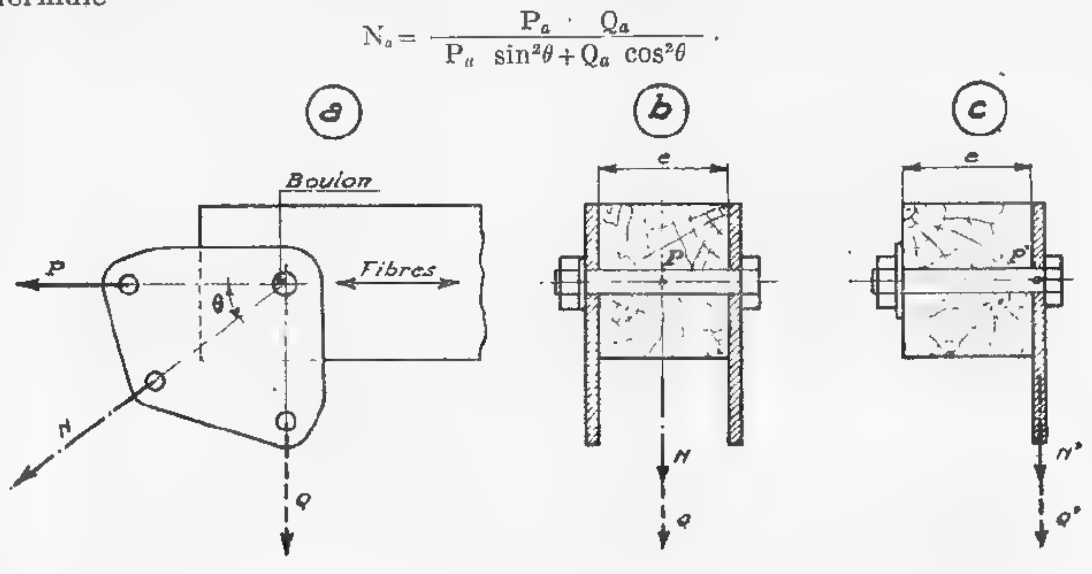


FIG. 8.

Toutes ces charges sont données pour *un boulon* et correspondent à des valeurs de *rupture*. Elles supposent, de plus, que la charge agit *symétriquement* sur le boulon (cas de la figure 8 *b*.) Dans le cas de charges P', Q' ou N' *entièrement déportées* (fig. 8 *c*) admettre la *moitié* des valeurs P_a, Q_a *ou* N_a.

Quand un assemblage comporte plusieurs boulons, on admet que chacun d'eux peut supporter la charge définie par les abaques d'où la résistance totale par addition de ces résistances partielles.

1.72 **Espacement des boulons.** — Les différents boulons de fixation d'une ferrure doivent être suffisamment éloignés du bord libre de la pièce à fixer et suffisamment écartés entre eux pour éviter l'arrachement du bois (fendage).

L'*abaque n° 3* de la *Planche* 23 donne les *intervalles minima* D, en fonction de l'épaisseur *e* de la pièce de bois (spruce) et du diamètre *d* des boulons. Ce diagramme correspond à une sollicitation *dans le sens des fibres*. Quelques coefficients correcteurs y sont indiqués pour des essences autres que le spruce.

2. CALCUL DES POUTRES HÉTÉROGÈNES

2.1 DEFINITION.

La méthode de calcul exposée succinctement ci-après s'applique aux poutres constituées par des *matériaux différents* (modules d'élasticité E différents) *liés intimement entre eux* de telle sorte qu'il n'y ait aucun glissement relatif entre ces différents matériaux.

L'exemple le plus courant est celui des *poutres en béton armé* qui comprennent des armatures métalliques noyées à l'intérieur du béton (fig. 9 *b*). Ces armatures, destinées à résister principalement aux efforts de traction, font corps avec le béton qui adhère puissamment sur leurs surfaces lors de de sa solidification.

C'est également le cas d'un caisson en bois tel que celui de la figure 5 *c* ci-dessus, où les semelles en spruce sont doublées extérieurement de contreplaqué collé sur toute leur surface. La méthode ci-dessous s'apparente intimement à celle donnée au chapitre VII, paragraphe **6.3**, lors de l'étude des assemblages cisaillés hétérogènes.

C'est une méthode valable exclusivement dans le *domaine élastique* des matériaux utilisés.

2.2 TRACTION OU COMPRESSION SIMPLE.

Considérons (fig. 9 *a*) la section droite d'une poutre hétérogène soumise à un effort normal N de traction ou de compression. Cette section comprend deux matériaux de caractéristiques suivantes :

matériau 1 : module d'élasticité E_1 surface occupée S_1
matériau 2 : module d'élasticité E_2 surface occupée S_2.

La *section apparente de l'ensemble vaut donc*

$$S_a = S_1 + S_2.$$

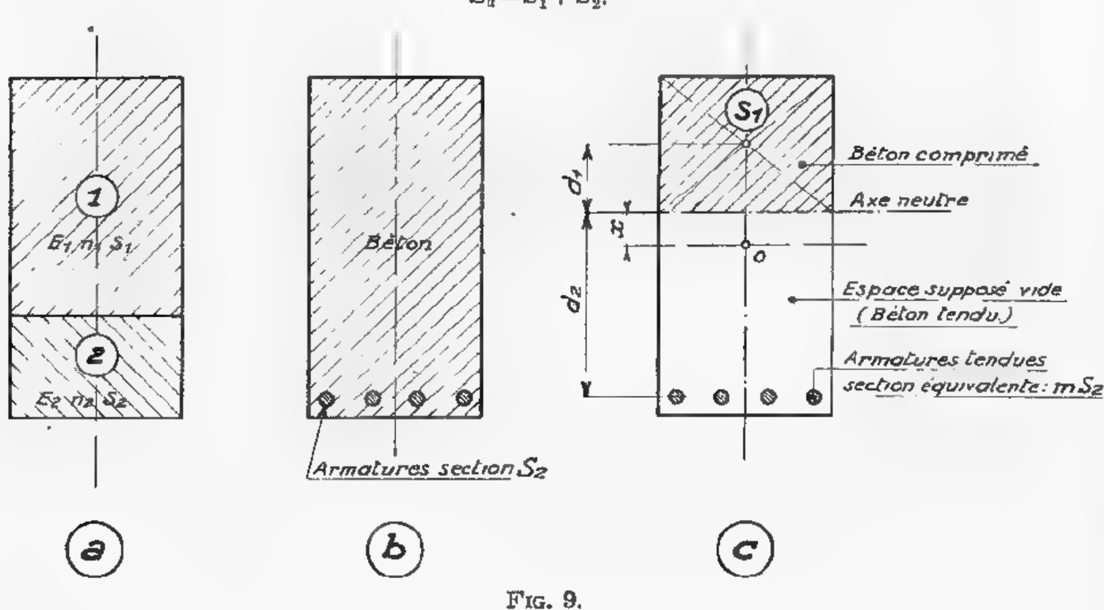


FIG. 9.

L'hypothèse essentielle de calcul consiste à admettre, comme étant toujours valable, la *loi de Bernoulli* (conservation des sections planes).

Les matériaux 1 et 2 subissent alors les mêmes *allongements relatifs i* dans chaque section droite.

On a donc, d'après la *loi de Hooke :*

Contrainte normale matériau 1 : $n_1 = E_1\, i$
Contrainte normale matériau 2 : $n_2 = E_2\, i$

d'où

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{E_1}{E_2}.$$

Les contraintes normales sont proportionnelles, dans chaque section, aux modules d'élasticité longitudinaux respectifs de chacun des matériaux.

Désignons par m le rapport

$$m = \frac{E_1}{E_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

On a donc

$$n_1 = m\ n_2.$$

Ecrivons l'équilibre entre les efforts internes et externes, il vient

$$n_1\ S_1 + n_2\ S_2 = N$$

soit $$n_2\ (m\ S_1 + S_2) = N$$

d'où $$n_2 = \frac{N}{m\ S_1 + S_2} \quad \text{et} \quad n_1 = m\ n_2.$$

Nous avons ainsi réduit le problème au calcul d'une *poutre fictive de matériau* 2 en remplaçant la section apparente S_a par une *section équivalente en matériau* 2 [1] :

$$S_e = m\ S_1 + S_2.$$

Le coefficient m qui figure toujours le rapport

$$m = \frac{\text{module d'élasticité matériau considéré}}{\text{module d'élasticité matériau équivalent}}$$

se désigne généralement par *coefficient amplificateur* du matériau considéré [2].

2.3 FLEXION.

En flexion, la démonstration est semblable. On réduit toujours l'ensemble hétérogène à un *ensemble homogène équivalent* en jouant, comme au paragraphe précédent, sur les *sections* à l'aide du coefficient amplificateur.

Les *moments d'inertie* des sections sont à déterminer à l'aide des sections fictives équivalentes.

Les contraintes déterminées à l'aide de ces moments d'inertie fictifs sont à majorer dans le rapport m pour les matériaux autres que ceux constituant l'équivalence.

2.4 APPLICATION AU BÉTON ARMÉ.

On a alors un rapport (coefficient amplificateur des armatures)

$$m = \frac{E\ \text{acier}}{E\ \text{béton}} = 12 \text{ à } 15.$$

On ne compte aucunement sur le béton pour transmettre les efforts de traction. On arrive ainsi à des *sections travaillantes* en flexion du genre de celle de la figure 9 *c*. L'axe neutre (par rapport auquel doit être évalué le moment d'inertie équivalent) se détermine de telle façon qu'il y ait égalité des moments statiques des surfaces équivalentes situées de part et d'autre, soit (fig. 9 *c*) :

$$S_1\ d_1 = m\ S_2\ d_2.$$

---

1. — Nous aurions tout aussi bien pu réduire l'ensemble à une section équivalente de matériau 1 en posant $m = \frac{E_2}{E_1}$.

2. — Il joue en effet le rôle de multiplicateur des *sections* et des *contraintes* afférentes à ce matériau.

Il existe des méthodes graphiques directes à ce sujet. On les trouvera dans les nombreux ouvrages spécialisés traitant du calcul des constructions en béton armé.

Les contraintes fictives trouvées pour « le béton équivalent » aux armatures sont à multiplier par m pour obtenir les contraintes réelles de ces armatures.

CHAPITRE XIII

TORSION

Théorie et Applications

0. INTRODUCTION

Nous verrons ci-après que la résistance des matériaux courante ne fournit la solution des problèmes de torsion que dans certains cas très particuliers que l'on doit se garder de généraliser.

Les cas les plus complexes s'étudiant à l'aide de la théorie générale de l'élasticité, nous avons dû nous limiter à l'exposé des résultats pratiques auxquels on aboutit.

Nous avons réservé une large part à l'étude de la torsion des corps creux à parois minces qui présentent un intérêt particulier en construction aéronautique.

Nous avons également abordé l'étude de la torsion des poutres de sections minces ouvertes. Des renseignements complémentaires seront donnés sur ce dernier point au chapitre XXII.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1 DÉFINITIONS.

On dit qu'une poutre prismatique travaille en *torsion* quand elle est soumise à l'action de *moments* qui tendent à faire tourner ses sections droites *autour d'un axe longitudinal* de la poutre [1].

Cet axe longitudinal se nomme l'*axe de torsion de la poutre*. Il rencontre le plan de chaque section droite en des points nommés *centres de torsion* de ces sections.

C'est par rapport à ces points qu'il y a lieu d'effectuer la *réduction des efforts* agissant d'un même côté des sections droites envisagées : opération que nous avons appris à faire dès le chapitre V, paragraphe 1.4. Nous définirons ci-après la position de ces centres de torsion (§ 1.5).

Nous savons que le *moment de torsion* M_t agissant sur une section droite donnée est un moment dont le *vecteur représentatif est normal au plan de cette section droite*. (Il se trouve donc confondu avec l'axe de torsion.) En d'autres termes, les *composantes* de couple équivalentes au moment de torsion sont *parallèles aux plans des sections droites* (alors que celle de flexion étaient normales aux plans de ces sections).

---

1. — On voit ainsi la différence essentielle qui existe entre ce mode de sollicitation et la flexion où chaque section droite tournait autour d'un axe transversal contenu dans son plan. Cette différence est mise en évidence par les figures 1 *a* et 1 *b*.

Il résulte de ces considérations que la torsion engendrera essentiellement des *contraintes tangentielles* dues au *glissement par rotation* des différentes sections droites les unes sur les autres.

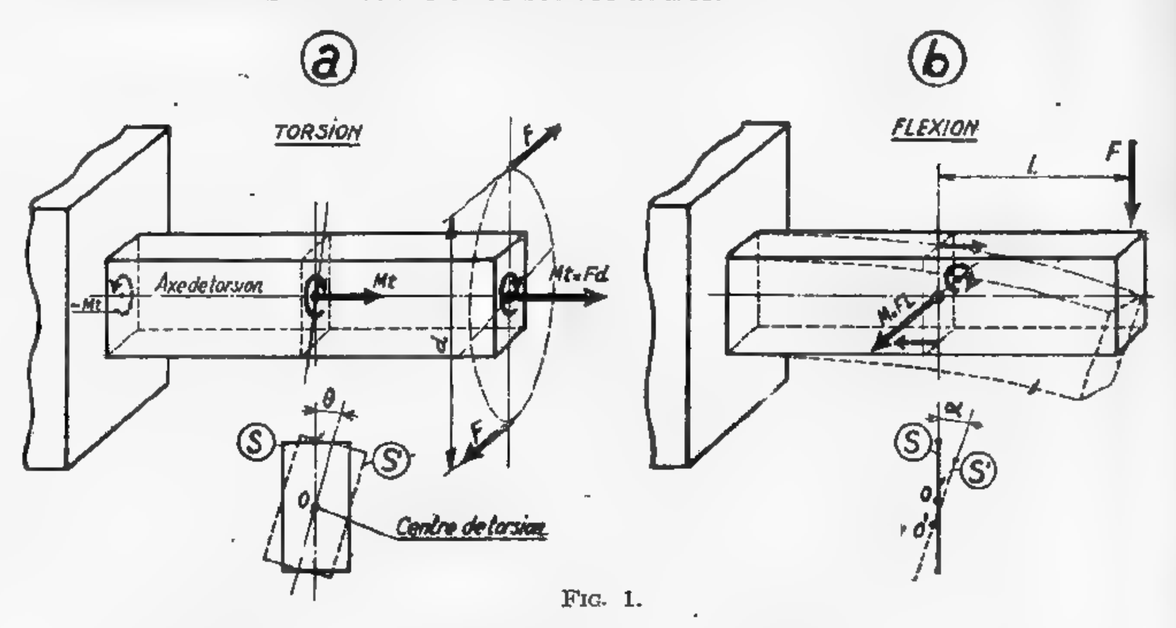


Fig. 1.

1.2 CONDITION DE RÉALISATION DE LA TORSION PURE.

Pour engendrer un état de torsion pure, il est nécessaire de solliciter les éléments étudiés par des *couples purs axés sur l'axe de torsion*, ces sollicitations comprenant les forces appliquées et les réactions. Il est aisé de voir que, dans le cas contraire, la torsion s'accompagnerait d'une flexion due, par exemple, à la propagation d'un effort tranchant.

Les figures 2 *a* et 2 *b* donnent deux exemples de réalisation d'une sollicitation en torsion pure d'un arbre OO′ (dans le cas de la figure 2 *b* on peut admettre que la perturbation due à T = F, disparaît à l'extérieur des paliers très rapprochés à cet effet).

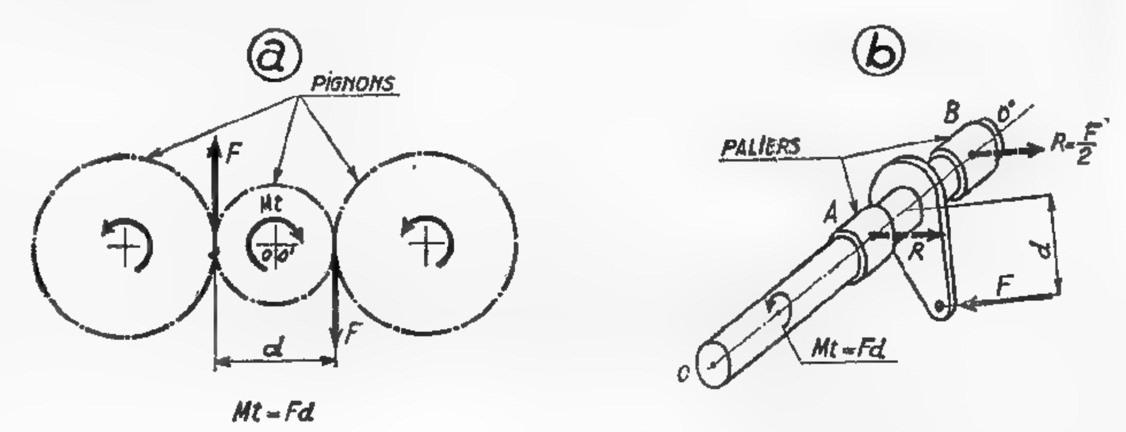


Fig. 2.

On voit également qu'il est nécessaire que l'*axe de torsion* (et donc la « fibre moyenne » de la poutre prismatique) soit *rectiligne*. Dans le cas contraire, le couple M_t agissant dans une section se décomposerait en une flexion et une torsion dans les sections suivantes non parallèles.

1.3 CLASSIFICATION.

Nous distinguerons deux types principaux de torsion différant entre eux par *l'allure des déformations* des poutres auxquelles ils s'appliquent.

1.31 Torsion plane (*ou simple*). — Dans ce cas, après déformation (rotation autour de l'axe de torsion) *les sections droites restent planes et parallèles entre elles*. Les sections tendent donc uniquement à *glisser par rotation* les unes sur les autres, ce qui permet de conclure qu'il n'existera que des *contraintes tangentielles* (cisaillement de torsion) *quel que soit le mode de fixation des extrémités.*

L'expérience et la théorie[1] *montrent que ce cas de torsion n'est satisfait que pour les poutres prismatiques à base circulaire* (arbre cylindrique plein ou creux, poutre conique, etc...)[2].

1.32 Torsion gauche (*ou complexe*). — Dans ce cas, les sections droites initialement planes ne le sont plus après rotation de torsion : *elles se gauchissent en tournant autour de l'axe de torsion.*

C'est le *cas général de toutes les poutres de sections droites non circulaires*. Il y a lieu pour étudier ce cas d'envisager deux conditions de réalisation dépendant de la liberté laissée au gauchissement des sections droites.

a) *Si l'on ne s'oppose pas au gauchissement* de ces sections, celles-ci ne subissent encore que des contraintes tangentielles. Nous désignerons cet état de torsion par *torsion gauche libre ;*

b) Si au contraire *on s'oppose au gauchissement* d'une ou de plusieurs sections droites de la poutre, cet assujettissement entraîne des *contraintes normales* et modifie profondément la résistance à la torsion. Nous désignerons ce nouvel état par *torsion gauche non libre* (ou *torsion-flexion* dans le cas des profilés minces).

1.4 PLAN D'ETUDE.

L'étude de ces différents phénomènes de torsion sera conduite en étudiant séparément :

— La torsion des poutres de sections massives (ou pleines) ;
— La torsion des poutres de sections minces (fermées ou ouvertes)

1.5 POSITION DE L'AXE DE TORSION.

Nous nous limiterons ici au cas des poutres prismatiques rectilignes de sections constantes ou d'évolution homothétique. Nous reviendrons sur cette question d'une façon plus générale au chapitre XX lors de la définition des axes de référence d'une structure.

1.51 Sections de formes quelconques. — Nous avons défini ci-dessus l'axe de torsion d'une poutre comme étant l'*axe de rotation* de ses différentes sections droites, au cours d'une déformation de la poutre en torsion pure.

On démontre en élasticité que *le centre de torsion et le centre de cisaillement sont confondus.*

Pour une poutre prismatique rectiligne, l'axe de torsion est donc matérialisé *par la droite joignant les centres de cisaillement de ses diverses sections droites.*

1.52 Cas particuliers.

1.521 Si les sections droites d'une poutre rectiligne possèdent un *centre de symétrie* (sections circulaires rectangulaires, etc...), l'axe de torsion sera donc matérialisé par la droite joignant ces centres de symétrie, puisqu'ils sont également centres de cisaillement. *Quand une poutre possède un axe géométrique, son axe de torsion est donc confondu avec cet axe géométrique.*

1. — Théorie de l'élasticité.

2. — Nous verrons cependant qu'il se trouve également réalisé pour certaines poutres creuses à parois minces, de sections non circulaires.

1.522 Nous avons vu au chapitre XI que les centres de cisaillement des sections pleines massives étaient généralement assimilés aux centres de gravité de ces sections. *L'axe de torsion des poutres de sections massives peut donc être confondu avec la droite joignant les centres de gravité de ses sections.*

2. TORSION PLANE DES POUTRES PRISMATIQUES PLEINES

2.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, il est nécessaire pour obtenir l'état de torsion plane envisagé que les poutres prismatiques soient à *base circulaire*. Toutes les *sections droites* seront donc des *cercles pleins*, dans le cas qui nous occupe.

Il est à remarquer que la démonstration simple donnée ci-après ne fait pas ressortir cette nécessité [1]. C'est ce qui peut expliquer que les résultats de cette démonstration soient souvent (à tort) généralisés à d'autres formes de sections, dans de trop nombreux traités de résistance des matériaux.

2.1 EQUATION DE RESISTANCE.

Considérons (fig. 3) une poutre prismatique pleine à *base circulaire soumise à une torsion pure*. L'axe de révolution xx' est alors évidemment l'*axe de torsion*.

Considérons, dans cette poutre, un petit élément de volume cylindrique de rayon r, d'axe OO′, confondu avec xx', limité par deux sections droites S et S′ très voisines, distantes de Δx. Soit M_t le moment de torsion appliqué dans cet intervalle.

Isolons une « fibre » de ce cylindre élémentaire qui, initalement, est dans la position MN. Elle vient en M′N′ après la rotation de torsion due au moment M_t. Menons par M′ la parallèle $M'N'_1$ à MN. NN′ est par hypothèse un arc de cercle de rayon r. La courbe M′N′ est un *arc d'hélice* qu'on peut assimiler à un segment de droite, confondu avec la corde de cet arc, la distance Δx étant très petite.

Posons

$$\Delta\theta = \text{angle } \widehat{N'_1\, O'\, N'} \text{ (angle de rotation de torsion entre S et S').}$$

Nous aurons

$$\text{arc } \widehat{N'_1\, N'} = r\,\Delta\theta \text{ (l'angle étant exprimé en radians).}$$

Posons d'autre part

$$j = \text{angle } \widehat{N'_1\, M'\, N'} \text{ (angle de rotation de la fibre MN).}$$

Nous aurons $\quad \operatorname{tg} j = \dfrac{N'N'_1}{M'N'_1} \approx \dfrac{N'N'_1}{\Delta x}$

l'angle j étant très petit, nous pouvons confondre sa mesure (en radians) avec sa tangente et écrire

$$\widehat{N'\,N'_1} = j\,\Delta x.$$

Finalement $\quad \widehat{N'\,N'_1} = j\,\Delta x = r\,\Delta\theta$

d'où $\quad j = r\,\dfrac{\Delta\theta}{\Delta x}.$

Posons $\quad j = kr.$

Le rapport $k = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta x}$ est une *constante pour la section S′ considérée.*

1. — Cette démonstration se conduit en effet en partant de l'hypothèse supposée réalisée d'une torsion plane.

(Nous supposons, en effet, pour rester dans l'hypothèse de la torsion plane, que tous les éléments de la section S′ tournent ensemble et du même angle $\Delta\theta$ par rapport à la section S supposée fixe.)

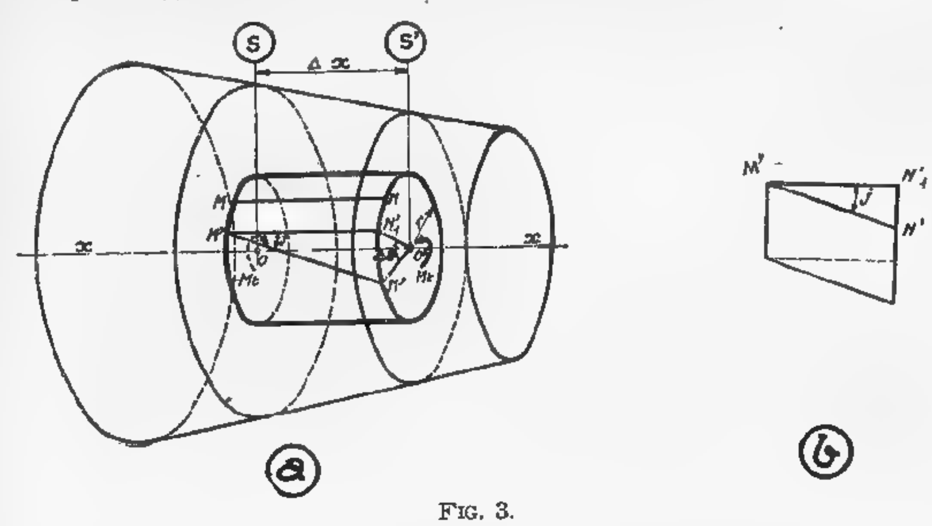


FIG. 3.

Nous allons déterminer cette constante k. On se rend compte aisément que j représente l'*angle de glissement* de la section S′ sur la section S [1].

Or, d'après la *loi de Hooke* (voir chap. V), la *contrainte tangentielle* dans la section S′ est reliée à j par l'expression fondamentale

$$t = G\,j$$

G étant le module d'élasticité transversal.

On a donc $$t = G\,k\,r.$$

Ecrivons l'équilibre entre les forces intérieures et extérieures :

Soit ΔS un élément de surface très petit de la section S′ entourant la fibre M′N′ qui subit la contrainte t (voir fig. 3 c). La *force tangentielle* qui s'exerce sur cet élément est

$$f = t\,\Delta S = G\,k\,r\,\Delta S.$$

Le *moment* de cette force par rapport à O′ est

$$\Delta\,M_t = f \cdot r = G\,k\,r^2\,\Delta S.$$

La *somme* de tous ces *moments élémentaires*, c'est-à-dire le moment de toutes les forces élémentaires $t\Delta S$ pour la section S′, doit être égal au moment de torsion appliqué M_t pour que l'équilibre soit réalisé.

Donc $$M_t = \Sigma\,\Delta\,M_t = \Sigma\,G\,k\,r^2\,\Delta S = G\,k\,\Sigma\,r^2\,\Delta S.$$

Or, *le moment d'inertie polaire* de la section S′ par rapport au centre O′ est par définition (voir chap. II, § 8.61)

$$I_0 = \Sigma\,r^2\,\Delta S$$

Donc $$M_t = G\,k\,I_0$$

d'où $$k = \frac{M_t}{G\,I_0}.$$

La *contrainte tangentielle* au niveau de la fibre MN est alors

$$\boxed{t = \frac{M_t}{I_0}\,r.}$$

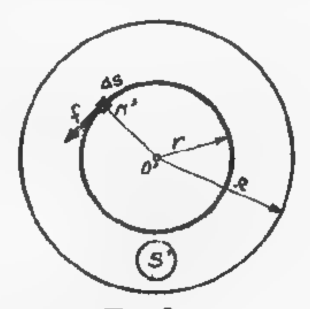


FIG. 3 c.

1. — Comparer la figure 3 b avec les figures 1 et 2 du chapitre VIII ayant servi à la définition de j.

La *contrainte tangentielle* en un point considéré d'une section est donc *proportionnelle à la distance r de ce point au centre de cette section.*

En désignant par R le rayon de la poutre dans une section S, la contrainte maximum dans cette section sera donc

$$t_{max} = \frac{M_t}{I_0} R$$

soit [2]

$$\boxed{t_{max} = \frac{M_t}{\frac{I_0}{R}}} \quad [1]$$

$\frac{I_0}{R}$ *est le module d'inertie polaire ou module de torsion* de la section considérée.

L'axe xx' de la poutre est un *axe neutre en torsion.*

2.2 EQUATION DE DÉFORMATION.

2.21 Expression générale. — Nous avons établi ci-dessus l'expression suivante

$$k = \frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{M_t}{G\ I_0}$$

qui nous donne immédiatement la valeur de l'*angle élémentaire de rotation* $\Delta\theta$ entre deux sections S et S' très voisines distantes de Δx :

$$\Delta\theta = \frac{M_t}{G\ I_0} \Delta x$$

La *rotation relative* de deux sections quelconques est donc la *somme des angles élémentaires* correspondant à tous les éléments Δx compris dans l'intervalle, soit

$$\boxed{\theta = \sum \frac{M_t}{G\ I_0} \Delta x}$$

équation générale de déformation où aucun terme n'est supposé constant.

On peut obtenir la variation de θ en *intégrant graphiquement* la courbe $\frac{M_t}{G\ I_0}$ le long de la dimension longitudinale de la pièce [2].

2.22 Cas particuliers.

2.221 *Si le produit* $G\ I_0$ *est constant* (cas d'un cylindre de révolution isotrope soumis à un moment de torsion variable), on a

$$\theta = \frac{1}{G\ I_0} \Sigma\ M_t\ \Delta x.$$

Il suffit d'intégrer graphiquement la courbe M_t le long de la poutre et de diviser le résultat par $G\ I_0$.

2.222 *Si le produit* $G\ I_0$ *est constant et si, de plus, le moment* M_t *est*

1. — Cette formule présente une analogie complète avec celle de la *flexion plane* où I_0 est simplement remplacé par I (moment d'inertie autour de l'*axe* de flexion) et R par V (distance de la fibre la plus éloignée de l'axe neutre).

2. — Si l'on désire simplement connaître la *rotation relative de deux sections considérées*, il suffit de planimétrer cette courbe entre les limites définies par ces sections (intégration définie).

également constant : cas d'un cylindre de révolution isotrope soumis à un moment constant (arbre de commande de vol par exemple), on a

$$\theta = \frac{M_t}{G\, I_0} \Sigma \Delta x$$

soit

$$\boxed{\theta = \frac{M_t}{G\, I_0} L.}$$

L étant la distance entre les deux sections considérées. Il est facile de voir que θ varie linéairement le long de l'arbre. Une génératrice devient donc un arc d'hélice régulière.

2.23 **Remarque importante.** — Dans ces formules, θ est donné en *radians*. Pour avoir sa valeur en degrés, il faut multiplier le résultat par

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}3.$$

2.3 TRAVAIL ÉLASTIQUE DE TORSION.

Même démonstration que dans le cas de la flexion (voir chap. IX, § 3.4).

Le travail élémentaire de torsion dans la déformation $\Delta\theta$ due au moment M_t est figurée par l'aire de la courbe représentant θ en fonction de M_t, entre 0 et $\Delta\theta$. Nous avons vu que cette aire est l'aire d'un triangle, donc

$$\Delta \mathcal{T} = \frac{1}{2} M_t \, \Delta\theta = \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{G\, I_0} \Delta x.$$

Le travail élastique de torsion dans la rotation de deux sections quelconques est la somme de ces travaux élémentaires, soit [1]

$$\boxed{\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum \frac{M_t^2}{G\, I_0} \Delta x.}$$

2.4 CONTRAINTES ADMISSIBLES EN TORSION.

La torsion simple est un *phénomène de glissement*, qui engendre donc des *contraintes tangentielles* (ou contraintes de *cisaillement*). Nous avons défini au chapitre VIII paragraphe 5.3 la contrainte admissible pour ce genre de sollicitation : *Pour les métaux courants*, la *contrainte admissible* t_a *est égale à la moitié de la contrainte admissible en traction pure :*

$$t_a = 0{,}5\ n_a.$$

2.5 GÉNÉRALISATION DES FORMULES DE LA TORSION SIMPLE.

Les formules que nous venons d'établir dans le cas des poutres prismatiques rectilignes de sections circulaires pleines sont applicables aux mêmes poutres de *sections circulaires creuses* (tubes étirés par exemple) [2].

On peut encore les utiliser avec une bonne approximation dans le cas des *sections polygonales régulières à grand nombre de côtés*, en ayant soin de prendre comme I_0 le moment d'inertie polaire du cercle inscrit.

Remarque. — Comme il est indiqué dans le tableau de la *Planche* 2, le

1. — Remarquer l'analogie existant entre cette expression et celle trouvée au chapitre IX pour le travail élastique de flexion.

2. — Nous établirons ci-après d'autres formules applicables aux sections creuses d'épaisseurs minces. Nous constaterons leur équivalence avec celles ci-dessus dans le cas des sections circulaires.

moment d'inertie polaire d'un *tube circulaire d'épaisseur relative faible* est donné avec une excellente approximation par l'expression simple :

$$I_0 = 2\,\pi\,R'^3\,e \quad \text{d'où} \quad \frac{I_0}{R} \approx 2\,\pi\,R'^2\,e$$

avec R' = rayon moyen du tube = $0{,}5\,(R+r)$.

Ces expressions sont d'un emploi plus pratique que les formules exactes :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}\,(R^4 - r^4) \quad \text{et} \quad \frac{I_0}{R} = \frac{\pi\,(R^4 - r^4)}{2\,R}$$

Leur utilisation est à conseiller pour le calcul des tubes étirés minces quand on ne possède pas les tableaux (ou curseurs) donnant directement leurs caractéristiques.

2.6 APPLICATION NUMÉRIQUE.

Soit à déterminer la *contrainte* et la *déformation de torsion* de *l'arbre de commande de vol* étudié *Planche* 10 (application chap. V § **1.6**).

Caractéristiques de l'arbre [1]

Tube étiré en acier 20 CD4 ; $G = 8000$ kg/mm² ; $D = 50$ mm ; $e = 2{,}5$ mm

$$I_0 = 211000 \text{ mm}^4 \; ; \; \frac{I_0}{R} = 8440 \text{ mm}^3.$$

Moment de torsion appliqué (partie $C_2\,E_1$) :

$M_t = 211{,}53$ mkg (au coefficient de calcul à rupture égal à 2,5).

Contrainte max. de torsion (au coefficient de rupture) :

$$t = \frac{211{,}5 \cdot 10^3}{8440} = 25{,}1 \text{ kg/mm}^2$$

$$\left(\text{soit : } \frac{t}{2{,}5} = 10 \text{ kg/mm}^2 \text{ au coefficient 1}\right).$$

Angle de déformation de torsion du tube au *coefficient* 1 (Longueur $C_2E_1 = L = 750$ mm) :

$$\theta = \frac{1}{2{,}5}\,\frac{M_t \cdot L}{G\,I_0} = \frac{211{,}5 \cdot 10^3 \cdot 750}{2{,}5 \cdot 8000 \cdot 211000} = 0{,}0376 \text{ radian}$$

$$\text{soit } \theta = 57{,}3 \cdot 0{,}0376 = 2^\circ 9'.$$

Course correspondante de la bielle PP' en supposant la bielle DD' fixe :

$$l \approx \theta\,R' \sin 60^\circ = 0{,}0376 \cdot 350 \cdot 0{,}866$$

$$l = 11{,}2 \text{ mm (coefficient 1).}$$

2.7 REMARQUE.

On voit, à l'aide de l'application ci-dessus, que les déformations de torsion peuvent devenir très importantes. C'est pourquoi il y a toujours lieu *pour des arbres de grande longueur de mener le calcul des déformations conjointement au calcul de résistance.* Il arrive fréquemment que le dimensionnement définitif s'effectue par suite des considérations de *rigidité.* Il y a lieu de remarquer, à ce sujet, qu'il est toujours plus intéressant d'augmenter le diamètre des tubes plutôt que leur épaisseur. En effet, I_0 et donc $1/\theta$ varient proportionnellement à D^3 et à e alors que le poids varie proportionnellement à D et e (la section d'un tube mince est sensiblement égale à πDe).

On peut donc doubler la rigidité de torsion en n'augmentant le poids que de $100\,(\sqrt[3]{2} - 1) = 26$ % si l'on joue uniquement sur le diamètre. Dans

1. — Ces caractéristiques ont été déterminées en tenant compte des sollicitations combinées de cisaillement, flexion, torsion et effort normal (Voir chap. XV).

l'exemple ci-dessus nous serions conduits à un tube de 63 × 2,5 pour obtenir ce résultat.

3. TORSION GAUCHE LIBRE DES POUTRES PRISMATIQUES PLEINES

3,0 REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Toute poutre prismatique de section plane *non circulaire* travaille en torsion gauche sous l'action de couples de torsion. Les *projections* de ses sections droites sur un plan normal à l'axe de torsion *restent toujours indéformées* [1] *mais elles se gauchissent en tournant.* Ce phénomène sera expliqué physiquement ci-dessous.

Nous rappelons que nous avons convenu de qualifier de *libre* la torsion gauche dans laquelle on ne s'oppose pas au phénomène de gauchissement des sections.

Ce type de torsion a été étudié principalement par DE SAINT-VENANT à l'aide de la théorie générale de l'élasticité. Nous nous limiterons, ci-après, à résumer les *résultats pratiques* auxquels cette théorie permet d'aboutir.

3,1 ANALOGIE PHYSIQUE.

Le phénomène de gauchissement des sections droites peut être mis en évidence à l'aide de l'analogie physique ci-dessous (due à de SAINT-VENANT).

Supposons deux colonnes prismatiques, par exemple circulaires, reliées entre elles par deux entretoises planes ne présentant pas de raideur normalement à leurs plans (fig. 4 *a*). Sollicitons ces entretoises par deux couples

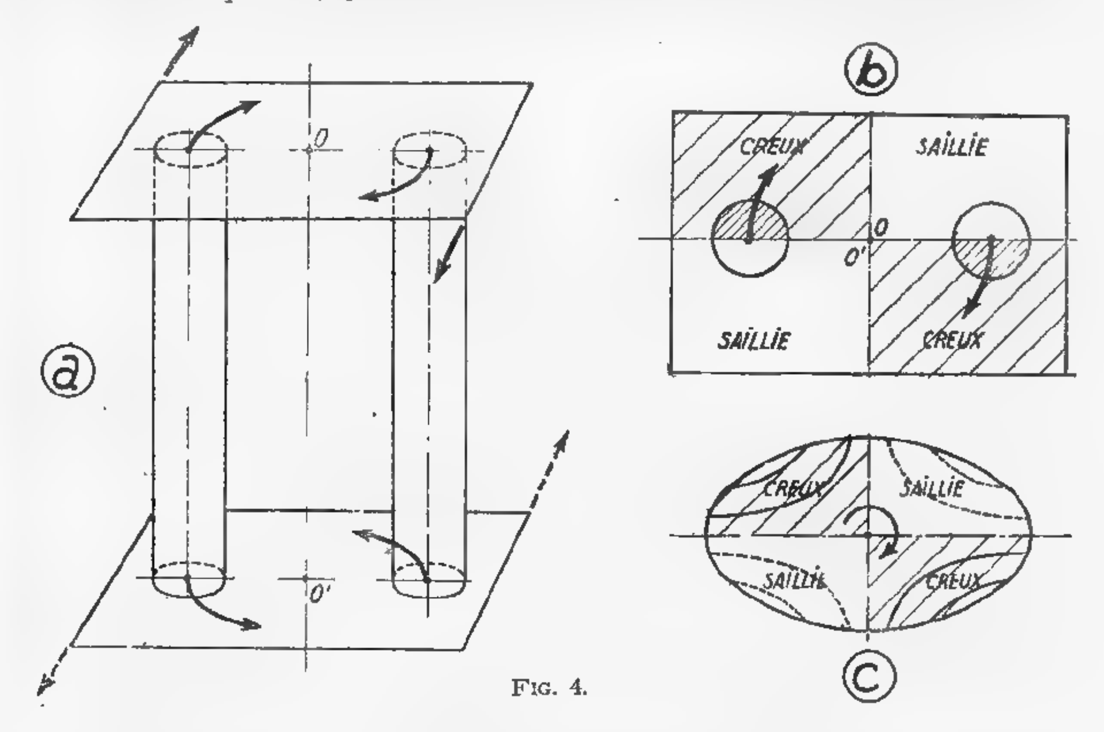


FIG. 4.

en équilibre produisant une torsion de l'ensemble. Il est aisé de se rendre compte qu'elles vont chacune se gauchir « ainsi qu'une hélice double de moulin à vent » [2] (Elles accompagneront, en effet, chacune, les sections

1. — Ce qui revient à dire que chaque section tourne toujours « en bloc » autour de l'axe de torsion.

2. — Les « vrillages » obtenus seront de sens inverses pour les deux entretoises.

droites des colonnes appartenant à leurs plans et ces sections droites resteront normales aux déformées en hélice des axes des colonnes.) On obtiendra ainsi après déformation, des surfaces possédant des « *creux* » et des « *saillies* » disposés selon la figure 4 *b*.

Le phénomène est analogue, quoique moins facilement visible, quand on soumet un corps de section non circulaire à une torsion : les colonnes sont remplacées par les fibres du corps.

On établit en Elasticité que les « courbes de niveau » d'une section elliptique gauchie après torsion sont des hyperboles équilatères disposées selon la figure 4 *c*.

3.2 RESULTATS PRATIQUES.

3.21 Notations. — La théorie de SAINT-VENANT permet, pour quelques cas particuliers de sections usuelles, de calculer des *valeurs fictives* remplaçant respectivement le moment d'inertie polaire I_0 et le module d'inertie de torsion I_0/R dans les équations de déformation et de résistance établies ci-dessus pour les sections circulaires.

Nous désignerons par J la valeur fictive de I_0 à utiliser dans l'*équation de déformation* qui s'écrira alors dans le cas général (voir § 2.21)

$$\boxed{\theta = \sum \frac{M_t}{G\,J}\,\Delta x}$$

et nous désignerons par K la valeur fictive de I_0/R à utiliser dans l'*équation de résistance* (voir § 2.1) pour obtenir la *contrainte tangentielle maximum* existant dans la section considérée :

$$\boxed{t_{max} = \frac{M_t}{K}.}$$

Remarque importante. — Les valeurs J et K ainsi définies ne représentent nullement des moments ou modules d'inertie. Ce sont simplement des *grandeurs de mêmes dimensions* (c'est-à-dire : L^4 pour J et L^3 pour K).

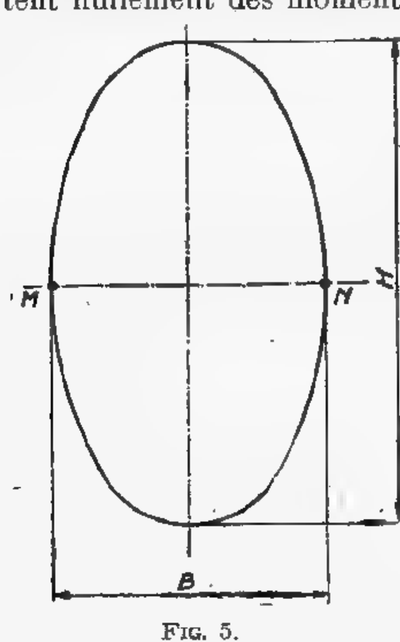
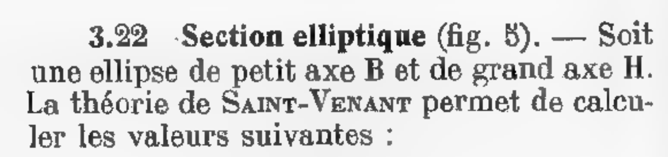


Fig. 5.

3.22 Section elliptique (fig. 5). — Soit une ellipse de petit axe B et de grand axe H. La théorie de SAINT-VENANT permet de calculer les valeurs suivantes :



$$\boxed{\begin{gathered} J = \frac{\pi}{16}\,\frac{B^3\,H^3}{B^2+H^2} \\ K = \frac{\pi}{16}\,B^2\,H. \end{gathered}}$$

On déduit de la théorie que *les contraintes sont maxima aux deux extrémités M et N du petit axe : Ce ne sont plus les fibres les plus éloignées de l'axe neutre qui sont les plus fatiguées*, contrairement à ce qui se passe en torsion plane.

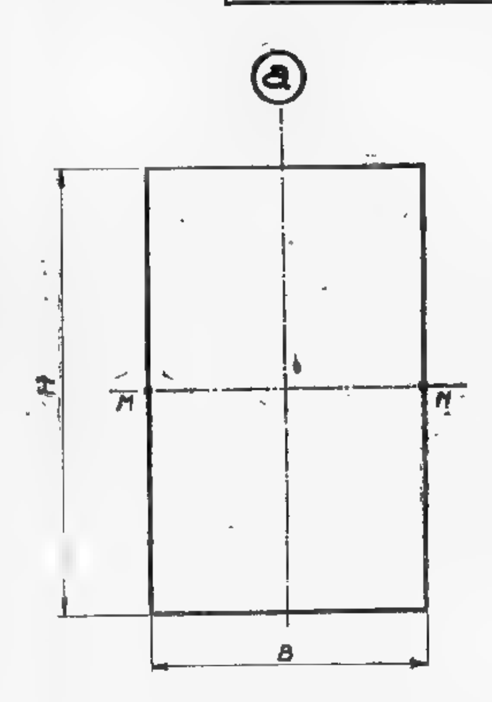
1. — La grandeur J ainsi définie se désigne souvent par *constante de torsion*.

3.23 **Section rectangulaire** (fig. 6 *a*). — Soit une section rectangulaire de petit côté B, de grand côté H. On a dans ce cas :

$$J = \alpha \frac{B^3 H^3}{B^2 + H^2}$$
$$K = \beta B^3 H.$$

Dans ces formules, α et β sont des coefficients sans dimension, fonctions du rapport $\frac{B}{H}$ (voir tableau ci-dessous et courbes représentatives fig. 6 *b*).

$\frac{B}{H}$	$\frac{H}{B}$	α	β
1	1	0,281	0,218
0,8	1,25	0,282	0,220
0,5	2	0,286	0,246
0,25	4	0,300	0,282
0,1	10	0,319	0,313
0	∞	0,333	0,313



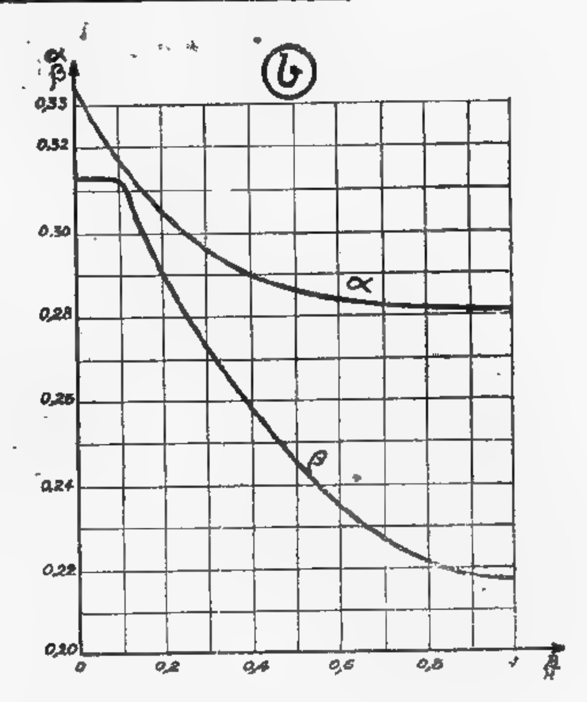


FIG. 6.

Ici encore les contraintes tangentielles maxima sont atteintes aux extrémités M et N de la petite médiane, c'est-à-dire *aux points du contour les plus rapprochés de l'axe de torsion.*

3.24 **Section carrée.** — On obtient évidemment J et K en faisant

B=H=C=côté du carré

dans les formules ci-dessus où l'on a $\left(\frac{B}{H} = 1\right)$

$\alpha = 0{,}281 \qquad \beta = 0{,}218.$

On trouve les expressions :

$$\boxed{\begin{aligned} J &= 0{,}1405\ C^4 \\ K &= 0{,}218\ C^3. \end{aligned}}$$

Les contraintes tangentielles maxima ont lieu aux quatre extrémités des médianes.

3.25 Section rectangulaire de faible épaisseur (fig. 7). — Désignons par e la dimension B (fig. 6 a) d'un rectangle qui, par hypothèse, est très faible vis-à-vis de l'autre dimension H.

Nous sommes dans le cas $\frac{B}{H} \approx 0$

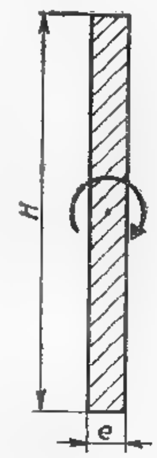


Fig. 7.

d'où

$$\alpha = 0{,}333 - \frac{1}{3}.$$

Nous avons donc

$$J = \frac{1}{3}\, e^3 \frac{H^3}{e^2 + H^2}.$$

Or e^2 est très faible [1] vis-à-vis de H^2. Nous pouvons donc pratiquement, assimiler $e^2 + H^2$ à H^2, d'où *l'expression simplifiée* ci-dessous :

$$\boxed{J = \frac{e^3}{3}\, H.}$$

Nous utiliserons cette expression ci-après, lors de l'étude des sections minces ouvertes.

La grandeur K a pour valeur

$$K = 0{,}313\ e^2\ H$$

soit, approximativement

$$\boxed{K = \frac{e^2}{3}\, H.}$$

On a donc la relation : $K = \frac{J}{e}$

d'où :

$$t_{max} = \frac{M_t}{J}\, e.$$

3.26 Sections pleines quelconques.

3.261 *Constante de rigidité* J. — De Saint-Venant a montré que l'on peut calculer *approximativement* la constante de torsion J d'une *section pleine* quelconque en utilisant la relation

$$J = \frac{S^4}{4\,\pi^2\, I_0}$$

soit, très sensiblement

$$\boxed{J = \frac{S^4}{40\, I_0}.}$$

1. — Si, par exemple, $\frac{e}{H} = \frac{1}{20}$; $\frac{e^2}{H^2} = \frac{1}{400}$.

Dans cette relation S représente la *surface de la section* et I_0 son *moment d'inertie polaire* par rapport à son centre de torsion.

Remarques. — *a*) Cette formule revient à remplacer la section donnée par une « *section elliptique équivalente* » ayant même surface et même moment d'inertie polaire.

En effet, en utilisant les notations du paragraphe **3.22**, on a pour une section elliptique

$$S=\frac{\pi}{4}\ BH \quad \text{et} \quad I_0=\frac{\pi}{64}BH\ (B^2+H^2)$$ (Voir *Planche* 2).

En remplaçant S et I_0 par leurs valeurs dans l'expression de J on retrouve bien, après simplification, la formule donnée au paragraphe **3.22**, soit

$$J=\frac{\pi}{16}\,\frac{B^3\,H^3}{B^2+H^2}.$$

b) Constatons l'*équivalence approximative* de cette formule avec celle donnée au paragraphe **3.23** pour une *section rectangulaire*

On a alors

$$S=BH \quad \text{et} \quad I_0=\frac{BH}{12}\ (B^2+H^2)$$

d'où

$$J=\frac{B^4\ H^4}{\frac{40}{12}\ BH\ (B^2+H^2)}=0{,}3\,\frac{B^3H^3}{B^2+H^2}.$$

Le coefficient 0,3 ainsi trouvé correspond bien à la valeur moyenne du coefficient α du paragraphe **3.23** (fig. 6 *b*).

c) *Les valeurs de J sont toujours inférieures à celles de* I_0. On commettrait donc une *erreur par défaut* en utilisant les formules de la torsion plane pour déterminer les déformations de torsion des sections non circulaires (voir ci-après § **3.4**).

d) La formule ci-dessus donnant l'expression approximative de J n'est à utiliser que pour des *sections pleines massives*, c'est-à-dire ne présentant pas d'angles rentrants. Nous donnerons ci-après une autre expression valable pour les profilés ouverts minces.

3.262 *Contraintes maxima.* — La contrainte tangentielle maximum a toujours lieu sur la périphérie de la section et *au point le plus rapproché au centre de torsion.*

Il n'existe pas, à notre connaissance, d'expression générale permettant de connaître cette contrainte pour des sections de forme quelconque.

On peut cependant en obtenir l'*ordre de grandeur* en assimilant la section considérée à une section elliptique ou rectangulaire de dimensions voisines.

3.3 CONTRAINTES ADMISSIBLES EN TORSION GAUCHE LIBRE.

La torsion gauche libre ne mettant en jeu que des contraintes tangentielles, la contrainte admissible est donnée, comme dans le cas de la torsion plane, par la limite admissible au cisaillement [1] :

$$t_a=0{,}5\ n_a.$$

3.4 COMPARAISON ENTRE LA TORSION PLANE ET LA TORSION GAUCHE LIBRE.

Effectuons une *comparaison à poids égal* entre les rigidités et les contraintes de torsion d'une section circulaire pleine (torsion plane) et d'une

1. — Nous verrons ci-après qu'il y a lieu d'abaisser cette valeur dans le cas de sections possédant des angles rentrants (concentrations de tensions dans les angles).

section rectangulaire (torsion gauche libre) que nous choisirons d'allongement 5 (c'est-à-dire $\frac{H}{B}=5$).

L'égalité de poids s'exprime par l'égalité de sections

$$\frac{\pi D^2}{4}=BH=5\ B^2$$

d'où

$$D=B\sqrt{\frac{20}{\pi}}=2{,}52\ B.$$

La rigidité de torsion du cercle est mesurée par

$$I_0=\frac{\pi}{32}D^4=\left(\frac{20}{\pi}\right)^2 B^4=3{,}98\ B^4$$

et celle du rectangle par

$$J=\alpha\frac{B^3\ H^3}{B^2+H^2}=0{,}306\frac{B^3\cdot 125\ B^3}{B^2+25\ B^2}=1{,}48\ B^4.$$

Rapport des rigidités :

$$\frac{I_0}{J}=\frac{3{,}98}{1{,}48}=2{,}69.$$

La section circulaire de poids égal est 2,69 *fois plus rigide en torsion que la section rectangulaire considérée.*

Module de torsion de la section circulaire :

$$\frac{I_0}{R}=\frac{\pi}{16}D^3=\frac{\pi}{16}\cdot\frac{20}{\pi}2{,}52\ B^3=3{,}15\ B^3.$$

Module fictif de la section rectangulaire :

$$K=\beta\ B^2\ H=0{,}290\ B^2\cdot 5\ B=1{,}45\ B^3.$$

Rapport des modules :

$$\frac{3{,}15}{1{,}45}=2{,}17.$$

A égalité de charge, la section circulaire subira une contrainte 2,17 *fois plus faible que celle de la section rectangulaire considérée.*

Conclusion. — On utilise toujours beaucoup mieux la matière en employant des sections circulaires pour les poutres pleines travaillant en torsion.

Remarque. — Si l'on avait utilisé les formules de la torsion plane pour calculer les caractéristiques de la section rectangulaire envisagée ci-dessus, on aurait commis les erreurs suivantes :

sur la rigidité : résultat 7,3 fois trop fort
sur les contraintes : résultat 2,94 fois trop faible.

3.5 CONDITIONS DE VALIDITÉ DES RÉSULTATS.

Comme nous l'avons déjà indiqué, la théorie de SAINT-VENANT suppose que rien ne s'oppose au gauchissement des sections droites (*torsion gauche libre*).

C'est le cas d'un arbre de torsion (suffisamment long) par exemple (fig. 8 *a*).

Par contre, une pièce très courte sollicitée en torsion entre deux encastrements rigides imposant chacun des sections planes au départ aura une rigidité sensiblement égale à celle de la torsion plane (moment d'inertie polaire I_0). Voir figure 8 *b*.

Pour une poutre telle que celle représentée figure 8 *c*, la théorie de SAINT-VENANT donnera une valeur défavorable de rigidité. Il existera, par contre, des contraintes normales supplémentaires au niveau de l'encastrement.

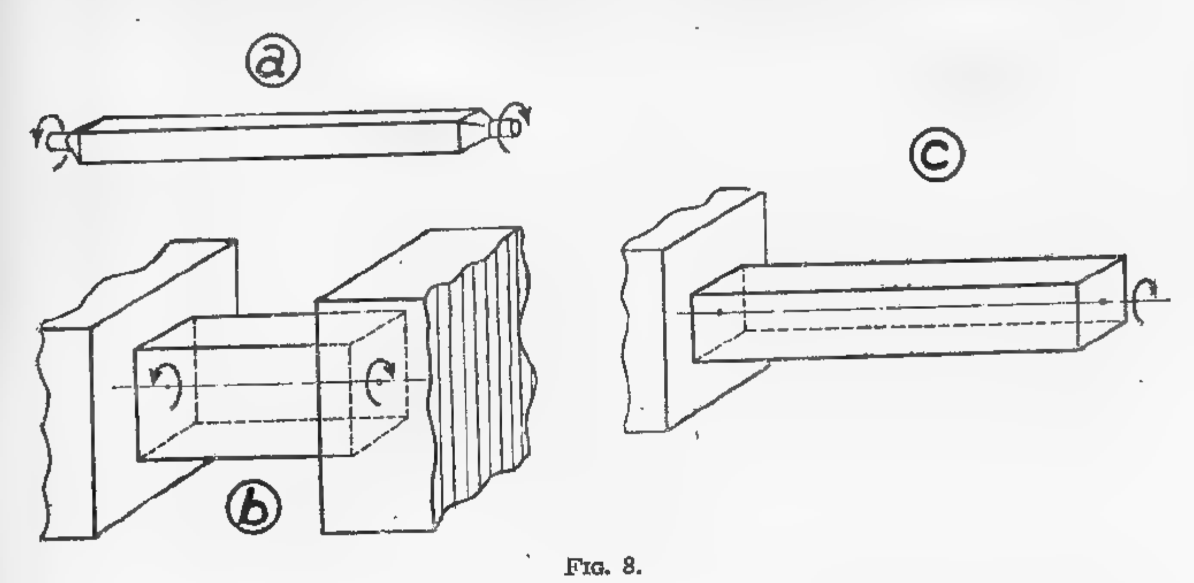


FIG. 8.

4. TORSION DES POUTRES PRISMATIQUES CREUSES A PAROIS MINCES[1].

4.0 REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Nous n'aurons pas ici à discriminer les cas de torsion plane et de torsion gauche libre, les formules auxquelles on aboutit étant identiques dans ces deux cas.

Nous supposerons simplement que rien ne s'oppose au gauchissement des sections s'il tend à se produire, c'est-à-dire en d'autres termes, que *la transmission de la torsion ne nécessite aucune réaction extérieure longitudinale*. Nous indiquerons sous quelles conditions les sections restent planes.

Les théories ci-après supposent essentiellement que l'*épaisseur des parois est faible* vis-à-vis des autres dimensions des sections. Ces sections peuvent, par contre, être de *formes quelconques* (curvilignes ou anguleuses, convexes ou concaves, etc...) et être *constantes* ou *évolutives* le long d'une même poutre [2].

4.1 EQUATION DE RESISTANCE. FORMULE DE BREDT [3].

4.11 Données. — Considérons un élément d'une poutre creuse à parois minces de forme quelconque, limité par deux sections droites S_1 et S_2 distantes de Δx.

Cet élément reçoit un couple pur de torsion M_t qui s'équilibre sur sa section terminale par un *couple pur* — M_t (par hypothèse).

4.12 Flux de cisaillement (fig. 9 *a*). — Les parois qui, par hypothèse, ont une épaisseur faible présentent une rigidité négligeable dans le sens

1. — On désigne d'une façon générale ces poutres par « *coquilles fermées* », ainsi que nous le verrons ultérieurement (chap. XXII).

2. — A condition toutefois que cette évolution soit progressive.

3. — Cette formule a été introduite en France par M. LEDUC.

radial. Les tensions de cisaillement engendrées par M_t seront donc, en chaque point, tangentes au contour de la section [1]. En désignant par t la contrainte de cisaillement en un point donné où la paroi a une épaisseur e, la *force tangentielle* τ *agissant par unité de longueur du périmètre* de la section a pour valeur :

τ=contrainte × section de l'unité de longueur,
$\tau = t \cdot e \cdot 1 = t\ e.$

Nous savons que cette force tangentielle unitaire se désigne par *flux de cisaillement* ou *écoulement de cisaillement* [2].

Déterminons quelle doit être la variation du *flux de cisaillement de torsion* ainsi défini.

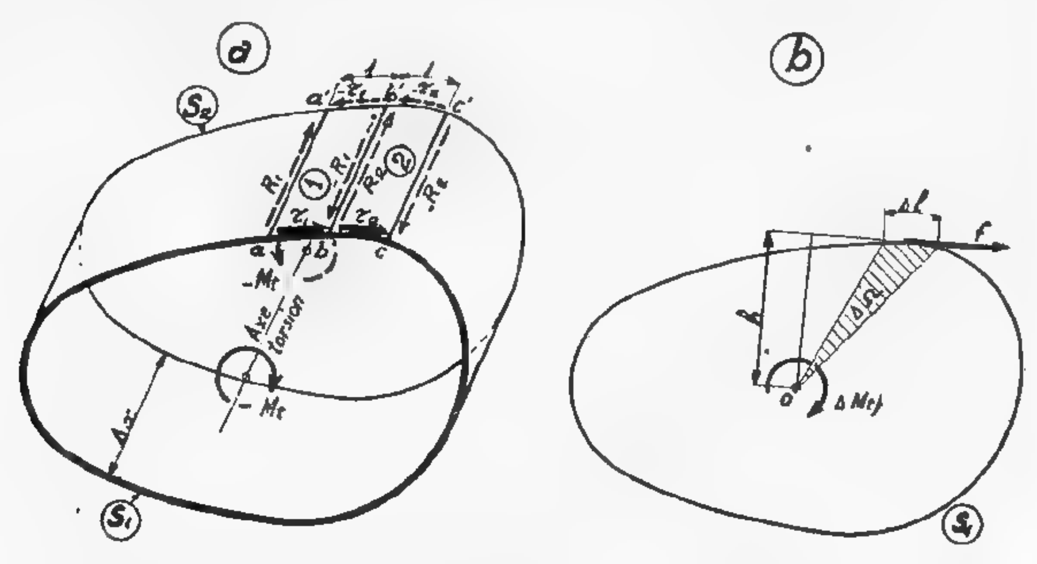


Fig. 9.

Envisageons deux tranches longitudinales voisines (1) et (2) de largeurs égales à 1 (dimensions curvilignes ab et bc de la figure 9 a). Supposons que les flux de cisaillement moyens soient respectivement τ_1 et τ_2 le long de ces tranches. Ces flux représentent ainsi les charges appliquées dans le plan de la section S_1 à chacune d'elles (puisque $ab = bc = 1$). Isolons, par la pensée, l'élément (1). Pour assurer son équilibre, il faudra lui appliquer :

— Une force tangentielle — τ_1 en $a'b'$ (fournie par le flux de cisaillement de réaction de la section S_2).

— Deux composantes de couple longitudinales (résultant du moment de transport de τ_1 de S_1 à S_2) ayant pour valeur :

$$\pm R_1 = \frac{\tau_1\ \Delta x}{1} = \tau_1 \Delta x.$$

En isolant de même l'élément (2) on voit qu'il doit recevoir longitudinalement des réactions

$$\pm R_2 = \tau_2\ \Delta x.$$

Comme il ne doit pas y avoir de réaction longitudinale extérieure, par hypothèse, il faut nécessairement que le long de l'arrête commune bb' on ait [3]

$$-R_1 + R_2 = 0 \qquad \text{soit} \qquad R_1 = R_2$$

1. — Cette proposition qui tombe facilement sous le sens commun se démontre au surplus en élasticité.

2. — Voir chapitre IX, § 3.51.

3. — Toutes les tranches élémentaires constituant la paroi s'équilibrent de même sur leur arrête commune.

ou $\tau_1 \Delta x = \tau_2 \Delta x$

et donc $\tau_1 = \tau_2 = \tau = constante.$

Le flux de cisaillement de torsion pure est donc d'intensité constante le long d'une section fermée à parois minces [1].

4.13 **Intensité du flux de cisaillement.** — Déterminons la valeur de τ en écrivant l'*équilibre* entre les efforts tangentiels qu'il définit et le moment M_t. Envisageons un élément Δl du périmètre de la section S_1 (fig. 9 *b*). Cet élément reçoit une *force tangentielle*

$$f = \tau \ \Delta l.$$

Cette force tangentielle a, par rapport au centre de torsion O de S_1, un bras de levier h. Elle résulte donc d'un *moment élémentaire*

$$\Delta \ M_t = fh = \tau \ h \ \Delta l.$$

Or, le produit $h\Delta l$ représente le double de l'aire $\Delta \Omega$ du triangle hachuré sur la figure 9 *b*.

On a donc $\Delta \ M_t = \tau \cdot 2 \ \Delta\Omega.$

L'ensemble des forces f engendrées sur le périmètre doit équilibrer M_t, ce qui s'écrit

$$M_t = \Sigma \ \Delta \ M_t = 2 \ \tau \ \Sigma \ \Delta \Omega = 2 \ \tau\Omega$$

en désignant par Ω *l'aire totale limitée par le périmètre de la section* (fig. 10 *a*).

On déduit de cette relation la formule fondamentale donnant *l'intensité du flux de cisaillement de torsion pure le long d'une section fermée* :

$$\boxed{\tau = \frac{M_t}{2 \ \Omega}.}$$

Remarque. — Vérifions les dimensions de la formule.

On doit avoir :

$$\tau = \frac{F}{L} = F \cdot L^{-1} \text{ (force par unité de longueur).}$$

Le second membre donne bien :

$$\frac{F \cdot L}{L^2} = F \ L^{-1}.$$

4.14 **Contrainte tangentielle.** — D'après ce que nous avons vu plus haut, la contrainte tangentielle (cisaillement de torsion) en un point où la paroi a une épaisseur e est donnée par

$$t = \frac{\tau}{e}.$$

On aboutit ainsi à l'expression connue sous le nom de *Formule de* Bredt (ou de Leduc) :

$$\boxed{t = \frac{M_t}{2 \ \Omega \ e}.}$$

1. — Si le flux était variable, il se produirait une *mise en charge longitudinale* des éléments (phénomène analogue au glissement de flexion), ce qui est contraire à l'hypothèse de torsion pure. Cette simple considération physique vérifie le résultat obtenu

4.15 Extension de la formule de Bredt. — Dans les figures 9 et 10 *a*, ayant servi à la démonstration, nous avons supposé l'épaisseur des parois suffisamment faible pour n'être représentée que par un seul trait. Nous serions arrivés au même résultat avec une section du genre de celle de la figure 10 *b* où l'épaisseur *e*, variable le long du contour, est cependant toujours supposée suffisamment faible pour, qu'en chaque point les tensions de cisaillement restent constantes sur toute l'épaisseur.

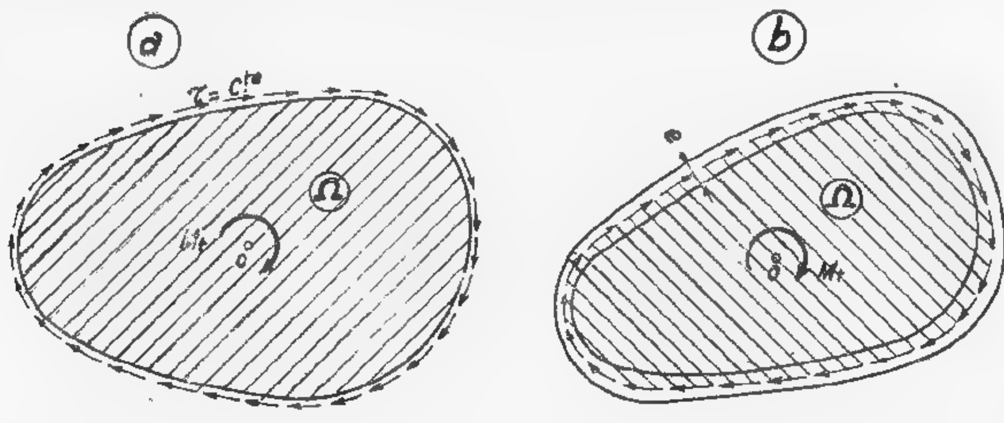


Fig. 10.

L'aire Ω est alors limitée par la ligne d'action du flux, c'est-à-dire par le *contour moyen* de la section, situé en chaque point à mi-épaisseur.

Il est à remarquer que la contrainte de cisaillement varie en chaque point *en raison inverse de l'épaisseur* de la paroi (flux constant).

Nous trouverons ci-après des applications de la formule de Bredt qui est remarquable par sa généralité d'emploi et sa simplicité d'expression.

4.16 Equivalence de la formule de Bredt et de la formule de torsion plane pour les tubes circulaires minces. — Nous avons vu au paragraphe 2.5 que, pour un tube circulaire mince de rayon moyen R′ et d'épaisseur *e*, l'on avait sensiblement

$$\frac{I_0}{R} = 2\,\pi\,R'^2\,e.$$

Or, l'aire moyenne Ω a pour valeur

$$\Omega = \pi\,R'^2.$$

Le terme $2\,\Omega\,e$ de la formule de Bredt, qui joue le même rôle que $\frac{I_0}{R}$ dans l'équation de résistance, vaut donc

$$2\,\Omega\,e = 2\,\pi\,R'^2\,e = \frac{I_0}{R}.$$

Il y a donc bien équivalence entre les deux formules pour les tubes minces $\left(\frac{e}{R'} < \frac{1}{10}\right.$ en pratique pour obtenir une erreur négligeable, voir *Planche* 2).

4.2 ÉQUATION DE DÉFORMATION.

4.21 Constante de rigidité en torsion d'une section creuse. — Cherchons à déterminer une *constante de rigidité* J, telle que l'angle de rotation $\Delta\theta$ de l'élément envisagé figure 9 *a* (rotation de S_1 par rapport à S_2)

soit donné par

$$\Delta\theta = \frac{M_t}{G\ J}\ \Delta x$$

où J remplace I_0 (de même qu'au paragraphe **3.**) dans l'expression du paragraphe **2.21** relative à la torsion plane.

Ecrivons *l'égalité des travaux élastiques extérieur et intérieur* développés par la torsion de l'élément de poutre.

Le moment M_t appliqué à S_1 (fig. 9 *a*) qui tourne d'un angle $\Delta\theta$ produit un *travail extérieur* (travail élastique d'un moment)

$$\mathcal{E}_e = M_t \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{M_t^2}{2\ G\ J}\ \Delta x.$$

Considérons un *élément de paroi* de largeur Δl (fig. 11). Cet élément travaille au *cisaillement pur* [1] sous l'action d'un effort tranchant égal à l'effort tangentiel qui lui est appliqué, soit

$$T = f = \tau\ \Delta l.$$

D'après ce que nous avons vu au chapitre VIII, paragraphe **4.3**, le *travail interne* de cet élément de longueur Δx est donné par

$$\Delta\ \mathcal{E}_i = \frac{T^2}{2\ G\ S}\ \Delta x$$

où S = section droite de l'élément = $e\ \Delta l$.

Donc

$$\Delta\ \mathcal{E}_i = \frac{(\tau\ \Delta l)^2}{2\ G\ e\ \Delta l}\ \Delta x = \frac{\tau^2}{2\ G}\ \frac{\Delta l}{e}\ \Delta x.$$

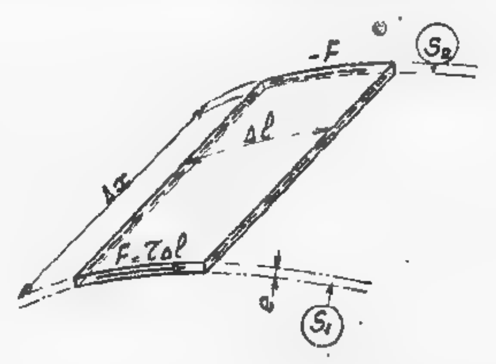


FIG. 11.

Le *travail interne total*, dû à tous les éléments Δl constituant le périmètre de la section, s'obtient en effectuant la *somme le long du périmètre* de tous ces travaux élémentaires, ce qui s'écrit :

$$\mathcal{E}_i = \frac{\tau^2}{2\ G}\ \Delta x \sum \frac{\Delta l}{e}$$

(le signe $\sum$ couvrant tous les éléments pouvant varier *le long du périmètre*).

En remplaçant τ par sa valeur (§ **4.13**), l'on a

$$\mathcal{E}_i = \frac{M_t^2}{8\ G\ \Omega^2}\ \Delta x \sum \frac{\Delta l}{e}.$$

En écrivant l'égalité des travaux externe et interne, il vient

$$\frac{M_t^2}{2\ G\ J}\ \Delta x = \frac{M_t^2}{8\ G\ \Omega^2}\ \Delta x \sum \frac{\Delta l}{e}$$

soit, en simplifiant :

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{4\Omega^2} \sum \frac{\Delta l}{e}$$

d'où l'on tire l'expression de J connue sous le nom de: *Constante de* LEDUC:

$$\boxed{J = \frac{4\ \Omega^2}{\sum \frac{\Delta l}{e}}.}$$

1. — On constate en effet que sa figure d'équilibre (fig. 9 *a*) est identique à celle du cisaillement pur.

4.22 Equations de déformation. — La constante J (de dimension L^4 = quatrième puissance de longueurs) rentre au même titre que I_0 dans les équations de déformation établies au paragraphe 2.2. On a donc les *angles de torsion* θ (en radians) :

Cas général : $$\theta = \sum \frac{M_t}{G\,J}\,\Delta x$$

Cas d'une section constante et M_t variable : $$\theta = \frac{1}{G\,J} \sum M_t \Delta x$$

Cas d'une section constante et M_t constant : $$\theta = \frac{M_t}{G\,J}\,L.$$

4.23 Calcul pratique de J. — Rappelons que dans l'expression de J

Ω = aire limitée par le *périmètre moyen* de la section droite (de même que pour l'équation de résistance) ;

$\sum \frac{\Delta l}{e}$ = somme *le long du périmètre moyen* de la section droite, des rapports élémentaires : $\dfrac{\text{élément de périmètre moyen}}{\text{épaisseur de paroi correspondante}}$.

4.231 Dans le cas général (théorique) où e varie continuellement le long du périmètre (fig. 12 *a*), la valeur de cette somme s'obtiendrait en *intégrant* la fonction $1/e$ (inverse de l'épaisseur) le long de l. Cette opération pourrait s'effectuer *graphiquement* en traçant la courbe $1/e$ le long du périmètre moyen développé en abscisses et en planimétrant cette courbe (fig. 12 *b*). On pourrait encore la calculer *par parties*, dans un tableau, selon la méthode habituelle.

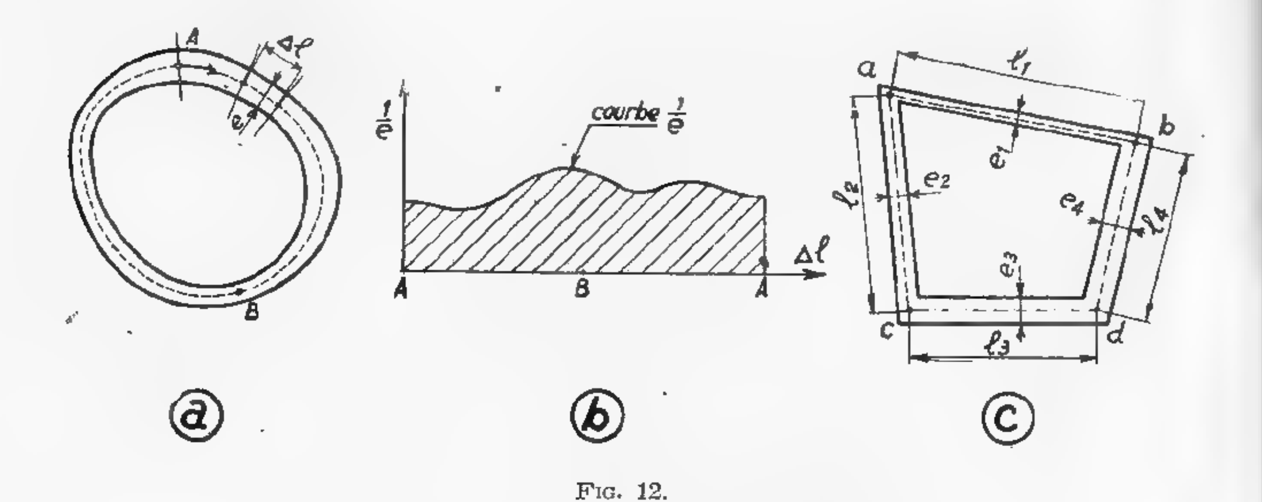


Fig. 12.

4.232 *Variations brusques de e.* — Généralement l'épaisseur e varie brutalement. C'est par exemple le cas du caisson de la figure 12 *c* où l'on a alors directement

$$\sum \frac{\Delta l}{e} = \frac{l_1}{e_1} + \frac{l_2}{e_2} + \frac{l_3}{e_3} + \frac{l_4}{e_4}\cdot$$

4.233 *Epaisseur constante.* — Dans le cas particulier où e est constant le long du périmètre d'une même section droite on a alors

$$\sum \frac{\Delta l}{e} = \frac{1}{e}\,\Sigma \Delta l = \frac{e}{l}$$

l désignant le *périmètre moyen* de la section.

La constante J a alors pour expression simplifiée

$$J = \frac{4\,e\,\Omega^2}{l}$$

4.24 **Equivalence de J et I_0 pour les tubes circulaires minces.** — Nous savons que le moment d'inertie polaire I_0 d'un tube circulaire mince d'épaisseur e et de rayon moyen R′ a pour valeur approchée (voir § **2.5**)

$$I_0 = 2\,\pi\,R'^3\,e.$$

L'aire Ω a pour valeur

$$\Omega = \pi\,R'^2$$

et le périmètre moyen l

$$l = 2\,\pi\,R'.$$

On a donc, d'après l'expression simplifiée de J ci-dessus

$$J = \frac{4\,e\,\pi^2\,R'^4}{2\,\pi\,R'} = 2\,\pi\,R'^3\,e = I_0.$$

Nous retrouvons donc encore l'équivalence entre la formule ci-dessus et celle de la torsion plane.

4.3 GLISSEMENT LONGITUDINAL EN TORSION PURE.

Reprenons (fig. 13 *a*) l'un des éléments longitudinaux de largeur 1 de la figure 9 *a*, ayant servi à l'établissement de la formule de Bredt (élément (1) par exemple).

Nous avons trouvé

$$\tau_1 = \tau \qquad \text{et} \qquad \pm\,R_1 = \tau_1\,\Delta x = \tau\,\Delta x.$$

L'effort par unité de longueur s'exerçant le long de *aa′* ou *bb″* vaut donc (en valeur absolue)

$$\frac{R_1}{\Delta x} = \tau.$$

On retrouve ainsi la propriété générale de *réciprocité des cisaillements. Le long des corps soumis à une torsion, il existe un glissement longitudinal égal au glissement transversal.*

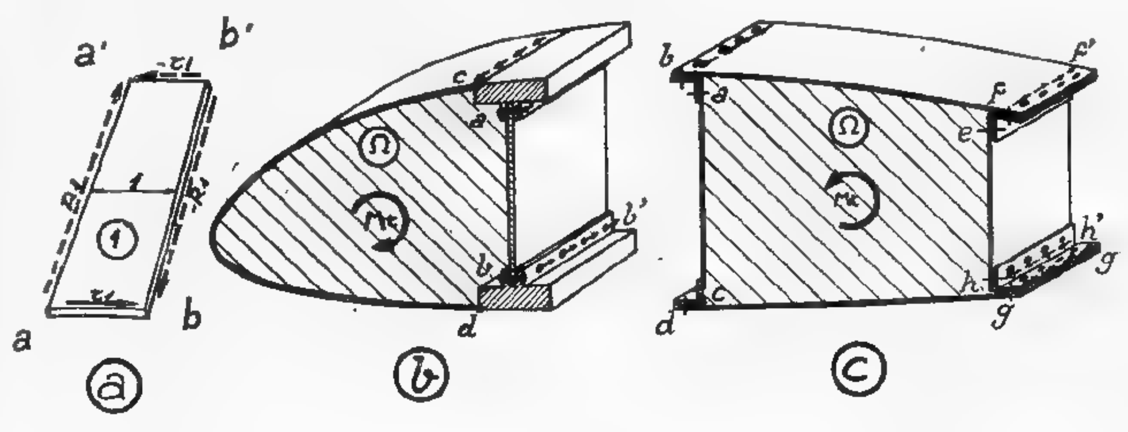


Fig. 13.

Applications. — Cette considération présente une importance particulière pour le calcul des *jonctions longitudinales* des corps creux tordus (*caissons*).

Le long du *caisson de bord d'attaque* de la figure 13 *b*, les rivetages

âmes semelles a, b, supporteront un effort par unité de longueur, comptée suivant la dimension *longitudinale* du caisson :

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega}.$$

Par suite de la torsion, cet effort se superposera *algébriquement* à celui dû au glissement longitudinal de flexion. De même les liaisons c et d (charnières par exemple) supporteront cet effort.

Dans un *caisson central* du genre de celui de la figure 13 c tous les rivetages longitudinaux a, b..., h, supportent τ par unité de longueur du fait de M_t.

Si ce caisson était réalisé en *bois*, ce serait les *collages âmes-semelles* qui supporteraient cet effort de glissement. Nous reviendrons ultérieurement (chap. XXI et XXII) sur les détails de calculs propres à chaque structure.

4.4 CONSERVATION DES SECTIONS PLANES.

On démontre que, pour qu'il y ait conservation des sections planes, pendant la torsion libre des corps creux, il faut que l'épaisseur en un point quelconque soit *inversement proportionnelle* à la distance de l'axe de torsion à la tangente en ce point à la fibre moyenne. Soit (fig. 14)

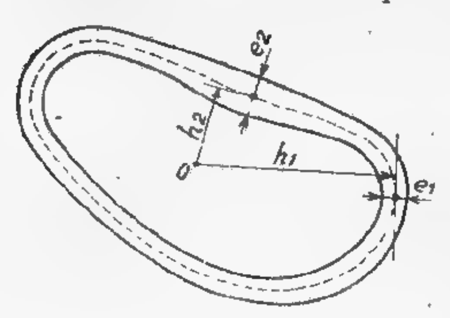


FIG. 14.

$$e_1 \quad h_1 = e_2 \quad h_2 = constante.$$

Dans le cas contraire (qui est le cas général des corps creux non circulaires réalisés en pratique) la constante de rigidité J ne conserve son expression que si l'on ne s'oppose pas au gauchissement des sections, comme nous l'avons supposé pour l'établissement des formules (torsion libre).

Il convient de remarquer que cette condition se trouve très souvent satisfaite, dans la pratique, où les caissons de torsion sont terminés par des cloisons sans raideur normalement à leurs plans (nervures par exemple). Au surplus, s'il y a encastrement d'une ou plusieurs sections, la rigidité augmente.

On pourra, en pratique, calculer en torsion toutes les poutres creuses et suffisamment longues par les formules ci-dessus qui ont l'avantage d'être d'un emploi très aisé [1].

4.5 SECTION CREUSE « IDÉALE » EN TORSION.

Plaçons-nous dans le cas simple d'une section d'épaisseur constante. On a alors (§ 4.233)

$$J = \frac{4\ e\ \Omega^2}{l} = 4\ e\ l \left(\frac{\Omega}{l}\right)^2.$$

Le produit *el* représente l'aire de la section occupée par la matière, c'est-à-dire à un facteur près, le *poids*.

Donc, pour une poutre de poids donné (*el* fixé) la constante de torsion est proportionnelle au carré de Ω/l. Cette quantité peut se désigner par le *rayon moyen* de la section droite. Il est maximum (et égal à sa valeur constante) dans le cas du cercle.

La *section creuse idéale*, du point de vue rigidité en torsion, est donc

1. — Nous examinerons cependant, au chapitre XXI, les *perturbations* théoriques existant, dans ces poutres, au voisinage d'encastrements supposés infiniment rigides

encore la *section circulaire* de laquelle on a toujours avantage à se rapprocher.

4.6 APPLICATION NUMÉRIQUE.

4.61 Données.

La figure 15 *a* représente une section transversale d'un *caisson de torsion de bec d'attaque d'un volet de courbure* (de section constante). Matière : tôles de duralumin AU4G ; G = 2700 kg/mm².

Ce caisson transmet, entre les sections A et B, distantes de 1500 mm, un moment de torsion M_t variant *linéairement* de 100 mkg en A à 250 mkg en B (fig. 15 *b*).

La torsion s'effectue *librement* sans assujettir les extrémités, fermées par de simples cloisons, à rester rigoureusement planes.

4.62 Contraintes de torsion en B.

Flux de cisaillement :

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\Omega} = \frac{250000}{2 \cdot 10600} = 11{,}8 \text{ kg/mm.}$$

Contrainte de cisaillement du revêtement de bec d'attaque :

$$t_1 = \frac{\tau}{e_1} = \frac{11{,}8}{1{,}25} = 9{,}44 \text{ kg/mm}^2.$$

Contrainte de cisaillement de l'âme du longeron :

$$t_2 = \frac{\tau}{e_2} = \frac{11{,}8}{2} = 5{,}9 \text{ kg/mm}^2.$$

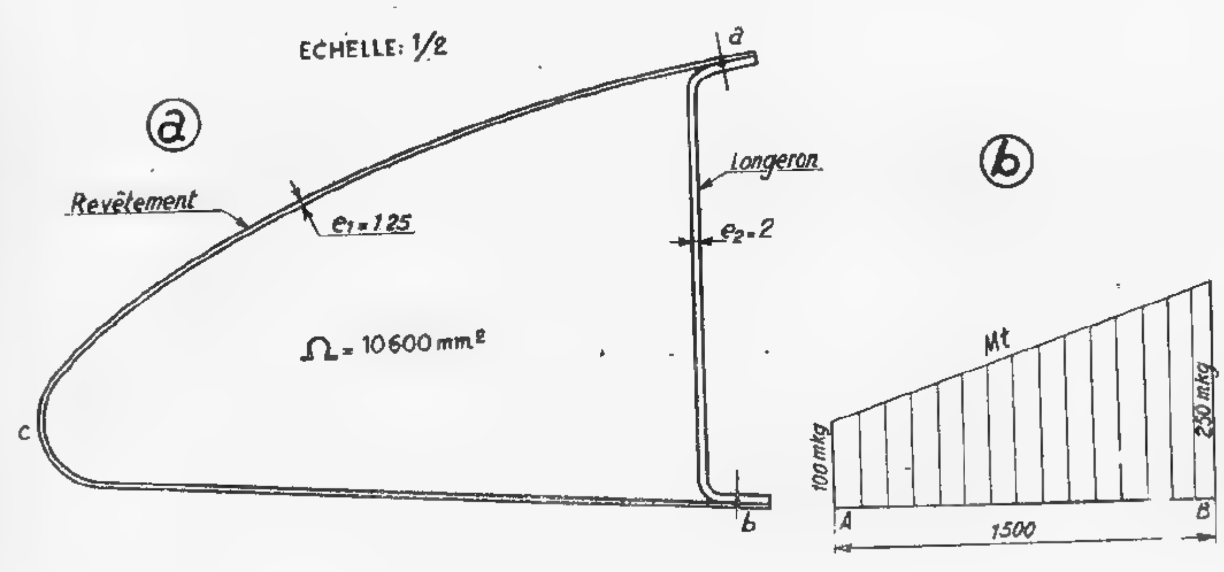


FIG. 15.

4.63 Angle de déformation de torsion.

Longueur développée *a c b* du revêtement de bec : l_1=352 mm [1].

Longueur développée de *a* à *b* du longeron : l_2=110 mm.

$$\sum \frac{\Delta l}{e} = \frac{352}{1{,}25} + \frac{110}{2} = 281 + 55 = 336.$$

1. — Les longueurs développées s'arrêtent aux rivetages *a* et *b* où cesse le cisaillement de torsion.

Constante de torsion :

$$J = \frac{4\,\Omega^2}{\sum \frac{\Delta l}{e}} = \frac{4 \cdot \overline{10600}^2}{336} = 133{,}9 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

Angle de torsion :

$$\theta = \sum \frac{M_t}{G\,J}\,\Delta x = \frac{10^{-4}}{2700 \cdot 133{,}9} \sum_A^B M_t\,\Delta x = 2{,}77 \cdot 10^{-10} \sum_A^B M_t\,\Delta x.$$

La quantité sous le signe Σ représente l'aire du diagramme de charge de la figure 15 *b*, soit

$$\sum_A^B M_t\,\Delta x = 10^3\,\frac{100+250}{2}\,1500 = 262{,}5 \cdot 10^6 \text{ mm}^2\text{kg}.$$

On a donc :

$$\theta = 2{,}77 \cdot 10^{-10} \cdot 262{,}5 \cdot 10^6 = \mathbf{0{,}0728} \text{ radian}$$

soit $\theta = 57{,}3 \quad 0{,}0728 = \mathbf{4^\circ 10'}$.

5. TORSION DES POUTRES PRISMATIQUES DE SECTIONS MINCES OUVERTES

5.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

On assimile à des poutres de sections minces ouvertes (*coquilles ouvertes*), tous les *profilés laminés ouverts* du commerce tels que, poutrelles, cornières, fers en U, en T, etc...

Nous supposons toujours, ci-dessous, que le gauchissement des sections peut s'effectuer librement. La théorie montre, en effet, que les sections ouvertes ne peuvent, en aucun cas, travailler en torsion plane. Nous serons donc toujours dans le cas de *torsion gauche libre* [1].

Ces conditions théoriques sont approximativement satisfaites quand on soumet à un couple de torsion des profilés ouverts *de grande longueur libre*. L'influence des encastrements terminaux (s'il en existe) n'affecte, en effet, qu'une partie relativement faible de leur longueur, comme nous l'établirons au paragraphe **6.** ci-après.

Nous verrons que, dans ces conditions, ces profilés présentent une résistance et une rigidité très faibles en torsion.

5.1 MODE DE TRAVAIL EN TORSION.

Il n'est plus possible, comme pour les sections fermées, de supposer une égale répartition des contraintes sur toute l'épaisseur, ce qui conduirait à équilibrer M_t par un flux de cisaillement. En effet, d'après ce que nous avons démontré au paragraphe **4.12** ce flux devrait être d'intensité constante. Or il est manifestement nul aux bords libres A et B (fig. 16). On trouverait ainsi une résistance nulle en torsion (flux nul). En fait, nous verrons que la répartition des contraintes s'établit d'une manière analogue à celle existant à l'intérieur des sections rectangulaires plates.

5.2 RIGIDITÉ EN TORSION LIBRE.

On démontre, en élasticité, que *la constante de rigidité en torsion libre* J *d'une section ouverte est égale à la somme des rigidités des éléments rectangulaires plats qui la constituent* [2].

---

1. — Le phénomène de gauchissement des sections droites est ici très important et généralement très visible pour de faibles charges (Voir ci-après, § **5.4**).

2. — Cette constante de rigidité est toujours le terme qui remplace I_0 dans les *équations de déformations* établies au § **2.2** pour la torsion plane.

En désignant par e l'épaisseur et Δl la longueur d'un de ces éléments rectangulaires, la rigidité propre a pour valeur (d'après la formule du paragraphe 3.25 où l'on fait $H=\Delta l$) :

$$\Delta J = \frac{e^3}{3} \Delta l.$$

L'*expression générale* de J d'une section ouverte mince quelconque (fig. 16 *a*) est donc :

$$\boxed{J = \frac{1}{3} \sum e^3 \Delta l}$$

où Δl représente un *élément de la ligne moyenne* d'une section droite où l'épaisseur est e.

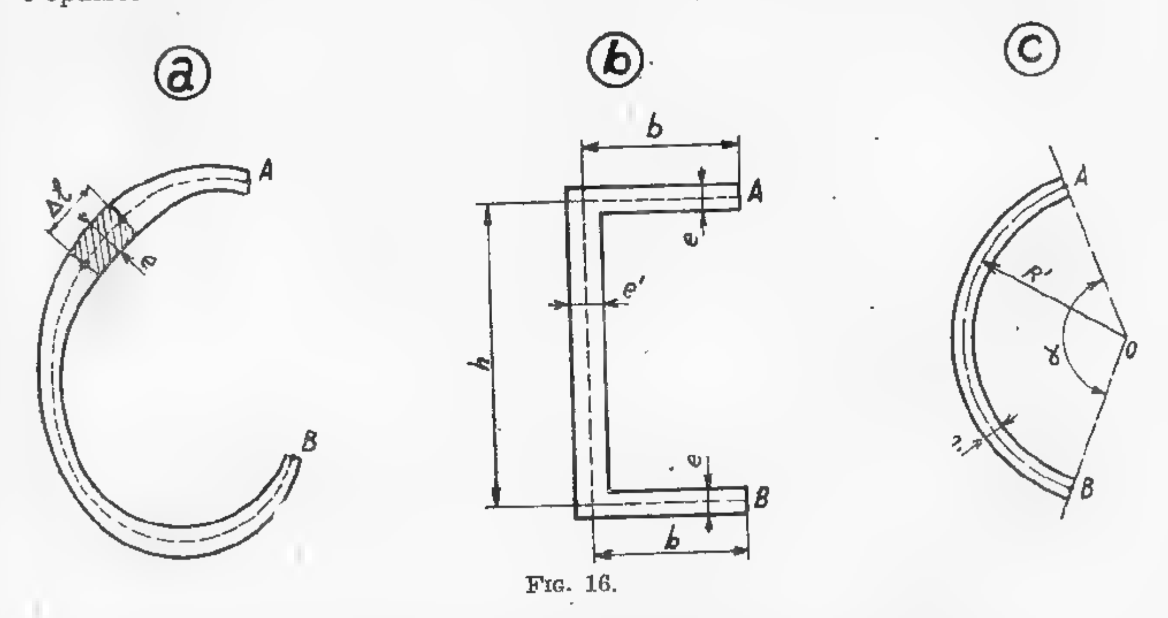


Fig. 16.

La somme s'étend tout le long de cette ligne moyenne de A à B. On l'obtiendrait, dans ce cas général, par intégration (*graphique* par exemple, en traçant la courbe e^3 le long du développement de la ligne moyenne et en planimétrant, ou par *parties*, en envisageant une suite de rectangles).

Cas particuliers. Pour les *profilés à faces planes* on effectue simplement la somme des J de chaque face. Pour un profilé en U, tel que celui de la figure 16 *b*, on obtient par exemple :

$$J = \frac{1}{3} (2\, b\, e^3 + e'^3\, h).$$

Si l'*épaisseur e est constante*, la formule générale se simplifie en :

$$\boxed{J = \frac{1}{3}\, e^3\, l}$$

avec l = longueur développée de la ligne moyenne (ou périmètre moyen).

La constante de rigidité du *segment annulaire* de la figure 16 *c* vaut donc (avec α en radians)

$$J = \frac{1}{3}\, e^3\, \alpha R'.$$

Remarque. — Il est facile de voir que *toutes ces valeurs seront faibles* vis-à-vis de celles des moments d'inertie habituels. En effet, la dimension

élevée au cube n'est ici que l'épaisseur qui est faible par hypothèse. L'exemple ci-après (§ 5.4) concrétisera cette remarque.



Fig. 17.

5.3 CONTRAINTE MAXIMA.

On démontre, en élasticité, que la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur des parois se fait suivant l'allure de la figure 17 [1]. Les contraintes maxima qui ont lieu sur les faces externe et interne sont données, comme pour les rectangles plats (§ 3.25) par la relation :

$$t_{max} = \frac{M_t}{J} e.$$

Remarque. — Pour les sections possédant des *angles rentrants*, ce qui est le cas des profilés usuels, il y a lieu au surplus de tenir compte des *concentrations de contraintes* dans les angles dont nous parlerons succinctement au paragraphe **7**.

5.4 COMPARAISON ENTRE LES SECTIONS MINCES FERMÉES ET OUVERTES EN TORSION LIBRE.

Nous effectuerons cette comparaison entre un *tube fermé* ordinaire de rayon moyen R′ et d'épaisseur *e* (fig. 18 *a*) et le profilé ouvert obtenu en fendant simplement ce tube sur une génératrice (*tube fendu* : tringle à rideaux du commerce, par exemple), figure 18 *b*.

Précisons, avant tout, que nous nous plaçons toujours dans le cas de *torsion gauche libre* du tube fendu pour lequel on obtiendra une allure de déformée selon la figure 18 *c* (phénomène mis en évidence à l'aide d'une feuille de papier roulée et tordue entre les mains sans s'opposer au mouvement général de déformation « en hélice »).

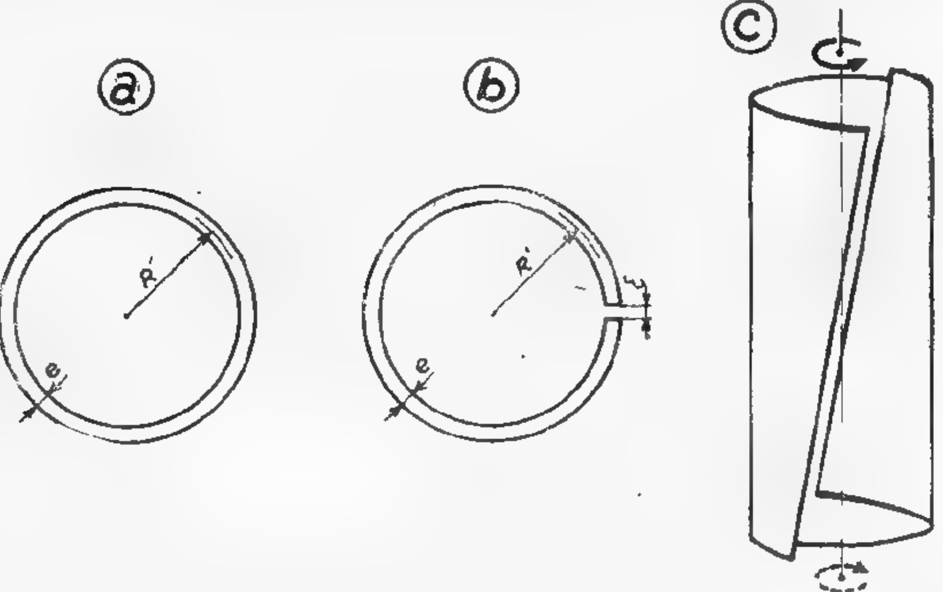


Fig. 18.

5.41 **Comparaison des rigidités.** — Tube fermé :

$$I_0 = 2\,\pi\,R'^3\,e \quad (\S\S\ 2.5 \text{ et } 4.23).$$

1. — Répartition analogue à celle des éléments rectangulaires plats.

Tube fendu $J = \frac{1}{3} e^3 \cdot 2 \pi R' = \frac{2 \pi}{3} R' e^3,$

Rapport des rigidités $\frac{I_0}{J} = 3 \left(\frac{R'}{e}\right)^2.$

Une valeur courante de $\frac{R'}{e}$ est de 10 (tube de $50 \times 2{,}5$ par exemple). *Dans ce cas, le tube fendu serait* 300 *fois moins rigide que le tube fermé.*

5.42 **Comparaison des résistances.** — Les résistances sont dans le rapport des modules (ou modules fictifs) d'inertie, soit :

Tube fermé $\frac{I_0}{R} = 2 \pi R'^2 e,$

Tube fendu $K = \frac{J}{e} = \frac{2 \pi}{3} R' e^2,$

Rapport $\frac{\text{Tube fermé}}{\text{Tube fendu}} = 3 \frac{R'}{e}.$

Dans l'exemple précédent $\left(\frac{R}{e} = 10\right)$ le *tube fendu supporterait un moment de torsion* 30 *fois plus faible que celui supporté par le tube fermé.*

5.43 **Conclusion.** — Il apparaît donc que les sections ouvertes travaillent très mal en torsion libre. On évitera donc d'utiliser les profilés ouverts en torsion quand il ne sera pas possible d'assujettir leurs faces extrêmes à rester planes ou quand ces profilés se présenteront sous de grandes longueurs.

Nous avons vu également au chapitre XI, paragraphe **3.5**, que les profilés ouverts *chargés en flexion* étaient soumis à une torsion si les charges ne coïncidaient pas avec leur *axe de torsion* (défini par les *centres de cisaillement* des sections). Il y a donc lieu d'utiliser avec prudence des profilés ouverts isolés.

Cette faible résistance en torsion met en évidence le phénomène de « *déversement* » de ces profilés dont nous avions parlé au chapitre XI. Elle explique également la déformabilité excessive de certains fuselages de sections ouvertes et non convenablement renforcées. Nous reviendrons au chapitre XXII sur cette question particulière.

6. TORSION GAUCHE NON LIBRE

6.0 REMARQUE PRELIMINAIRE.

Nous avons qualifié de « *torsion gauche non libre* » l'état produit quand on assujettit à rester planes une ou plusieurs sections droites d'une poutre tordue dont les sections tendent à se gauchir en tournant. Cet assujettissement peut être produit par des encastrements pouvant être simplement dus à une *continuité* de la poutre quand celle-ci n'est de section ouverte que sur une fraction de sa longueur. L'étude générale de ce phénomène présente une complexité mathématique qui l'exclut de notre exposé.

Nous examinerons en premier lieu un « cas limite » connu sous le nom de *flexion différentielle*, qui nous aidera ensuite à analyser physiquement l'état de torsion gauche non libre.

Une méthode de calcul particulière aux sections minces ouvertes sera donnée au chapitre XXII (Torsion-flexion des coquilles ouvertes).

6.1 TRANSMISSION D'UN MOMENT DE TORSION PAR FLEXION DIFFÉRENTIELLE.

Considérons deux poutres planes encastrées à leurs bases et soumises à leurs sommets A et B à deux forces F et — F égales et opposées (fig. 19 *a*).

L'ensemble de ces forces crée un *couple pur* $M_t = Fh$ qui est analogue à un moment de torsion appliqué à l'axe zz' du système.

Chaque poutre fléchit *isolément* sous l'action de moments égaux et de sens inverses dont la variation est représentée sur la figure. Aux encastrements on trouve :

deux efforts tranchants $\pm T = \pm F$ reproduisant le couple M_t ;
deux moments $\pm \mu = F\ L$ égaux et opposés.

Il ne reste donc bien finalement que M_t. Cette transmission d'efforts est connue sous le nom de *flexion différentielle*. Elle ne donne lieu à aucune difficulté de calcul.

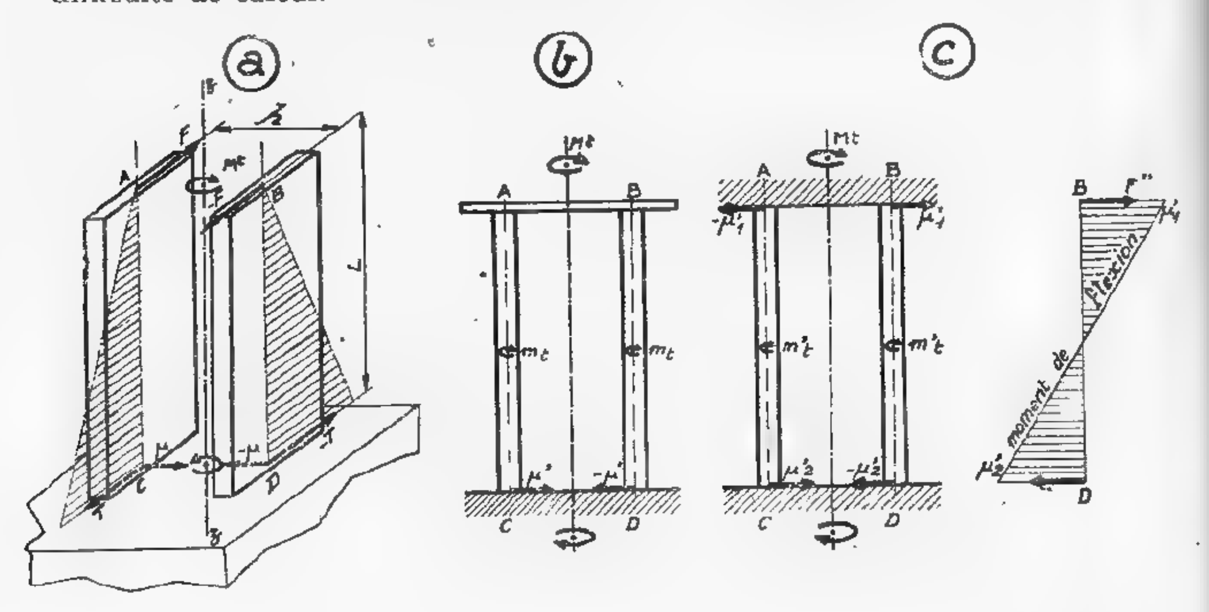


Fig. 19.

6.2 FLEXION DIFFÉRENTIELLE ET TORSION.

6.21 Premier cas. — Supposons d'abord, que les poutres planes soient réunies à leurs sommets par une *entretoise plane, sans raideur normalement à son plan*, à laquelle on applique M_t (fig. 19 *b*). Une part de ce moment sera transmise par torsion propre de chaque poutre et le reste par flexion différentielle comme précédemment. Le partage entre ces deux modes de travail s'opèrera en fonction des rigidités respectives correspondantes (problème hyperstatique).

6.22 Deuxième cas. — Si, au lieu d'une entretoise sans raideur, on dispose en A et B un bloc formant des *encastrements*, comme ceux qui existent en C et D, le phénomène restera analogue mais le moment de flexion différentielle se distribuera le long de chaque poutre selon le diagramme de la figure 19 *c* [1].

1. — Si les encastrements ont même rigidité et si les poutres sont à inertie constante les moments d'encastrements sont égaux en valeurs absolues (symétrie) d'où un moment nul au milieu de la portée.

6.3 TORSION GAUCHE NON LIBRE.

Supposons maintenant, enfin, que l'on réunisse les poutres par une *âme centrale*. On obtiendra un *profilé ouvert* en forme de I, par exemple (fig. 20 *a*) travaillant en torsion gauche non libre. L'encastrement inférieur (1er cas) ou les deux encastrements (2me cas) imposent, en effet, une ou deux sections planes.

La transmission de M_t se fera par un phénomène complexe de torsion (contraintes tangentielles) et de flexion différentielle des deux ailes (contraintes normales et tangentielles).

Plus la poutre sera *courte* et plus la rigidité de flexion sera *grande* vis-à-vis de celle de torsion [1] et donc plus le phénomène s'écartera de la torsion libre envisagée aux paragraphes précédents, pour tendre vers la flexion différentielle pure.

6.4 RESULTATS PRATIQUES POUR UN PROFILÉ EN I.

6.41 Formules. — La théorie générale, appliquée au cas d'un profilé en I encastré à une extrémité et soumis à l'autre à un couple de torsion M_t (fig. 20 *a*) conduit aux résultats suivants [2]

L'angle de torsion est donné par

$$\theta = \frac{M_t}{G\,J}\,(L - a\,\alpha) \qquad (1)$$

où l'on a :

J = constante de torsion libre $= \frac{1}{3}\,(2\,be^3 + he'^3)$

a = paramètre de longueur défini par :

$a^2 = \frac{E\,I}{2\,G\,J}\,h^2$ avec $I = \frac{e\,b^3}{12}$ = moment d'inertie de flexion d'une semelle

α = coefficient dépendant du rapport $\frac{L}{a}$ dont la variation est donnée figure 20 *c* [3].

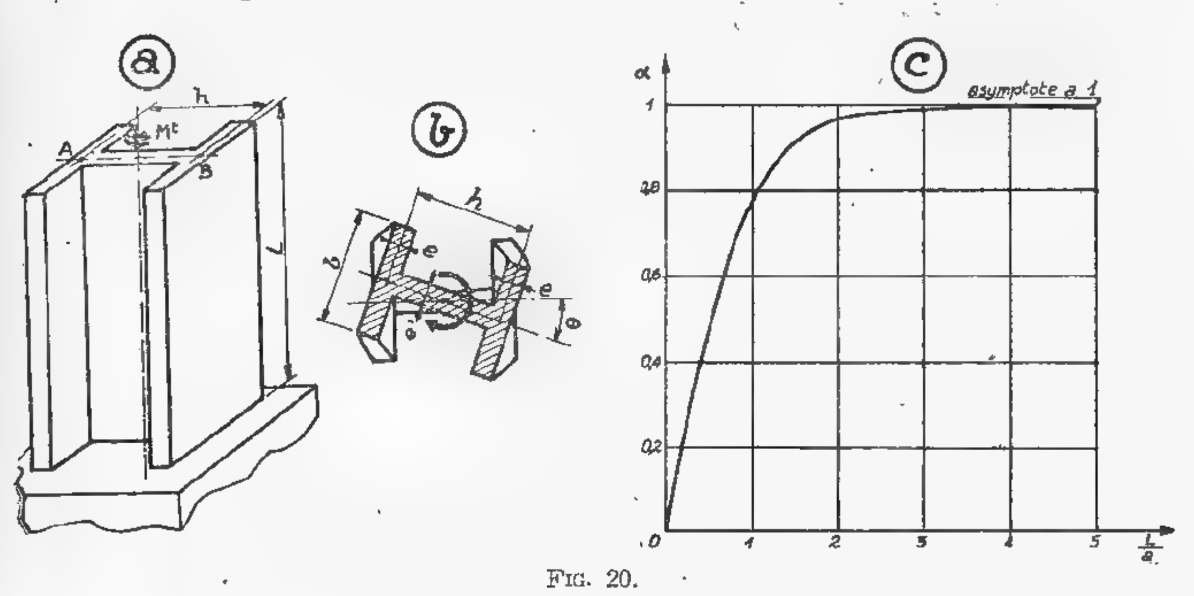


FIG. 20.

1. — Les flèches de flexion croissent en effet comme L^3 et celles de torsion comme L.

2. — Ces résultats sont extraits de l'ouvrage : *Leçons sur la Résistance des matériaux*, par J. GÉRARDIN (cours E. N. S. Aé).

3. — Cette variation est celle d'une tangente hyperbolique.

Les *moments fléchissants maxima* aux encastrements de chaque aile sont donnés par

$$\mu = \frac{M_t}{h} a \alpha. \qquad (1)$$

6.42 Application. — Pour fixer l'ordre de grandeur de a, calculons-le pour un profilé de dimensions (sensiblement normalisées) suivantes :

$h=100$; $b=50$; $e=7$; $e'=5$ et $G=0{,}4$ E (acier).

On a :
$$I = \frac{7 \cdot 50^3}{12} = 72900 \text{ mm}^4$$

$$J = \frac{1}{3}(100 \cdot 7^3 + 100 \cdot 5^3) = 15600 \text{ mm}^4$$

$$a^2 = \frac{72900}{2 \cdot 15600 \cdot 0{,}4} h^2 = 5{,}84\, h^2$$

$$a = 2{,}42\, h = 242 \text{ mm.}$$

6.43 Remarques.

6.431 *Rigidité de torsion.* — On voit que l'influence d'un encastrement revient (formule (1)) à *diminuer fictivement la longueur déformable en torsion libre* du profilé d'une quantité : αa.

Si $L \gg 3\,a$, $\alpha \approx 1$ (fig. 20 c) : La longueur est fictivement réduite de a.

Si $L=a$ on a : $\alpha=0{,}76$ d'où $\theta = \frac{M_t}{G\,J}(L - 0{,}76\ L) = 0{,}24\ \frac{M_t\,L}{G\,J}$.

La présence d'un encastrement a donc pour effet de quadrupler (environ) la rigidité en torsion libre du profilé.

6.432 *Moments d'encastrement des ailes.* — Si $L \geqslant 3a$, on a $\mu = \frac{M_t}{h} a$ qui représente le moment d'encastrement atteint en flexion différentielle pure pour des ailes de hauteur $L=a$ (chaque aile transmettant une force $F = \frac{M_t}{h}$).

Si $L=0{,}55a$: $\alpha = 0{,}5$ d'où $\mu = \frac{M_t}{h} 0{,}5a = 0{,}91\ \frac{M_t}{h} L$.

Quand le profilé est très court, le moment d'encastrement est sensiblement égal à celui de flexion différentielle pure.

6.433 *Influence d'un deuxième encastrement.* — Si le profilé était monté entre deux encastrements les formules ci-dessus resteraient valables à condition de prendre pour hauteur L la « *hauteur libre* » c'est-à-dire $\frac{L}{2}$ dans le cas du profilé à section constante qui nous occupe. L'angle θ représenterait la déformée totale de cette hauteur libre.

6.5 CONCLUSION.

On voit que le phénomène de flexion différentielle associé à la torsion, grâce à un encastrement, permet d'augmenter sensiblement la rigidité de torsion des sections ouvertes.

Ce résultat est encore accru si l'on a soin de renforcer la rigidité de flexion des parties de sections encaissant la flexion différentielle.

Dans le cas d'une ouverture de grande importance dans un fuselage coque, par exemple, on a intérêt à border l'ouverture de façon à augmenter l'inertie des flancs verticaux [1]. L'encastrement terminal est ici assuré principalement par la *continuité* de ces éléments de bordure.

1. — La méthode de calcul en torsion flexion que nous exposerons au chapitre XXII nous conduira à dimensionner ces renforts de bordure.

7. CONCENTRATION DE CONTRAINTES DANS LES ANGLES RENTRANTS DES PIÈCES TORDUES

Quand on soumet à une torsion un corps possédant des arêtes vives, il se produit, principalement au niveau des angles rentrants, des *concentrations de contraintes de cisaillement* qui peuvent devenir très importantes.

La théorie de l'élasticité, aidée par des méthodes expérimentales (telles que photo-élasticité ou méthode du film de savon), permet dans certains cas particuliers de chiffrer ces sursollicitations.

Dans le cas simple d'un *changement brusque de diamètre d'un arbre circulaire* (fig. 21 *a*), on obtient ainsi une surtension au niveau du congé de raccordement, mesurée par le rapport : $k = \frac{t \text{ max}}{t}$ (avec t = contrainte de torsion max. de l'arbre de diamètre d) dont la variation est représentée sur la même figure en fonction de l'importance relative de ce congé.

On voit que *la surtension augmente très rapidement quand le rayon r du congé diminue*. Elle serait théoriquement (c'est-à-dire élastiquement) infinie pour un angle vif ($r=0$).

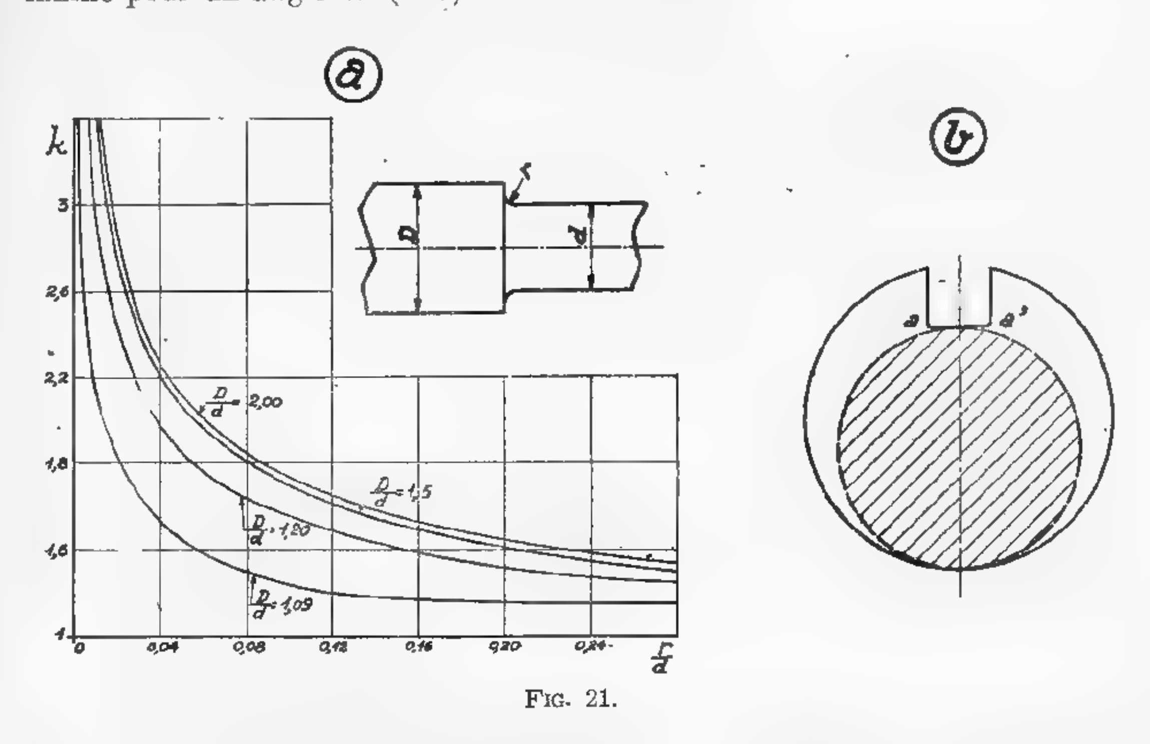


Fig. 21.

Il se produit un résultat analogue pour une *rainure de clavetage* (fig. 21 *b*) où il est toujours prudent d'arrondir, même avec un rayon très faible, les angles intérieurs a et a'. L'expérience montre, au surplus, que dans ce cas, il y a lieu de ne compter que sur une partie travaillante en torsion telle que celle hachurée sur la figure.

Pour les *profilés laminés* où les rayons des congés de raccordement sont généralement égaux aux épaisseurs des ailes, le rapport de surtension varie de 25 à 50 % selon les cas [1].

Il y a donc lieu, en résumé, de ne jamais tolérer d'angle vif sur des éléments travaillant en torsion à des taux élevés et d'effectuer, au contraire, de *grands congés de raccordement*.

1. — Référence : Théorie de l'élasticité, par Timoshenko, Ch. Béranger, Paris.

CHAPITRE XIV

CALCUL DES RESSORTS

1. GÉNÉRALITÉS

1.1 DÉFINITION.

Un ressort est un organe dont on utilise les *déformations élastiques*, soit pour *absorber un choc* (amortisseurs), soit pour *emmagasiner de l'énergie* (horloges), soit pour *produire une détente brusque* (ressorts de soupapes).

Dans tous ces cas, *un ressort agit en absorbant, ou en restituant un travail* qui est le *travail élastique de la matière* du ressort.

On appelle ce travail le *potentiel élastique* ou *potentiel interne* du ressort. Il est représenté par l'aire du diagramme des allongements en fonction de la charge.

1.2 EXAMEN THÉORIQUE DU MODE DE DÉFORMATION LE PLUS INTÉRESSANT.

Dans un ressort, on peut songer à utiliser :

— Soit le *travail des contraintes normales*, par traction, compression ou flexion ;

— Soit le *travail des contraintes tangentielles*, par cisaillement ou torsion.

Examinons quel est, *à priori*, le mode de travail le plus intéressant en évaluant le travail de l'*unité de volume* de la matière dans les différents cas, c'est-à-dire en comparant les différents travaux *à poids égal* (ce qui importe particulièrement en construction aéronautique).

Le travail par unité de volume $\frac{\mathcal{E}}{V}$ des contraintes normales n peut se mettre sous la forme

$$\frac{\mathcal{E}}{V} = \frac{n^2}{2\,E}.$$

Démontrons-le dans le cas simple de la traction (ou compression).

Nous avons vu au chapitre VI que le travail élastique de traction est

$$\mathcal{E} = \frac{F^2\,L}{2\,S\,E}$$

F étant l'effort de traction, L la longueur de la pièce, S sa section.

La contrainte est

$$n = \frac{F}{S}$$

d'où

$$\mathcal{E} = \frac{n^2\,L\,S}{2\,E}.$$

Or, L S est le volume V de la pièce. Donc le travail par unité de volume est

$$\frac{\mathscr{E}}{V} = \frac{n^2}{2\,E}.$$

On démontrerait de même que le travail par unité de volume des contraintes tangentielles t peut s'écrire

$$\frac{\mathscr{E}'}{V} = \frac{t^2}{2\,G}.$$

Nous admettrons que dans les deux cas la matière est utilisée au maximum, c'est-à-dire que les contraintes considérées n et t sont les *contraintes admissibles* de la matière. On sait que l'on a pour les métaux usuels

$$t_a = \frac{n_a}{2} \text{ (Chap. VIII, § 5).}$$

D'autre part, nous avons vu au chapitre V, paragraphe **4.4**, que pour les métaux usuels on a sensiblement

$$G = 0{,}4\ E.$$

Comparons, dans ces conditions, les travaux des contraintes normales et des contraintes tangentielles

$$\frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}} = \frac{\dfrac{n^2}{2\,E}}{\dfrac{t^2}{2\,G}} = \frac{\dfrac{n^2}{2\,E}}{\dfrac{n^2}{4}\,\dfrac{1}{0{,}8\,E}} = 2 \cdot 0{,}8 = 1{,}6.$$

Donc, *à poids égal, le travail des contraintes normales est* 1,6 *fois plus grand que le travail des contraintes tangentielles.*

On peut en déduire, *à priori*, qu'il sera plus intéressant d'utiliser pour un ressort le travail des contraintes normales (flexion, traction) plutôt que celui des contraintes tangentielles (cisaillement, torsion).

1.3 RESSORTS UTILISÉS PRATIQUEMENT.

Pratiquement, d'autres considérations entrent en jeu pour le choix d'un type de ressort : il y a lieu, notamment, d'obtenir une *déformabilité suffisante* avec un *encombrement* qui ne soit pas prohibitif. Cette considération élimine, pour les métaux, l'utilisation pratique de la traction de la compression et du cisaillement simples qui donnent lieu à de faibles déplacements. Il reste donc la *flexion* et la *torsion* qui demeurent pratiquement seules utilisables pour les métaux [1].

1.4 CLASSIFICATION.

Nous étudierons successivement :

a) Les ressorts où la matière travaille en *flexion* ;

b) Les ressorts où la matière travaille en *torsion*.

Il y a lieu de signaler que ce mode de travail ne constitue qu'un *mode de travail principal* accompagné souvent de travaux dus à des efforts secondaires, comme nous le verrons ci-après.

1.5 RENDEMENT D'UN RESSORT.

Considérons le diagramme des déplacements L de l'extrémité d'un ressort en fonction de la charge F appliquée. C'est une droite passant par

1. — La traction et la compression ne s'utilisent guère que pour le caoutchouc (sandow, amortisseur à rondelles).

l'origine (voir fig. 1*a*). Le travail élastique du ressort sous l'effet de la charge F est l'aire du triangle OAB, soit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} F \cdot L.$$

On appelle *rendement* ou « *coefficient d'efficacité* » ρ du ressort, le rapport de ce travail $\mathcal{E}$ au travail théorique $\mathcal{E}' = FL$ d'une force F, égale au maximum de l'effort équilibré par le ressort, qui se déplacerait de la longueur L. Le travail $\mathcal{E}'$ est représenté par l'aire du rectangle OAB*b*.

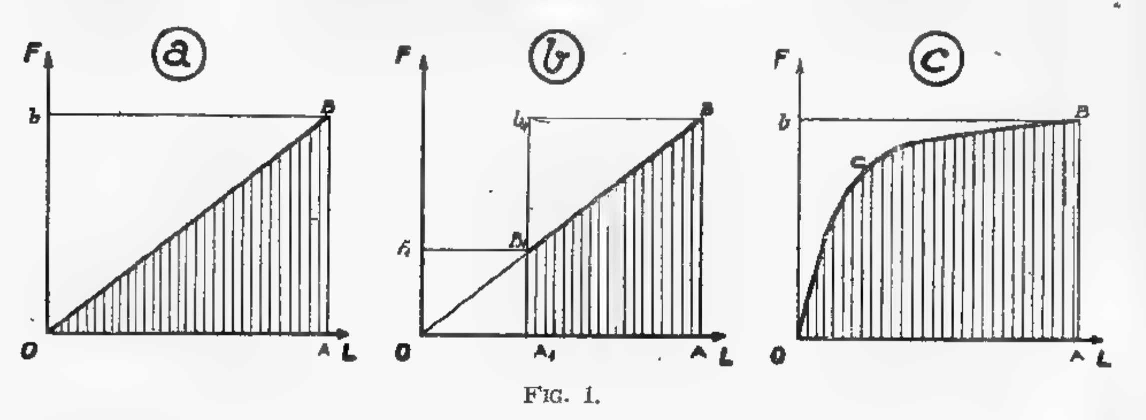


Fig. 1.

Le rendement d'un ressort, *non soumis à une tension initiale*, est donc

$$\rho = \frac{1}{2} \frac{FL}{FL} = 0{,}5.$$

Si l'on donne au ressort une *tension initiale* F_1, il fonctionnera entre les points A_1 et A. Son rendement augmente. Il est, en effet (voir fig. 1 *b*),

$$\rho = \frac{\text{aire } ABB_1A_1}{\text{aire } ABb_1A_1} > 0{,}5.$$

Mais, la contrainte de la matière augmente en même temps pour le même travail à absorber. C'est ce qui limite l'usage d'une tension, ou *bandage initial.*

Signalons que les *amortisseurs oléo-pneumatiques* ont des rendements plus élevés. Leur diagramme a, en effet, une courbure très prononcée (voir fig. 1 *c*) et leur rendement est

$$\rho = \frac{\text{aire } O\,A\,B\,C\,O}{\text{aire } O\,A\,B\,b}.$$

Il est, en général, voisin de 0,8. C'est cette considération, jointe à celle de la possibilité d'un *retour freiné*, qui fait préférer leur emploi à celui des ressorts pour absorber des travaux importants (atterrisseur d'avion par exemple).

1.6 CONTRAINTES ADMISSIBLES POUR LES RESSORTS.

Les ressorts étant destinés à fournir des travaux élastiques, il est nécessaire que les contraintes qu'ils supportent soient toujours comprises dans la période élastique des matériaux qui les constituent.

La *limite élastique* constitue donc une *contrainte limite admissible* pour les ressorts [1].

1. — Cette limite admissible peut être soit la *contrainte normale* n_e de limite élastique pour les ressorts travaillant en flexion, soit la *contrainte tangentielle* t_e de limite élastique pour les ressorts travaillant en torsion.

Il y a lieu de remarquer, par contre, que l'on atteint très souvent des *contraintes usuelles* très voisines de cette limite. En effet, si l'on prend soin d'établir des *butées mécaniques* interdisant aux ressorts de prendre des déformations supérieures à celles qui correspondent à la contrainte limite admissible, il n'y a aucun danger que cette limite soit dépassée, quelle que soit la charge appliquée.

Le calcul d'un ressort s'opèrera donc directement avec les *charges réelles d'utilisation* et non avec des charges de calcul affectées d'un certain coefficient (facteur de charges ou d'accélération).

2. RESSORTS TRAVAILLANT EN FLEXION

2.1 RESSORT RECTANGULAIRE SIMPLE.

Considérons une lame de ressort, de section rectangulaire, encastrée à une extrémité et chargée à l'autre par une charge P (fig. 2). Nous avons vu au chapitre X (Pl. 17) que la flèche d'une telle poutre (console encastrée) est maximum à l'extrémité chargée et a pour valeur

$$f = \frac{P\,L^3}{3\,E\,I}.$$

Le moment fléchissant est maximum à l'encastrement et égal à M = PL. La contrainte est donc maximum à l'encastrement et égale à

$$n_{max} = \frac{M}{\left(\frac{I}{V}\right)}$$

soit

$$n_{max} = \frac{6\,P\,L}{B\,e^2}.$$

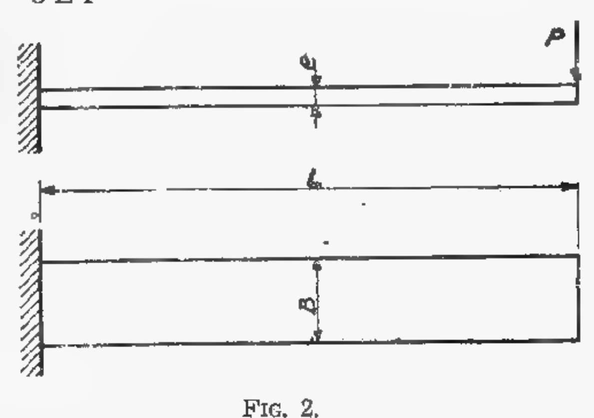


Fig. 2.

On a un ressort de plus grande flexibilité en faisant varier l'épaisseur e de façon à obtenir une *poutre d'égale résistance.*

2.2 RESSORT A LAMES.

2.21 Considérations générales. — Un ressort à lames est constitué par un certain nombre de lames superposées, de longueurs différentes, et non reliées entre elles de façon rigide. Le glissement ne passe donc pas entre les différentes lames qui travaillent en *flexion, indépendamment les unes des autres.*

Pour calculer un ressort à lames on peut se placer dans le cas de lames encastrées, ou s'y ramener, car dans le cas général, le ressort étant symétrique, on peut n'en considérer que la moitié qui est alors supposée encastrée par continuité (tangente à la déformée horizontale).

Nous avons donc un ressort constitué de N lames encastrées et soumises à une charge P à l'extrémité de la plus grande lame de longueur L. Désignons par l la longueur constante d'étagement des lames (voir fig. 3).

On peut admettre que dans une section droite, le rayon de courbure r après déformation, est le même pour toutes les lames, car r est très grand devant l'épaisseur e. Nous avons vu au chapitre IX, paragraphe 3.3, que le rayon de courbure d'une poutre fléchie, initialement droite, est donné par

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E\,I}$$

d'où

$$M = EI \cdot \frac{1}{r} = k \cdot E \cdot I$$

k étant la *courbure constante.*

Donc, *le moment fléchissant agissant sur une lame est proportionnel au produit du module d'élasticité et du moment d'inertie de cette lame.*

La contrainte de la lame est par suite

$$n = \frac{M}{\frac{I}{V}} = k\,E\,V$$

$$\boxed{n = \frac{k}{2}\,E\,e.}$$

La contrainte maximum d'une lame est proportionnelle à son épaisseur et à son module d'élasticité

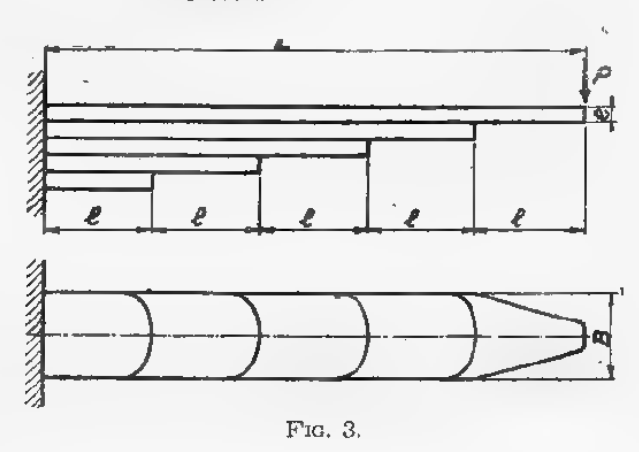


Fig. 3.

2.22 Cas de N lames de même métal, de même épaisseur e et de même largeur. — Le moment d'inertie d'une section est alors le même pour chaque lame :

$$E\ I = \text{constante}\ ; \qquad E\ e = \text{constante}.$$

Dans une même section droite, *chaque lame prend donc le même moment fléchissant et supporte la même contrainte maximum de flexion.*

On peut alors calculer les contraintes et déformations dans une section par les formules courantes, en prenant pour chaque section de l'ensemble des N lames un moment d'inertie égal à N fois le moment d'inertie d'une seule lame. Chaque lame supporte alors une contrainte N fois plus petite que si elle était seule.

Pour calculer les déformations, on peut utiliser les procédés exposés au chapitre X (construction graphique de la déformée ou détermination de la flèche à l'aide d'une force unitaire auxiliaire).

2.23 Cas d'un ressort d'égale résistance. — Les lames étant de même épaisseur constante e, on arrive, en jouant sur leur largeur (en donnant une forme appropriée à leurs extrémités libres, voir fig. 3) à obtenir un ressort sensiblement *d'égale résistance*, c'est-à-dire dont la contrainte maximum est constante à partir d'une distance assez faible du point d'application de la charge P.

La flèche se calcule alors facilement par la méthode simplifiée appli

cable aux *poutres d'égale résistance* que nous avons donnée au chapitre X, paragraphe **4.6** :

$$f = \frac{n}{E} \sum \frac{m}{V} \Delta x$$

m étant le moment de la force unitaire fictive,
n la contrainte constante,
$V = \frac{e}{2}$ la demi épaisseur, également constante.

On a $$m = x \cdot 1 = x$$

x étant la distance de la section considérée au point d'application de la charge unitaire.

La flèche s'écrit alors

$$f = \frac{2n}{Ee} \sum_0^l x \, \Delta x = \frac{2n}{Ee} \frac{L^2}{2}$$

$$f = \frac{n L^2}{E e}$$

La contrainte est d'autre part

$$n = \frac{M}{\frac{I}{V}} = \frac{NPl}{N \frac{Be^2}{6}} = \frac{Be^2}{6Pl}$$

B étant la largeur des lames; l la longueur d'étagement égale à $\frac{L}{N}$.

Nous obtenons finalement la valeur de la flèche

$$f = \frac{6Pl}{Be^2} \frac{N^2 l^2}{Ee}$$

$$\boxed{f = \frac{6PN^2 l^3}{BEe^3}}$$

Remarque. — Cette expression ne tient pas compte de la flèche complémentaire de cisaillement qui est pratiquement négligeable par suite de « l'allongement » des poutres formées par les lames (voir chap. X, §**5.2**).

Application numérique.

Soit : $l = 100$ mm, $E = 20000$ kg/mm² (acier),
$N = 5$ lames, $e = 10$ mm,
$P = 1000$ kg, $B = 100$ mm.

Nous aurons une flèche

$$f = \frac{6 \cdot 1000 \cdot 25 \cdot 100^3}{100 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 10^3} = 75 \text{ mm}$$

sous une contrainte de flexion

$$n = \frac{6 \cdot 1000 \cdot 100}{100 \cdot 100} = 60 \text{ kg/mm}^2.$$

L'énergie absorbée a pour valeur

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} P f = \frac{1000 \cdot 75}{2} = 37500 \text{ kgmm} = 37{,}5 \text{ kgm}.$$

2.3 RESSORTS EN SPIRALE.

Un ressort en spirale est constitué par une lame d'acier encastrée à une extrémité A et solidaire, à son autre extrémité, d'un axe O qui lui transmet un couple M tendant à l'enrouler autour de l'axe O (voir fig. 4).

Ce couple M peut être un couple pur dont le vecteur est sur l'axe O ou

le moment d'une force constante F orthogonale à l'axe O et située à une distance d de cet axe, telle que

$$M = F d.$$

Ce moment est donc un moment fléchissant pour le ressort. Comme il est constant, *le ressort travaille en flexion circulaire*. On lui donne donc une section constante. Soit b sa largeur, e son épaisseur, L sa longueur développée.

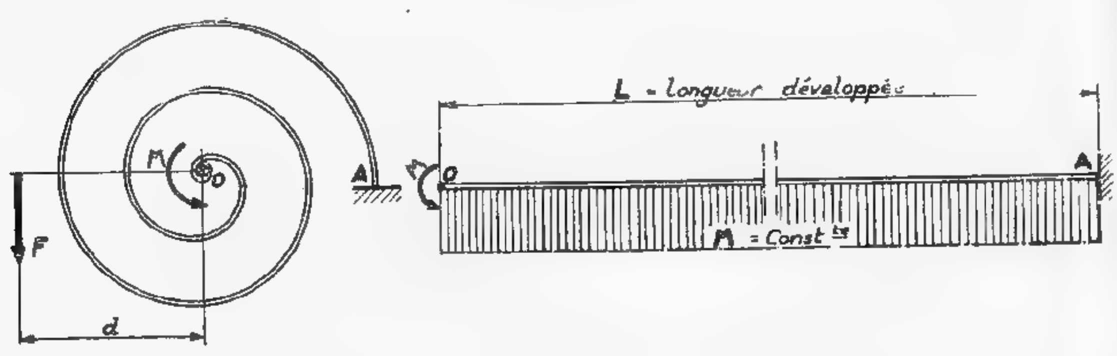


Fig. 4.

2.31 Contrainte. — La contrainte maximum dans une section quelconque, est

$$n_{max} = \frac{M}{\frac{I}{V}} = \frac{M}{\frac{b\ e^2}{6}} = \frac{6\ M}{b\ e^2}.$$

Il faut donc vérifier la condition de résistance :

$$n_{max} \leqslant n_a \text{ (contrainte admissible)}$$

d'où
$$\frac{6\ M}{b\ e^2} \leqslant n_a \quad \text{soit :} \quad M \leqslant \frac{b\ e^2}{6}\ n_a.$$

Remarque. — En réalité, pour un calcul précis, il faudrait utiliser les formules de la théorie de la flexion des pièces courbes (voir chap. IX, § **4.**).

2.32 Déformation. — Nous avons vu au chapitre X, paragraphe **1.3**, que l'angle de rotation relatif de deux sections est donné par

$$\alpha = \sum \frac{M}{E\ I}\ \Delta\ L.$$

Le moment M étant constant, ainsi que le produit E I, l'angle de rotation de la section O par rapport à la section d'encastrement A est

$$\alpha = \frac{M}{E\ I} \sum_0^l \Delta\ L = \frac{M\ L}{E\ I}$$

L étant la *longueur développée* du ressort.

En exprimant l'angle en degrés et en explicitant le moment d'inertie on a

$$\alpha^\circ = 57{,}3\ \frac{M\ L}{E\ \frac{b\ h^3}{12}} = \frac{12 \cdot 57{,}3}{E}\ \frac{M\ L}{b\ h^3}.$$

Pour un acier à ressort : E ≈ 22000 kg/mm². On peut donc écrire

$$\alpha^\circ = \frac{12 \cdot 57{,}3}{22000}\ \frac{M\ L}{b\ h^3}.$$

soit :
$$\alpha^\circ = 0{,}0319\,\frac{M\,L}{b\,h^3}\,.$$

On peut aussi exprimer l'angle α en fonction de la contrainte maximum de flexion n :

$$\alpha^\circ = 57{,}3\,\frac{M\,L}{E\,\frac{I}{V}\,V} = 57{,}3\,\frac{n\,L}{E\,\frac{e}{2}} = 114{,}6\,\frac{n\,L}{E\,e}$$

soit :
$$\alpha^\circ = 0{,}0052\,\frac{L}{e}\,n.$$

3. RESSORTS TRAVAILLANT EN TORSION

3.1 BARRES DE TORSION.

3.11 Formules. — Les barres de torsion constituent le cas le plus simple de ressorts travaillant en torsion.

On les réalise généralement sous forme de *barres cylindriques pleines* [1] dont le diamètre d et la longueur L sont déterminées de façon à satisfaire aux deux équations de *résistance* et de *déformation* des poutres soumises à une torsion plane, soit (chap. XIII, § **2.**)

$$t_{max} = \frac{M_t}{\frac{I_0}{R}} = t_a \qquad \text{soit :} \qquad \frac{M_t}{\frac{\pi}{16}\,d^3} = t_a$$

d'où
$$d = 1{,}72\,\sqrt[3]{\frac{M_t}{t_a}}\,.$$

$$\theta^\circ = 57{,}3\,\frac{M_t\,L}{G\,I_0} \qquad \text{soit :} \qquad \theta^\circ_{max} = \frac{114{,}6\ t_a}{G\,d}\,L$$

d'où
$$L = \frac{G\,d}{114{,}6\ t_a}\,\theta^\circ_{max}.$$

3.12 Application numérique

Soit à déterminer une barre de torsion devant équilibrer un moment de torsion maximum M_t=50 mkg sous un angle de rotation de 120° Contrainte admissible t_a=50 kg/mm² ; G=8000 kg/mm² ;

$$d = 1{,}72\,\sqrt{\frac{50000}{60}} = 16{,}2\ \text{mm},$$

$$L = \frac{8000 \cdot 16{,}2}{114{,}6 \cdot 60}\,120 = 2260\ \text{mm} = 2{,}260\ \text{mètres.}$$

Travail équilibré

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\,M_t\,\theta\,\frac{50}{2}\,\frac{120}{57{,}3} = 52{,}4\ \text{kgm.}$$

---

1. — On a intérêt à utiliser des barres pleines pour obtenir de grands angles de déformation sous de faibles contraintes.

3.13 Remarques. — Si l'on veut atteindre des contraintes élevées [1] il est nécessaire de prendre certaines précautions pour introduire le moment de torsion dans les barres.

Il y a d'abord lieu d'*éviter l'introduction d'un effort tranchant* simultanément au moment de torsion, de façon à éviter toute sursollicitation en flexion qui engendrerait très vite des contraintes prohibitives (barres de petits diamètres). On réalise le plus souvent, à cet effet, un entraînement par *cannelures* présentant du jeu dans le sens d'un encastrement en flexion.

Ces cannelures doivent être exécutées sur des parties renflées en ayant soin d'arrondir les angles rentrants et d'amortir les changements de diamètres. Ces précautions ont pour but de réduire le plus possible les *concentrations de contraintes* que nous avons signalées au chapitre XIII, paragraphe **7**.

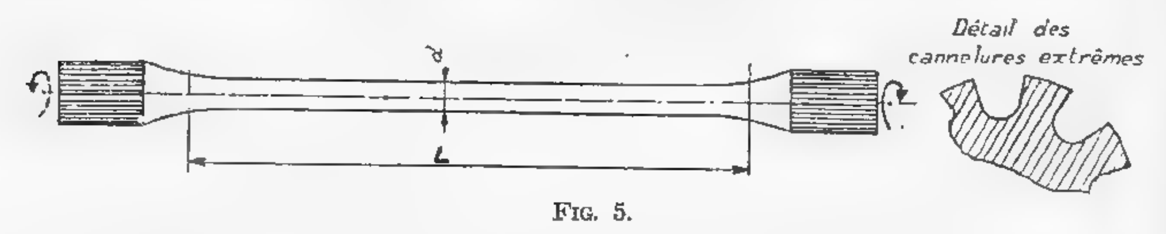


FIG. 5.

On arrive ainsi à des formes d'extrémités et de cannelures telles que celles représentées sur la figure 5.

3.2 RESSORTS A BOUDIN CYLINDRIQUES.

Ces ressorts sont constitués par un fil métallique de section circulaire ou rectangulaire, enroulé en *hélice* régulière sur un cylindre et soumis à une force P agissant *suivant l'axe du cylindre*. Cette force P peut tendre à *allonger* ou à *raccourcir* la hauteur initiale du ressort [2].

3.21 Equilibre d'une section (fig. 6). — Considérons une section droite S quelconque du fil (normale à la fibre moyenne). Soit G le centre de gravité de cette section et O le point d'intersection de l'axe du cylindre avec le plan de la section S.

Le plan de la section S fait l'angle α avec l'axe du ressort.

Nous pouvons faire glisser la force P jusqu'au point O et la décomposer en deux forces :

$P_1 = P \cos\alpha$ dans le plan de la section S,
$P_2 = P \sin\alpha$ normale au plan de la section S.

Transportons ces forces au point G. Le transport de P_1, crée un couple

$$M_t = P_1 \, R$$

(R étant le rayon d'enroulement du fil. Voir rabattement 1, fig. 6).

M_t est un *couple de torsion* puisque ses composantes sont situées dans la section S.

---

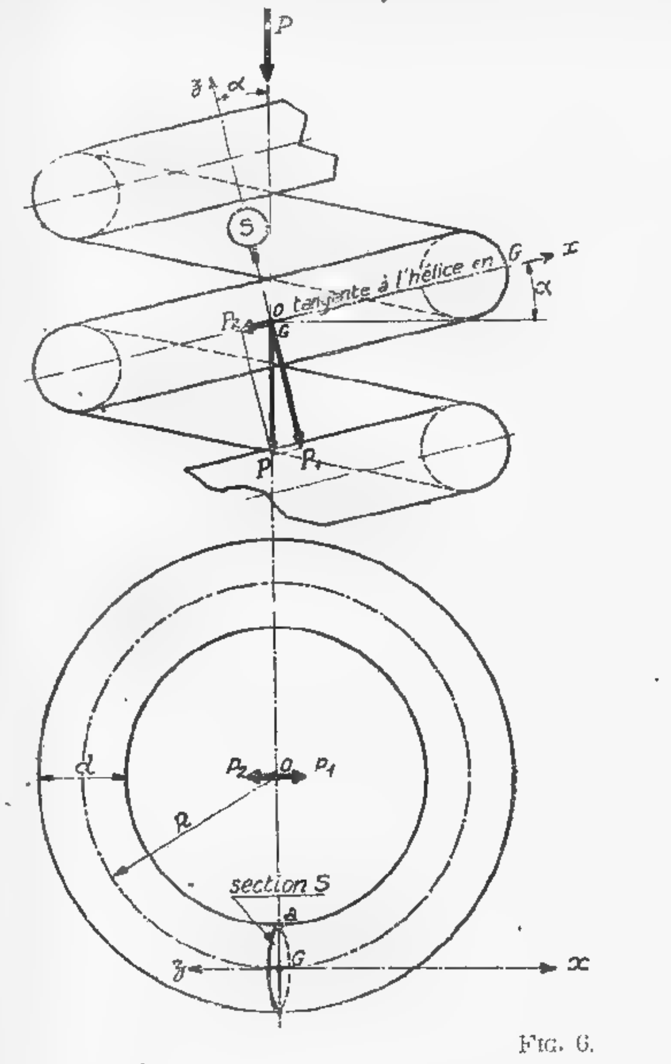
1. — Ces contraintes devront être, comme nous l'avons vu au § 1.6, inférieures à la *contrainte tangentielle de limite élastique*. Cette contrainte peut être prise égale *à la moitié de la contrainte normale de limite élastique*, c'est-à-dire à la moitié des valeurs L_E indiquées sur les tableaux de caractéristiques des aciers. *Exemple :* Si l'on utilise l'acier 45S8 traité à R=140 kg/mm² auquel correspond L_E=120 kg/mm² (*Planche 11*), on adoptera : $t_a \leqslant \frac{120}{2} = 60$ kg/mm².

2. — Ce mode de sollicitation conduit à désigner (improprement) ces ressorts par : ressorts comprimés ou ressorts tendus.

Le transport de P_2 en G, crée un couple

$$M=P_2\ R \text{ (voir rabattement 2, fig. 6)}$$

qui est un *couple de flexion* autour de l'axe Gz contenu dans la section S puisque ses composantes sont normales à la section S. Ce moment de flexion tend à enrouler le ressort comprimé ou à dérouler le ressort tendu.



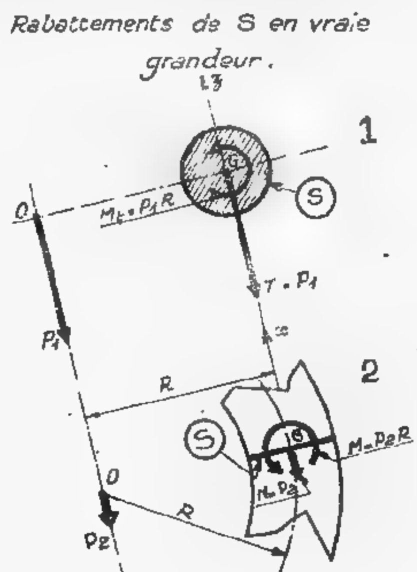


Fig. 6.

En résumé, nous nous trouvons, en G, en présence des efforts suivants :

un *effort tranchant* : $T=P_1=P\cos\alpha$,
un *effort normal* : $N=P_2=\ \sin\alpha$,
un *moment fléchissant* : $M=P_2\ R=R\ P\sin\alpha$,
un *moment de torsion* : $M_t=P_1\ R=R\ P\cos\alpha$.

L'angle α étant le même pour toutes les spires, *tous ces efforts sont constants pour toutes les sections droites du ressort.*

Pour un *ressort sollicité en compression*, l'angle α est faible. On voit en effet, qu'à la limite, quand les spires sont jointives, $\alpha = \frac{d}{2R}$, d étant le diamètre du fil.

Pratiquement, on calcule ces ressorts *en admettant que l'angle α est nul*, soit

$$\sin\alpha=0,$$
$$\cos\alpha=1.$$

Nous n'avons plus alors en G qu'un *effort tranchant* $T = P$ qui donne

des contraintes et surtout des déformations très faibles et que l'on a l'habitude de négliger, et *un moment de torsion*

$$M_t = P\,R$$

que l'on considère seul, en général, dans le calcul des ressorts à boudin.

Remarque. — Dans le cas d'un *ressort sollicité en traction*, l'angle α peut ne plus être négligeable. Ce mode d'utilisation des ressorts à boudin n'est donc pas intéressant car, *à priori*, un ressort de traction est plus fatigué, à charge égale, qu'un ressort de compression de même type. En effet, dans un ressort de traction, on atteint la valeur maximum de α, donc de M et N, en même temps que l'effort maximum, tandis qu'il se produit l'effet inverse dans un ressort comprimé.

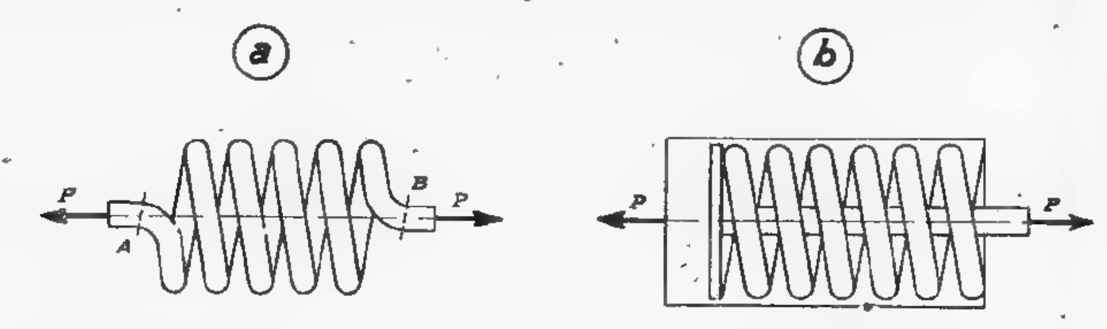


Fig. 7.

De plus, dans un ressort de traction, il se produit des *surtensions* qui peuvent amener des ruptures prématurées aux points de grande courbure A et B (voir fig. 7 *a*).

Il y a donc lieu, chaque fois qu'on le peut, de *remplacer un ressort de traction par un ressort de compression*, à l'aide, par exemple, d'un dispositif analogue à celui des pesons du commerce (voir fig. 7 *b*).

3.22 **Calcul simplifié des ressorts à boudin en fil rond.** — Désignons par :

R le rayon moyen d'enroulement du fil,
N le nombre de spires,
d le diamètre du fil,
$M_t = PR$ le moment de torsion auquel est soumis le ressort, du fait de la charge P.

3.221 *Condition de résistance.* — La *contrainte de torsion maximum* est donnée par la formule de la torsion plane :

$$t = \frac{M_t}{\frac{I_o}{r}}$$

avec $\frac{I_o}{r} = \frac{\pi d^3}{16}$ et $M_t = PR$

d'où

$$t = \frac{\pi d^3}{16\,P\,R}.$$

On doit donc avoir

$$\boxed{\frac{16\,P\,R}{\pi d^3} \leqslant t_a.}$$

Cette condition détermine, en fonction du rayon R, le *diamètre du fil* à adopter pour un ressort devant supporter une charge donnée P :

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16\,P\,R}{\pi t_a}} = 1{,}721\sqrt[3]{\frac{P\,R}{t_a}}$$

ou la *charge maximum* que peut supporter un ressort donné

$$P \leqslant \frac{\pi\, d^3\, t_a}{16\ R} = 0{,}1963\ \frac{d^3\ t_a}{R}.$$

Remarque. — Il y a lieu d'admettre une contrainte t_a *inférieure à la contrainte tangentielle de limite élastique* pour tenir compte des considérations suivantes :

a) L'effort tranchant, le moment fléchissant et l'effort normal, qui ont été négligés, donnent en réalité des *contraintes complémentaires* qui se combinent avec celle de torsion. Les contraintes combinées maxima sont atteintes du côté intérieur du ressort (point *a* sur fig. 6).

b) L'utilisation des formules de torsion plane n'est pas rigoureuse dans le cas des ressorts à boudin, car ces formules sont établies pour des pièces rectilignes, alors que l'axe du fil est courbe. Cet « effet de courbure » donne également des contraintes supplémentaires du côté intérieur au ressort [1]. En pratique, pour les valeurs usuelles de R/d qui sont de l'ordre de 5, et pour les ressorts de compression, on peut admettre pour t_a environ 80 à 85 % de la contrainte tangentielle de limite élastique de l'acier utilisé (c'est-à-dire 40 à 42,5 % de la valeur L_E des tableaux de caractéristiques de ces aciers) [2].

Exemple : Pour l'*acier mangano-silicieux type* 45S8 qui est très utilisé pour la fabrication des ressorts, on adoptera, si l'on utilise son traitement supérieur pour lequel $R=180$ et $L_E=160$ (voir *planche* 11)

$$t_a = 64 \text{ à } 68 \text{ kg/mm}^2.$$

3.222 *Condition de déformation.* — Considérons un petit élément de spire de longueur très petite ΔL, limité par deux sections très voisines S et S′ (voir fig. 8). L'angle de rotation de la section S′ par rapport à S est donné par la formule de la torsion plane [3] :

$$\Delta\alpha = \frac{M_t}{G\ I_0}\,\Delta L = \frac{P\ R}{G\ I_0}\,\Delta L.$$

Pour déterminer la *flèche* correspondant à cette rotation, menons par les centres de gravité G et G′ des sections S et S′, les rayons orthogonaux à l'axe du ressort qui, par définition, se coupent en un point O de l'axe. Sous l'effet de la torsion, le rayon G′O vient en G′O′ après avoir tourné de l'angle $\Delta\alpha$. Le segment OO′ mesure la *flèche élémentaire* due à l'élément de spire ΔL, soit

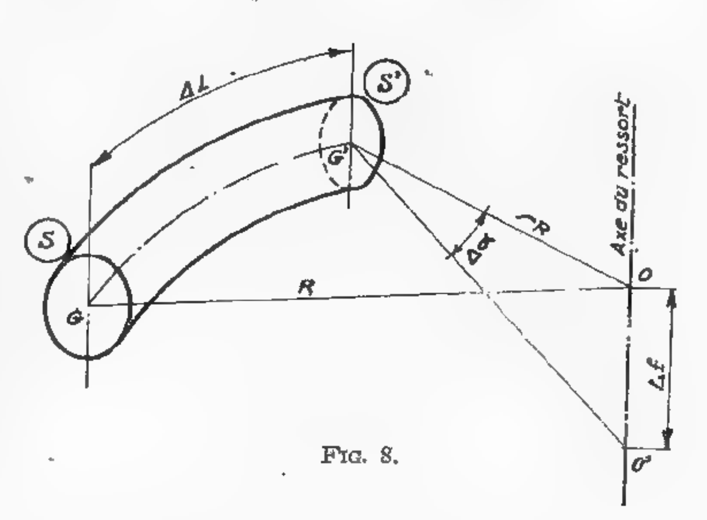


Fig. 8.

$$\Delta f = R\ \Delta\alpha = \frac{P\ R^2}{G\ I_0}\,\Delta L.$$

1. — Cette double considération de « surcontraintes » à l'intérieur s'accorde parfaitement avec les amorces de rupture constatées, de ce côté, sur les ressorts en service.

2. — Ce « taux d'abattement » peut être adouci si le rapport R/d est supérieur à 5.

3. — En négligeant toujours « l'effet de courbure » du ressort.

Flèche par spire. — La longueur de la fibre moyenne d'une spire étant

$$L = 2\,\pi\,R$$

la flèche relative à une spire est

$$f = \sum_0^L \frac{P\,R^2}{G\,I_0}\,\Delta L = \frac{P\,R^2}{G\,I_0}\,L = \frac{P\,R^2}{G\,I_0}\,2\,\pi\,R$$

$$f = \frac{2\,\pi\,P\,R^3}{G\,\frac{\pi\,d^4}{32}}$$

$$\boxed{f = \frac{64\,P\,R^3}{G\,d^4}}.$$

Flèche totale. — La *flèche totale* d'un ressort de N spires est donc

$$F = N\,f$$

soit

$$\boxed{F = \frac{64\,N\,P\,R^3}{G\,d^4}}.$$

Cette relation, jointe à la condition de résistance, permet de déterminer un ressort (trois paramètres R, d et N) de façon à obtenir une *flèche donnée sous une charge donnée, avec une contrainte inférieure à la contrainte admissible.*

Remarque. — Il existe, en plus de la flèche de torsion, les flèches de flexion, de cisaillement et de compression, mais elles sont en général négligeables devant celle de torsion et l'on peut se contenter de la méthode de calcul exposée ci-dessus sans y apporter de correction.

3.223 *Relation entre la contrainte et la flèche par spire.*

On a

$$t = \frac{16\,P\,R}{\pi\,d^3}$$

et

$$f = \frac{64\,P\,R^3}{G\,d^4}$$

d'où

$$\frac{f}{t} = \frac{4\,\pi\,R^2}{G\,d}$$

soit

$$\boxed{f = \frac{4\,\pi\,R^2}{G\,d}\,t.}$$

En particulier, la *flèche maximum* du ressort est

$$\boxed{F = \frac{4\,\pi\,N\,R^2}{G\,d}\,t_a.}$$

3.23 **Abaque pour ressorts à boudin en fil rond.** — Pratiquement, le calcul des ressorts s'effectue rapidement à l'aide d'abaques.

Nous donnons, **Planche 24,** un abaque, établi en *coordonnées logarithmiques* [1] dans les conditions ci-dessous :

contrainte tangentielle maximum admissible : $t_a = 60$ kg/mm²,
module d'élasticité transversal : G = 8000 kg/mm².

---

1. — L'utilisation des coordonnées logarithmiques permet d'obtenir des réseaux de droites au lieu de réseaux de courbes, ce qui facilite le tracé et améliore la préci-

Les formules précédentes deviennent :

charge max. admissible (§ 3.221) $P=\frac{\pi\ d^3 \cdot 60}{16\ R}=11{,}781\frac{d^3}{R}$,

flèche max. par spire (§ 3.223) $f=\frac{4\ \pi\ R^2\ 60}{8000\ d}=0{,}09425\frac{R^2}{d}$.

L'abaque est gradué en abscisses en *rayons moyens* R (mm) et en ordonnées en *charges maxima admissibles* P (kg) (graduations logarithmiques).

Il comporte deux réseaux de droites inclinées représentant respectivement :

— droites d'inclinaison négative : *diamètre d du fil* indiqué en mm par les chiffres encerclés,

— droites d'inclinaison positive : *flèches par spire f* indiquées en mm par les chiffres non encerclés situés sur ces droites.

Utilisation de l'abaque. — L'abaque permet de *déterminer* un ressort, c'est-à-dire de calculer ses dimensions en fonction de ses caractéristiques mécaniques d'utilisation (P et f) connues ; ou encore de *vérifier* un ressort, c'est-à-dire de connaître ses caractéristiques mécaniques en fonction de ses dimensions (R et d) connues [1].

Il permet pratiquement de connaître, par lecture directe, les données des ressorts de 1 à 10 mm de diamètre de fil. Pour des diamètres inférieurs (0,2 à 1 mm) diviser d, f et R, lus sur l'abaque, par 10 et diviser P par 100. Pour des diamètres supérieurs à 10 mm, même principe : multiplier au lieu de diviser.

Exemple 1. — Soit à *déterminer* un ressort sollicité en compression équilibrant « à bloc » (spires jointives) une force P=70 kg sous une flèche totale F=30 mm.

Adoptons, par exemple, N=6 spires, ce qui fixe $f=\frac{F}{N}=5$ mm. Le point de rencontre de l'horizontale issue de P=70 avec l'oblique $f=5$ fournit les résultats :

$d=4{,}5$ mm R=15,4 mm (en abscisses).

Le *pas* P *du ressort détendu* est donné (voir schéma *Planche* 24), par

$$P=f+d=9{,}5 \text{ mm}.$$

L'*encombrement* du ressort détendu vaut :

hauteur : $H=N\ P+d=6\cdot 9{,}5+4{,}5=61{,}5$ mm,
diamètre : $D=2\ R+d=30{,}8+4{,}5=35{,}3$ mm.

Exemple 2. — Soit à *déterminer* un petit ressort utilisant un fil de diamètre $d=0{,}6$ mm et devant fournir « à bloc » une force P=800 g=0,8 kg.

Au point de concours de $P=0{,}8\cdot 100=80$ avec $d=0{,}6\cdot 10=6$ on trouve :

$$R=\frac{32}{10}=3{,}2 \text{ mm} \quad \text{et} \quad f=\frac{16{,}6}{10}=1{,}66 \text{ mm}.$$

---

sion. Il permet, en outre, d'obtenir une précision relative aussi importante pour les petits ressorts que pour les grands.

Pour interpoler entre les graduations en *abscisses* (rayons R), remarquer que l'échelle adoptée correspond à l'échelle supérieure de la règle à calculs normale (longueur graduée égale à 25 cm). De même, l'échelle portée en *ordonnées* (efforts P) correspond à l'échelle supérieure de la « règle de poche » (longueur graduée 12,5 cm).

1. — D'une façon plus générale il permet de déterminer deux, quelconques, des paramètres R, P, d, f, les deux autres étant connus.

Le nombre de spires se déterminera d'après la flèche totale F à obtenir

$$N = \frac{F}{f} \cdot$$

Exemple : F=10 mm

$$N = \frac{10}{1,66} = 6 \text{ spires ;}$$

Diamètre d'encombrement

$$D = 2R + d = 6,4 + 0,6 = 7 \text{ mm ;}$$

Pas du ressort détendu

$$p = f + d = 1,66 + 0,6 = 1,72 \text{ mm.}$$

Exemple 3. — Soit à *vérifier* la tenue d'un ressort de dimension R=30 mm, $d=5$ mm, sous l'action d'un effort produisant une flèche par spire égale à 8 mm.

D'après l'abaque, ce ressort, soumis à une contrainte $t_a=60$ kg/mm², prend une flèche par spire $f=17$ mm (point de rencontre de R=30 et $d=5$, situé entre les droites $f=16$ et $f=18$). La flèche étant, dans le cas considéré, égale à 8 mm, il subira donc une contrainte

$$t = t_a \frac{8}{17} = 28,2 \text{ kg/mm}^2.$$

Remarque. — Pratiquement, on doit adopter des valeurs de d qui correspondent aux diamètres de fil existants.

On choisira donc la dimension existante immédiatement supérieure à la dimension théorique lue sur l'abaque. Il en découlera une légère modification de f ou de P par rapport à leurs valeurs théoriques.

3.24 Ressorts à boudin en fil carré. — Dans le calcul des ressorts en fil carré, on applique encore les mêmes formules de la torsion simple, mais en y remplaçant le moment d'inertie I_0 et le mode d'inertie $\frac{I_0}{R}$ par les valeurs fictives de la théorie de Saint Venant que nous avons données au chapitre XIII, paragraphe **3.24**, soit :

$$J = 0,1405 \; C^4$$
$$K = 0,218 \; C^3$$

C étant la longueur du côté du carré.

La *contrainte maximum* est donc

$$t = \frac{M_t}{0,218 \; C^3} = 4,6 \frac{P \; R}{C^3}$$

et la *flèche par spire*

$$f = \frac{2 \pi P R^3}{0,1405 \; G \; C^4} = 44,7 \frac{P \; R^3}{G \; C^4}$$

3.3 RESSORTS A BOUDIN CONIQUES.

Ces ressorts sont constitués par un fil métallique, de section circulaire ou rectangulaire, *enroulé en hélice sur un cône* et soumis à une *force* P *agissant suivant l'axe du cône* (voir fig. 9).

Ces ressorts s'emploient pour obtenir un *encombrement minimum*, car ils peuvent s'écraser entièrement si l'ouverture du cône est telle que les spires puissent pénétrer les unes dans les autres ; tandis que l'encombrement minimum d'un ressort cylindrique est limité par la somme des diamètres du fil soit Nd.

Le rayon d'enroulement R du ressort varie du rayon maximum R_1 au rayon minimum R_2. Donc, le moment de torsion $M_t = PR$ varie entre les deux valeurs extrêmes PR_1 et PR_2 et, si la section du fil est constante, la contrainte de torsion sera maximum pour la spire la plus grande :

$$t_{max} = \frac{M_{t\,max}}{\left(\frac{I_0}{r}\right)} = \frac{P\,R_1}{\left(\frac{I_0}{r}\right)}.$$

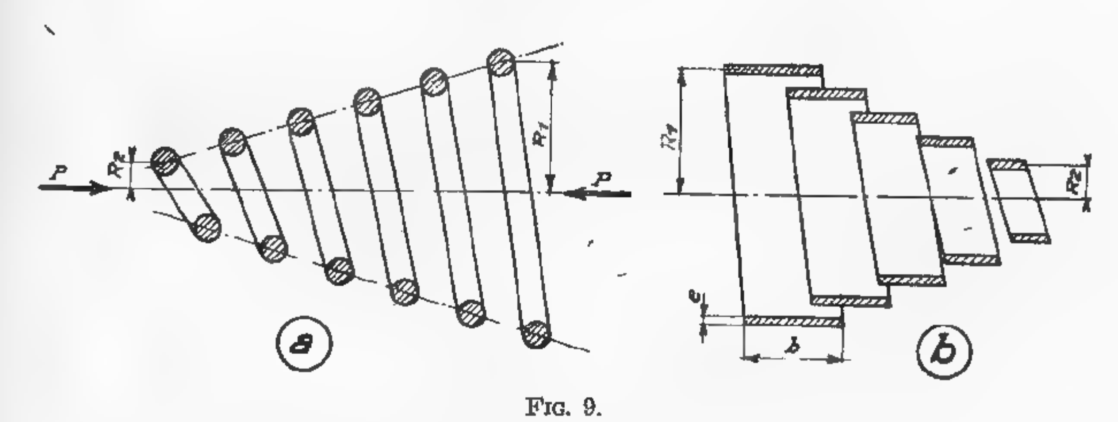


FIG. 9.

3.31 Fil de section circulaire de diamètre d.

$$\left(\frac{I_0}{r}\right) = \frac{\pi\,d^3}{16}.$$

La condition de résistance est, de même que pour un ressort cylindrique :

$$t_{max} = \frac{16\;P\;R_1}{\pi\;d^3} \leqslant t_a.$$

D'où la *charge maximum* à admettre pour un ressort donné :

$$P \leqslant \frac{\pi\;d^3\;t_a}{16\;R_1}.$$

La *formule de déformation* est plus compliquée à établir. La formule de la flèche élémentaire est toujours vraie :

$$\Delta f = \frac{P\;R^2}{G\;I_0}\,\Delta L.$$

Mais R est variable et L est une fonction compliquée de R.
Le calcul d'intégration donne finalement la formule de la flèche totale :

$$\boxed{F = \frac{16\;P\;L}{\pi\;G\;d^4}\,(R_1^2 + R_2^2).}$$

$L = \pi\,N\,(R_1 + R_2)$ étant la *longueur développée* du ressort.

3.32 Fil de section rectangulaire. — On emploie toujours les mêmes formules dans lesquelles on remplace I_0 et $\frac{I_0}{r}$ respectivement par J et K, valeurs fictives de Saint-Venant relatives au rectangle.

Soient *b* et *e* la largeur et l'épaisseur du fil, R_1 le rayon maximum et R_2 le rayon minimum du ressort (voir fig. 9 *b*).

On trouve les formules :

$$P \leqslant \frac{2\ b\ e^2}{9\ R_1}\ t_a$$

$$F = 1{,}8\,\frac{P\ L}{G}\ (R_1^2 + R_2^2)\ \frac{b^2 + e^2}{b^3\ e^3}.$$

Les ressorts de section rectangulaire sont généralement formés d'une lame plate, d'épaisseur e faible devant la largeur b.

On prend souvent une largeur b décroissante pour tendre vers un ressort d'égale résistance.

CHAPITRE XV

COMBINAISON DES CONTRAINTES

1. GÉNÉRALITÉS

1.1 RAPPEL DE DÉFINITIONS.

Nous avons été conduits, dès le début de la résistance des matériaux (chap. V, § **2.2**), à définir les *deux types de contraintes* que pouvait subir un *élément de section* d'un corps :

a) *Contrainte normale n :* engendrée par une force élémentaire *perpendiculaire* à l'élément de section et ayant tendance à *allonger* (traction) ou *raccourcir* (compression) les « fibres » traversant cet élément. Nous avons vu que les contraintes normales étaient dues, *pour des éléments de sections droites des poutres*, à des sollicitations en traction ou compression simples (efforts normaux) et à des moments fléchissants ;

b) *Contrainte tangentielle t :* engendrée par une force élémentaire agissant *dans le plan* de l'élément de section et ayant tendance à faire *glisser* cet élément par rapport aux éléments parallèles voisins. Nous avons vu que les contraintes tangentielles étaient dues, *pour des éléments de sections droites des poutres*, à des sollicitations en cisaillement provenant d'efforts tranchants ou de moments de torsion.

1.2 CONTRAINTES AUTOUR D'UN POINT.

En fait, les éléments des sections droites ne sont pas les seuls à subir des contraintes.

La *théorie de l'élasticité* définit mathématiquement les contraintes agissant sur un élément de surface ΔS entourant un point donné et assujetti à *tourner* autour d'axes issus de ce point. On arrive ainsi à des relations fondamentales existant entre les *contraintes autour d'un point*. L'étude de ces relations est facilitée par une représentation graphique remarquable connue sous le nom de *cercle de* MOHR [1].

Cette étude dépassant le cadre de notre exposé, nous nous contenterons d'indiquer les *résultats pratiques* auxquels elle permet d'aboutir.

1.3 OBJET DE LA COMBINAISON DES CONTRAINTES.

Nous avons appris à calculer les *contraintes partielles* normales ou tangentielles agissant sur les *sections droites* des poutres. Les théories citées ci-dessus permettent de connaître ces contraintes partielles *dans toutes les directions*. Elles permettent, au surplus, de comparer leurs cercles repré-

1. — Cette représentation graphique présente une certaine analogie avec le cercle d'inertie que nous avons étudié au chap. II (§ 8.5). Ces deux représentations sont d'ailleurs dues au même auteur.

sentatifs à des « lignes de résistance », propres à chaque matériau étudié, connues sous le nom de « *courbes intrinsèques* » de ces matériaux. Cette comparaison permet d'étudier l'*effet combiné* des différentes contraintes partielles vis-à-vis de la résistance de l'élément [1]. Elle permet, au surplus, d'établir des *formules de combinaison des contraintes*, que nous reproduisons ci-après, l'emploi de ces formules restant le procédé industriel le plus pratique pour étudier la *résistance composée* des éléments.

1.4 PLAN D'ETUDE.

Avant d'aborder l'étude de la combinaison des contraintes normales et tangentielles qui reste l'objet essentiel de ce chapitre, nous examinerons successivement les principes de superposition des contraintes normales entre elles et des contraintes tangentielles entre elles, certains de ces principes ne constituant que des rappels de notions déjà acquises.

2. COMBINAISON DES CONTRAINTES NORMALES ENTRE ELLES

2.1 CONTRAINTES NORMALES AGISSANT SUIVANT LE MÊME AXE.

Nous rappelons que la superposition de ces contraintes s'effectue *algébriquement* (c'est-à-dire que les tractions s'ajoutent arithmétiquement aux tractions et se retranchent arithmétiquement des compressions). Le signe du résultat final indique si la *contrainte normale totale* est en traction ou compression.

L'exemple le plus classique est celui de la superposition des contraintes normales en *flexion composée* et nous reproduisons, ci-dessous (fig. 1), la figure ayant servi à illustrer ce phénomène (chap. IX, § 3.225).

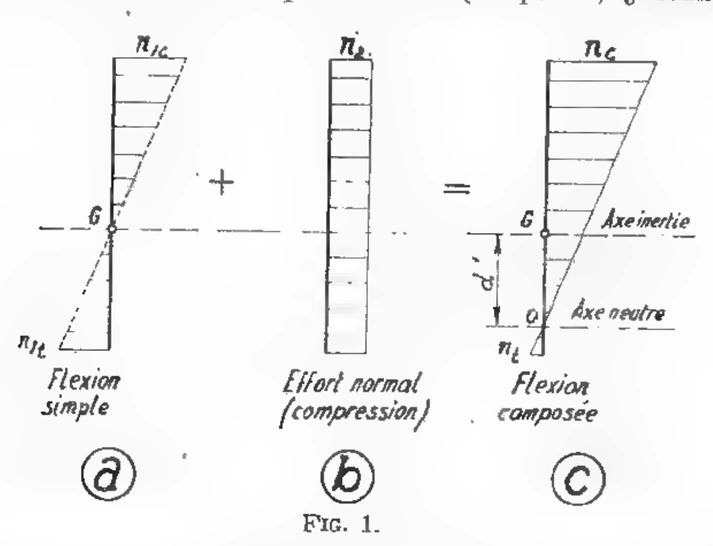


FIG. 1.

2.2 CONTRAINTES NORMALES AGISSANT SIMULTANÉMENT SUIVANT DEUX DIRECTIONS PERPENDICULAIRES ENTRE ELLES.

2.20 **Remarques préliminaires et notations.** — Désignons par n_x et n_y les contraintes normales partielles agissant respectivement suivant deux axes perpendiculaires xx' et yy', passant par le centre de l'élément de volume (ou de surface) étudié (fig. 2 *a*). Ces contraintes partielles, qui doivent chacune agir isolément (c'est-à-dire sans cisaillement) sur les faces

1. — Cette méthode est connue sous le nom de « théorie de Mohr-Caquot ».

de l'élément qu'elles intéressent, constituent des *contraintes normales principales*, telles qu'elles sont définies par la théorie de l'élasticité.

Pour étudier la combinaison de ces contraintes, deux cas sont à envisager selon qu'elles sont toutes deux de même signe (deux tractions ou deux compressions) ou bien qu'elles sont de signes contraires (compression et traction).

Les règles de combinaison données ci-dessous sont valables pour tous les *matériaux isotropes présentant des contraintes admissibles en traction et en compression simples sensiblement égales* (cas général des métaux ductiles ; voir ci-après § 4.0).

2.21 Contraintes normales principales de mêmes signes.

Principe. — Dans ce cas, il n'y a pas de combinaison de leurs effets. La plus élevée des deux entraîne la rupture sans que l'autre ait d'influence.

Exemple. — L'exemple le plus courant est fourni par les *contraintes de traction* existant sur les parois latérales d'une *enveloppe cylindrique mince soumise à une pression interne.*

Nous avons vu au chapitre VI, paragraphe **5.4**, qu'un élément de paroi est soumis *transversalement*, à une contrainte de traction pure

$$n_1 = n_y = p\,\frac{R}{e} \qquad \text{(fig. 2 } b\text{)}$$

et *longitudinalement* à une contrainte de traction pure

$$n_2 = n_x = p\,\frac{R}{2e} = \frac{n_1}{2}.$$

La *contrainte maximum* n_1 est donc seule à envisager pour déterminer l'épaisseur des parois (pour un matériau remplissant les conditions ci-dessus).

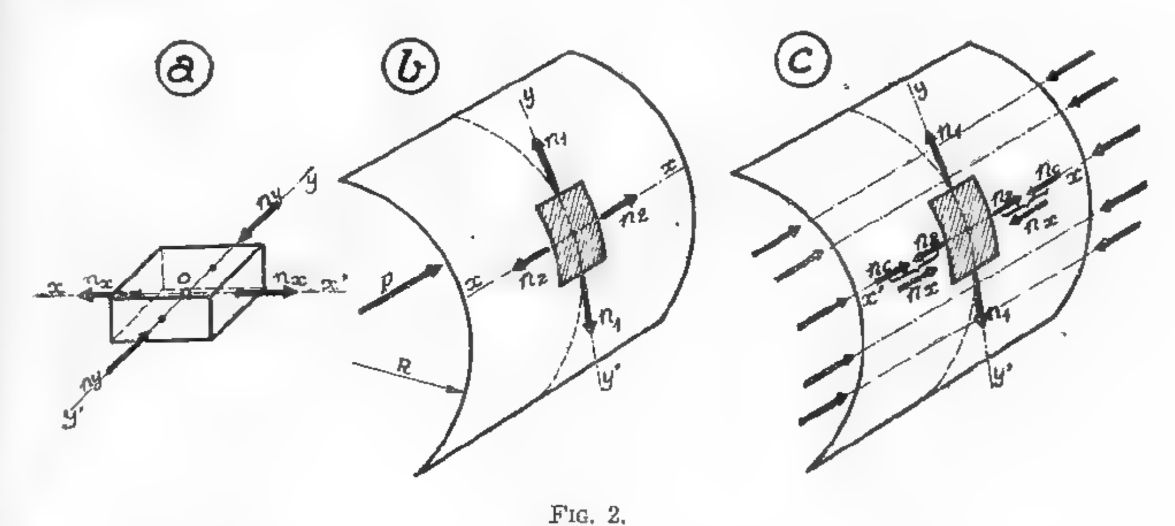


Fig. 2.

2.22 Contraintes normales principales de signes contraires.

Principe. — La superposition de ces deux contraintes équivaut, alors, à une contrainte normale équivalente » égale à la somme des valeurs absolues des contraintes partielles :

$$n_r = |\,n_x + n_y\,| \text{ (en valeur absolue).}$$

Exemple (fig. 2 *c*). Si l'on soumet la paroi de cylindre de la figure 2 *c* à une contrainte de compression longitudinale pure n_c suffisante pour

inverser le sens de la traction n_2, on obtient longitudinalement une *compression* longitudinale

$$n_x = n_c - n_2$$

qui se superpose à la traction transversale $n_1 = n_y$.

Leur combinaison donne une *contrainte normale équivalente*

$$n_r = |n_1 + n_x| \text{ (en valeur absolue)}$$

à comparer avec la contrainte admissible en traction et compression simples.

2.23 Application numérique.

2.231 *Données.* — Un *fuselage-coque d'avion stratosphérique* est soumis à une « pression interne effective » $p=1$ kg/cm² (au coefficient de calcul à la rupture). Il est de section circulaire de rayon R=2,750 m (au maître-couple) et d'épaisseur $e=1{,}25$ mm.

Contraintes de traction dues à la pression :

$$\text{transversale : } n_1 = \frac{pR}{e} = \frac{0{,}01 \cdot 2750}{1{,}25} = 22 \text{ kg/mm}^2$$

$$\text{longitudinale : } n_2 = \frac{n_1}{2} = 11 \text{ kg/mm}^2.$$

Déterminer les *contraintes normales pures* n_{ca} *et* n_{ta}, *admissibles dans le sens longitudinal, pour les efforts de flexion générale* [1] devant se superposer à ceux dus à la pression interne.

Contrainte admissible en traction ou compression simples : $n_a = 36$ kg/mm² (tôles de duralumin affaiblies de 10 % par les lignes de rivets ou de soudure électrique).

2.232 *Résultats.* — *En traction,* la contrainte admissible n_{ta} doit être telle que

$$n_r = n_x = n_2 + n_{ta} - n_a \text{ (puisque } n_1 \text{ n'influe pas)}$$

soit :

$$11 + n_{ta} = 36$$

d'où

$$n_{ta} = 36 - 11 = 25 \text{ kg/mm}^2.$$

En compression [2], la contrainte n_{ca} doit être telle que

$$n_r = |n_x + n_y| = n_a \qquad \text{soit} \qquad |n_x + 2\,n_2| = n_a$$

avec n_x = contrainte de compression longitudinale résultante :

$$n_x = n_{ca} - n_2.$$

On doit donc avoir (en valeurs absolues) :

$$2\,n_2 + n_{ca} - n_2 = n_a$$

$$n_{ca} = n_a - n_2 = n_{ta} = 25 \text{ kg/mm}^2.$$

2.233 *Conclusion.* — La pression interne abaisse donc les valeurs des contraintes normales pures, admissibles dans le sens longitudinal, de la valeur de la tension longitudinale n_2, aussi bien en compression qu'en traction.

---

1. — La flexion générale du fuselage (due, par exemple, aux charges sur empennages) engendre des *contraintes normales pures* à l'aplomb du plan de symétrie contenant les efforts tranchants, s'il n'y a pas superposition de torsion.

2. — Cette limite en compression suppose qu'il ne se produit pas d'instabilité (chap. XVI et XIX).

3. COMBINAISON DES CONTRAINTES TANGENTIELLES ENTRE ELLES

3.1 PRINCIPE.

Des contraintes tangentielles (provenant de sollicitations différentes simultanées) *se combinent géométriquement*, c'est-à-dire comme des vecteurs (parallélogramme des forces, par exemple). Voir figure 3 *a*.

Exemple. — Nous avons vu au chapitre XI qu'un effort tranchant T agissant sur une poutre soumise à une flexion déviée était équivalent à deux efforts tranchants T_x et T_y (fig. 3 *b*) produisant de la flexion plane. Il en est de même des tensions internes de cisaillement (en supposant connues les directions de ces tensions).

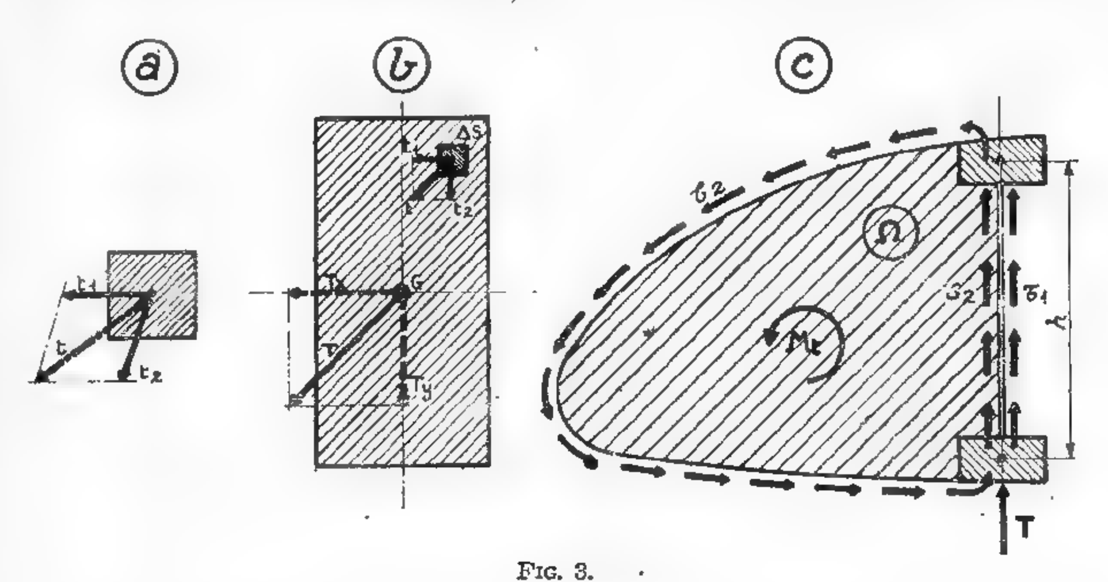


FIG. 3.

3.2 CAS PARTICULIER.

Pour les *sections minces* où les tensions de cisaillement ont une direction bien définie, tangente au contour, la combinaison devient *algébrique* (cas particulier de combinaison géométrique de vecteurs ayant même ligne d'action).

Exemple. — La figure 3 *c* représente la coupe d'une *structure monolongeron avec caisson de torsion de bec d'attaque* de surface Ω. L'effort tranchant T (appliqué au longeron seul) engendre sur l'âme un flux de cisaillement

$$\tau_1 = \frac{T}{h} \text{ (chap. IX, § 3.73).}$$

Le moment de torsion engendre un flux (sur tout le périmètre du caisson)

$$\tau_2 = \frac{M_t}{2\,\Omega} \text{ (chap. XIII, § 4.13).}$$

Ces flux étant de même sens, dans le cas de la figure, ils s'ajoutent *arithmétiquement* sur l'âme et donnent

$$\tau_r = \tau_1 + \tau_2$$

d'où une contrainte résultante de cisaillement de l'âme :

$$t_r = \frac{\tau_r}{e} = \frac{\tau_1}{e} + \frac{\tau_2}{e} = t_1 + t_2.$$

Remarque. — Le flux résultant τ_r est également celui qui agit sur les rivetages âme-semelles du longeron (voir chap. XXI).

3.3 OBSERVATION ESSENTIELLE.

Ne jamais combiner une contrainte de cisaillement avec sa contrainte réciproque. On sait, en effet, que ces deux contraintes, qui constituent une *condition nécessaire d'équilibre* (chap. VIII, § 2.2), sont dues au même phénomène, c'est-à-dire au même effort tranchant ou au même moment de torsion. Il serait donc absolument incorrect de les combiner entre elles.

4. COMBINAISON DES CONTRAINTES NORMALES ET TANGENTIELLES

4.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Les *formules de combinaison* que nous donnons ci-après découlent, comme nous l'avons annoncé plus haut, de la *théorie de la courbe intrinsèque* (théorie de MOHR-CAQUOT) qui constitue la méthode moderne la plus satisfaisante.

Nous ne donnerons ici que des résultats simples applicables essentiellement aux *matériaux isotropes et ductiles présentant une contrainte admissible en compression pure sensiblement égale à celle de traction pure.*

Cette condition est d'ailleurs satisfaite pour tous les métaux laminés et étirés qui constituent la grande majorité des matériaux utilisés en construction aéronautique (aciers, alliages légers laminés). Elle tombe en défaut pour certains alliages coulés (fonte, alliages de magnésium), pour les bois et pour les matériaux cristallins dits « matériaux fragiles » (briques, maçonnerie, pierre, béton, etc...) [1].

Il est à signaler que les formules auxquelles nous aboutirons sont légèrement différentes de celles indiquées dans un grand nombre de formulaires ou traités de résistance des matériaux qui découlent essentiellement de la *théorie de combinaison des tensions de* SAINT-VENANT. Cette théorie repose sur un principe « d'équivalence de déformations », alors que celle que nous utilisons met en jeu une comparaison directe des contraintes autour d'un point avec les courbes caractéristiques de résistance expérimentales.

4.1 PRINCIPE D'ETABLISSEMENT DES FORMULES DE COMBINAISON.

L'état complexe dû à la superposition de contraintes normales et tangentielles est ramené à un *état simple fictif* comprenant une seule contrainte dite *contrainte équivalente* que nous désignerons par n_r, qui est à comparer directement avec les *contraintes normales admissibles à la limite élastique* n_e *ou* (par extension) *à la rupture* n_a. Cette contrainte équivalente correspond donc à une *contrainte normale.* Cette théorie ne concerne que les *états de contraintes* dits *plans* où l'on peut rencontrer *au maximum :*

- deux contraintes normales n_1 et n_2 agissant suivant deux directions perpendiculaires,
- une contrainte de cisaillement t agissant également (par suite de sa réciprocité) suivant ces deux directions.

---

1. — Cette méthode simplifiée suppose essentiellement que les courbes intrinsèques sont assimilables à *deux droites parallèles*, ce qui est très voisin de la réalité pour les matériaux ductiles, mais nettement différent pour les matériaux fragiles.

Il est à remarquer que ces états plans de contraintes constituent la grande majorité des cas rencontrés en résistance des matériaux, notamment tous les cas concernant les poutres prismatiques et les plaques minces.

Pour rester fidèles à notre méthode d'étude, nous envisagerons d'abord le cas simple où l'une des contraintes normales est nulle, pour examiner ensuite le cas général cité ci-dessus.

4.2 COMBINAISON D'UNE CONTRAINTE NORMALE AVEC UNE CONTRAINTE TANGENTIELLE.

Ce cas est pratiquement le plus usuel en résistance des matériaux courante. C'est, notamment, celui auquel on aboutit lors de l'étude des *poutres prismatiques* fléchies, cisaillées et tordues.

4.21 Formule de combinaison. — Désignons par n la contrainte normale et par t la contrainte tangentielle agissant simultanément sur le même élément de surface [1].

Sous réserve des conditions exposées ci-dessus (§ **4.0**) la *contrainte normale équivalente* est donnée par l'expression simple :

$$\boxed{n_r = \sqrt{n^2 + 4\,t^2}}.$$

4.22 Diagramme pratique. — Nous donnons, **Planche 25,** un abaque permettant d'obtenir rapidement la contrainte équivalente définie par la formule ci-dessus.

Porter en *ordonnées* la valeur de la contrainte normale n (contrainte de traction ou compression simples ou contrainte normale de flexion simple ou composée).

Porter en *abscisses* la valeur correspondante (c'est-à-dire la valeur coexistant *au même point*) de la contrainte tangentielle t : contrainte de cisaillement due à un effort tranchant ou à un moment de torsion ou à la superposition de ces deux efforts.

La verticale et l'horizontale de ces deux valeurs définissent un point P. La valeur de n_r est obtenue, d'après l'emplacement de ce point P, par rapport aux *cercles concentriques* de rayon n_r tracés sur l'abaque.

4.23 Application numérique. — Considérons l'*arbre de commande de vol* étudié *Planche* 10. Nous supposerons cet arbre réalisé par un tube étiré rond de dimensions : D=50 mm, e=2,5 mm, en acier 20 CD 4 traité à R = 85 kg/mm² (*Planche* 11).

$$S = 373 \text{ mm}^2\ ; \qquad \frac{I}{V} = 4240 \text{ mm}^3\ ; \qquad \frac{I_0}{R} = 8480 \text{ mm}^3.$$

Section C_2 (au niveau du moment fléchissant résultant M_r maximum) [2].

Efforts appliqués (au coefficient de calcul à la rupture) :

$$T_r = 213{,}8 \text{ kg} \qquad M_r = 231{,}3 \text{ mkg} \qquad M_t = 211{,}5 \text{ mkg}.$$

La figure 4 représente la situation de l'axe de flexion $v\,v'$ et de l'axe neutre neutre $u\,u'$ (obtenue par $\operatorname{tg}\alpha = \frac{T_z}{T_y} = \frac{29{,}3}{211{,}8} = 0{,}139$).

Contraintes normales de flexion :

en a et a' : $$n_{max} = \frac{M_r}{\left(\frac{I}{V}\right)} = \frac{231300}{4240} = \mp 54{,}5 \text{ kg/mm}^2$$

en b et b' : $n = 0$.

1. — Dans le cas où il existe une superposition de contraintes normales partielles *suivant le même axe*, et de contraintes tangentielles sur le même élément de section, n et t désignent les contraintes totales obtenues selon § **2.1** et **3.**

2. — Nous avons déjà signalé au chap. XI, § 2.9, que l'on pouvait, dans le cas particulier d'une section circulaire, envisager directement l'effort tranchant et le moment fléchissant résultants.

Contraintes de cisaillement dues à T_r (Voir chap. IX § 3.741) :

en a et a' : $t_1 = 0$

en b et b' : $t_{2max} = 2\,\dfrac{T_r}{S} = 2\,\dfrac{213,8}{373} = 1,14$ kg/mm².

Contraintes de cisaillement due à M_t (sur toute la section) :

$$t_2 = \frac{M_t}{\left(\frac{I_0}{R}\right)} = \frac{211500}{8480} = 25 \text{ kg/mm}^2.$$

Combinaison des contraintes aux points a et a'.
Contrainte équivalente

$$n_r = \sqrt{54,5^2 + 4 \cdot 25^2} = 73,9 \text{ kg/mm}^2.$$

Cette contrainte est à comparer avec la contrainte normale admissible :

$$n_a = R = 85 \text{ kg/mm}^2.$$

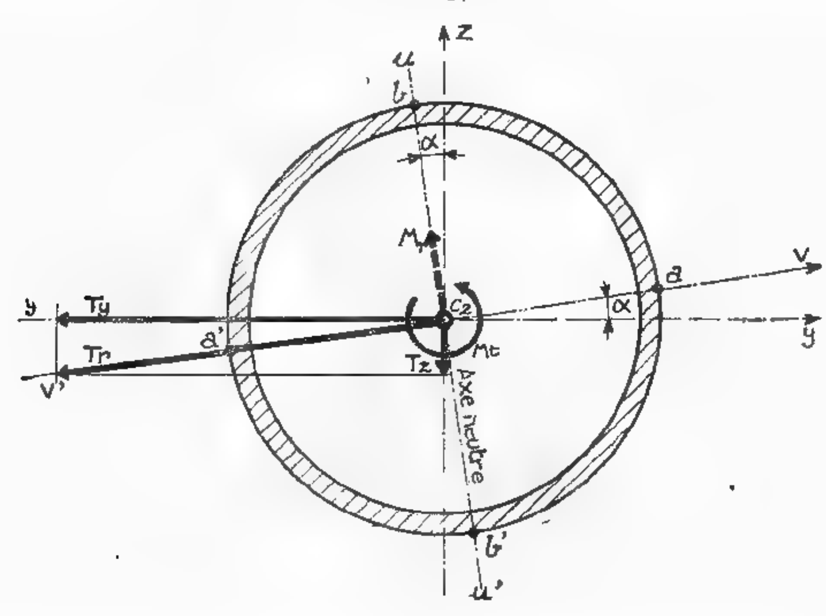


FIG. 4.

Aux points b et b', il n'existe qu'une contrainte tangentielle ayant pour valeur en b, où les effets de T et M_t s'ajoutent (voir sens des flux) :

$$t_r = 25 + 1,14 = 26,14 \text{ kg/mm}^2.$$

Cette contrainte est *équivalente* à une contrainte normale :

$$n_r = \sqrt{4\,t_r^2} = 2\,t_r = 52,28 \text{ kg/mm}^2 \text{ (voir ci-après).}$$

Marge de sécurité. — Le diagramme des efforts appliqués *Planche* 10, montre clairement que la section C_2 constitue la *section dangereuse* [1]. Le tube présente donc une *marge de sécurité à rupture* [2] égale à :

$$m = \frac{n_a - n_{r\max}}{n_{r\max}} = \frac{85 - 73,9}{73,9} = 16,1\ \%.$$

1. — Dans les cas douteux on détermine la section dangereuse en étudiant plusieurs sections.

2. — On désigne par marge de sécurité le rapport

$$m = \frac{\text{charge tenue} - \text{charge à tenir}}{\text{charge à tenir}}.$$

Elle s'évalue à la limite élastique ou à la rupture et s'exprime généralement en « pour cent ».

4.24 Remarques.

4.241 *Contrainte admissible au cisaillement pur.* — Ainsi que l'application ci-dessus vient de le faire entrevoir (contrainte en b), la formule de combinaison du paragraphe **4.21** permet de faire apparaître la contrainte admissible au cisaillement pur. En effet, en faisant $n = 0$, il reste une *contrainte tangentielle pure t* dans la section considérée, et cette contrainte est *équivalente à une contrainte normale*

$$n_r = \sqrt{0+4\ t^2} = 2\ t$$

qui doit être au plus égale à n_a.

On en déduit que *la contrainte tangentielle admissible est égale, dans les conditions exposées au paragraphe* **4.0**, *à la moitié de la contrainte admissible en traction et compression pures :*

$$\boxed{t_a = 0{,}5\ n_a.}$$

C'est la règle que nous avions adoptée, dès le début de l'étude du cisaillement (chap. VIII, § **5.**) pour tout ce qui concerne le cisaillement (ou glissement) proprement dit (glissement de flexion ou cisaillement de torsion, chap. XIII § **2.4**), à l'exclusion du phénomène appelé *cisaillage*.

4.242 *Cas des matériaux non ductiles.* — Pour certains matériaux, notamment pour les matériaux fragiles, les contraintes admissibles en traction et compression pures sont nettement différentes.

Si l'on désigne alors par k le rapport (en valeur absolue)

$$k = \frac{n_{te}}{n_{ce}} = \frac{\text{contrainte admissible en traction}}{\text{contrainte admissible en compression}} \text{ à la limite élastique,}$$

la formule de combinaison du paragraphe **4.21** devient

$$n_r = \frac{1-k}{2}\ n + \frac{1+k}{2}\sqrt{n^2+4\ t^2}.$$

On voit que si $k = 1$ (ce que nous avons admis), on retrouve la formule du paragraphe **4.21**.

4.243 *Formule de combinaison de Saint-Venant.* — La théorie de combinaison des contraintes de Saint-Venant, que nous avons mentionnée ci-dessus au paragraphe **4.0** permet d'aboutir à la formule suivante :

$$n_r = \frac{3}{8}\ n + \frac{5}{8}\sqrt{n^2+4\ t^2}.$$

On en déduit pour $n = 0$ (cisaillement pur)

$$n_r = \frac{5}{8}\sqrt{4\ t^2} = \frac{5}{4}\ t$$

d'où
$$t_a = \frac{4}{5}\ n_a = 0{,}8\ n_a.$$

Cette relation est en contradiction avec la théorie de la courbe intrinsèque [1] et avec les résultats expérimentaux récents concernant les métaux ductiles.

---

1. — Elle ne tombe en accord apparent avec la théorie de la courbe intrinsèque que pour un matériau présentant un rapport $k = 0{,}25$ (§ 4.242), c'est-à-dire possédant une contrainte admissible en compression pure quatre fois supérieure à celle de traction pure.

Insistons sur le fait que cette théorie est celle encore adoptée dans la plupart des formulaires ou traités de résistance des matériaux.

Elle conduit à des valeurs de n_r plus faibles que celles obtenues par la théorie de la courbe intrinsèque pour les métaux ductiles.

4.3 COMBINAISON DE DEUX CONTRAINTES NORMALES, PERPENDICULAIRES ENTRE ELLES, AVEC UNE CONTRAINTE TANGENTIELLE.

4.31 Notations. — Désignons, comme au paragraphe **2.2**, par n_x et n_y les contraintes normales agissant suivant deux directions perpendiculaires xx' et yy' et par t la contrainte de cisaillement qui agit parallèlement à ces deux axes (par suite de sa réciprocité).

Affectons, au surplus, de signes les contraintes normales n_x et n_y en adoptant, par exemple, notre convention habituelle : + pour les compressions et — pour les tractions (il n'y a pas lieu d'affecter t d'un signe).

La figure 5 schématise les différents « *états de contraintes* » possibles sur un élément plan. (Nous avons conservé un sens arbitraire pour t sur toutes les figures, ce sens n'ayant pas d'influence sur le résultat final.)

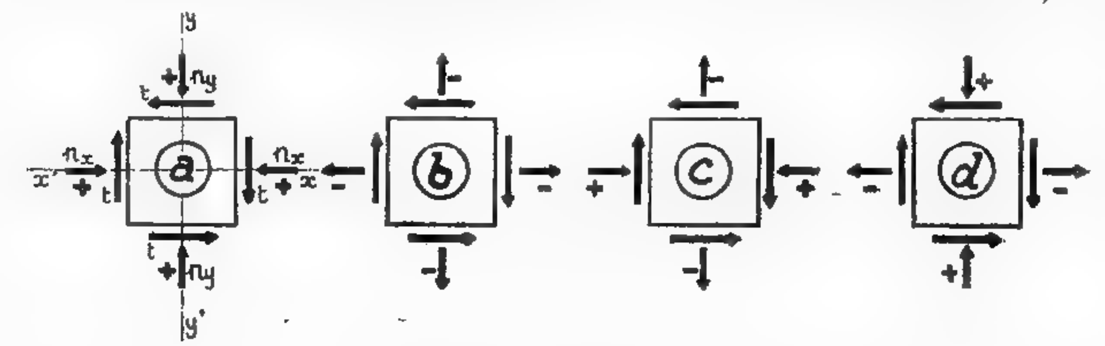


FIG. 5.

4.32 Formules de combinaison. — Il y a lieu d'examiner deux cas, selon que le produit des contraintes normales (affectées de signes ci-dessus) est (algébriquement) inférieur ou supérieur au carré de la contrainte tangentielle [1].

4.321 *Premier cas*

$$n_x \cdot n_y \leqslant t^2.$$

(Ce cas se produit quand n_x et n_y sont de signes contraires ou quand t est très élevé, vis-à-vis de n_x et n_y de même signe.)

La *contrainte équivalente* est donnée par

$$\boxed{n_r = \sqrt{(n_x - n_y)^2 + 4\,t^2}.}$$

On peut alors se servir de l'*abaque de la Planche* 25 en portant en ordonnées la *différence algébrique* $(n_x - n_y)$ à la place de n (sans tenir compte de son signe).

4.322 *Deuxième cas*

$$n_x \cdot n_y > t^2.$$

(Les contraintes n_x et n_y sont donc, obligatoirement, de même signe : toutes deux positives ou négatives : états *a* ou *b* de la figure 5.) La *contrainte équivalente* est donnée par la formule

$$\boxed{n''_r = 0{,}5\ (|n_x + n_y| + n'_r).}$$

1. — Ces deux cas sont reliés aux signes relatifs des contraintes normales principales mises en évidence par la théorie de l'élasticité.

Insistons sur le fait que cette théorie est celle encore adoptée dans la plupart des formulaires ou traités de résistance des matériaux.

Elle conduit à des valeurs de n_r plus faibles que celles obtenues par la théorie de la courbe intrinsèque pour les métaux ductiles.

4.3 COMBINAISON DE DEUX CONTRAINTES NORMALES, PERPENDICULAIRES ENTRE ELLES, AVEC UNE CONTRAINTE TANGENTIELLE.

4.31 Notations. — Désignons, comme au paragraphe 2.2, par n_x et n_y les contraintes normales agissant suivant deux directions perpendiculaires xx' et yy' et par t la contrainte de cisaillement qui agit parallèlement à ces deux axes (par suite de sa réciprocité).

Affectons, au surplus, de signes les contraintes normales n_x et n_y en adoptant, par exemple, notre convention habituelle : + pour les compressions et — pour les tractions (il n'y a pas lieu d'affecter t d'un signe).

La figure 5 schématise les différents « *états de contraintes* » possibles sur un élément plan. (Nous avons conservé un sens arbitraire pour t sur toutes les figures, ce sens n'ayant pas d'influence sur le résultat final.)

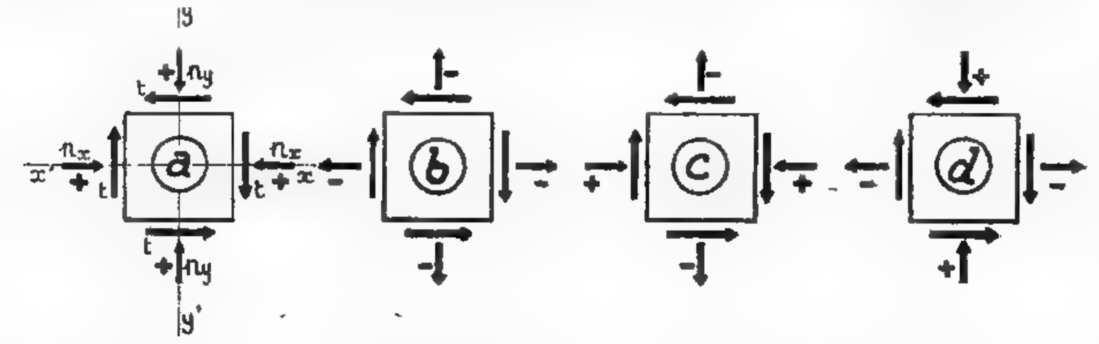


Fig. 5.

4.32 Formules de combinaison. — Il y a lieu d'examiner deux cas, selon que le produit des contraintes normales (affectées de signes ci-dessus) est (algébriquement) inférieur ou supérieur au carré de la contrainte tangentielle [1].

4.321 *Premier cas*

$$n_x \cdot n_y \leqslant t^2.$$

(Ce cas se produit quand n_x et n_y sont de signes contraires ou quand t est très élevé, vis-à-vis de n_x et n_y de même signe.)

La *contrainte équivalente* est donnée par

$$\boxed{n_r = \sqrt{(n_x - n_y)^2 + 4\,t^2}.}$$

On peut alors se servir de l'*abaque de la Planche* 25 en portant en ordonnées la *différence algébrique* $(n_x - n_y)$ à la place de n (sans tenir compte de son signe).

4.322 *Deuxième cas*

$$n_x \cdot n_y > t^2.$$

(Les contraintes n_x et n_y sont donc, obligatoirement, de même signe : toutes deux positives ou négatives : états *a* ou *b* de la figure 5.) La *contrainte équivalente* est donnée par la formule

$$\boxed{n''_r = 0{,}5\ (|n_x + n_y| + n'_r).}$$

1. — Ces deux cas sont reliés aux signes relatifs des contraintes normales principales mises en évidence par la théorie de l'élasticité.

Dans cette formule :

n'_r représente la *contrainte équivalente du premier cas*, qui pourra donc se calculer à l'aide de *l'abaque de la Planche* 25.

La somme $|n_x + n_y|$ est à prendre en *valeur absolue* (sans tenir compte de son signe).

4.232 *Remarques.* — *a*) De même que celle du paragraphe **4.21**, ces formules supposent que l'on a affaire à un matériau ductile pour lequel $n_{ca} = n_{ta} = n_a$.

b) Les valeurs de n'_r et n''_r sont toujours à comparer avec la contrainte normale admissible n_a.

4.33 **Application numérique.** — Reprenons les données numériques du paragraphe **2.23** concernant le *fuselage-coque étanche d'un avion stratosphérique.*

La pression interne crée des contraintes normales de traction perpendiculaires entre elles (fig. 6) :

transversalement (suivant yy') : $n_1 = —22$ kg/mm²
longitudinalement (suivant xx') : $n_2 = —11$ kg/mm².

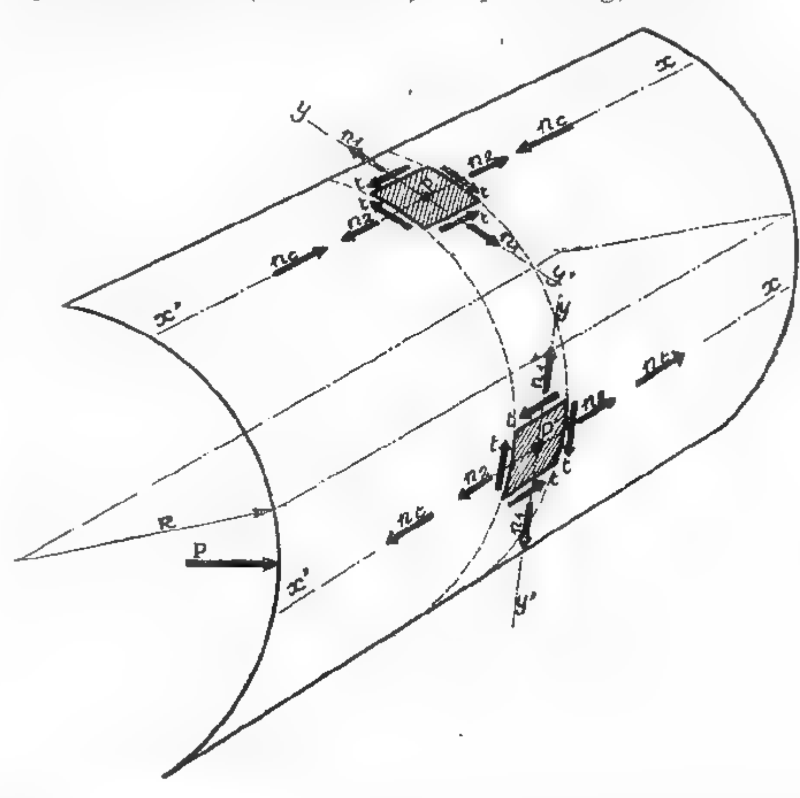


Fig. 6.

Premier cas : Superposons, en un point P, une contrainte normale longitudinale de *compression :* $n_c = 20$ kg/mm² (provenant de la flexion générale : fibres comprimées) et une contrainte de cisaillement $t = 8$ kg/mm² (provenant de l'action combinée de l'effort tranchant et de la torsion).

On a alors en ce point :

$$n_y = n_1 = —22$$
$$n_x = n_2 + n_c = —11 + 20 = +9 \text{ (compression).}$$

On est donc dans le cas

$$n_x \cdot n_y = 9\ (—22) = \ 198 < t^2 \quad (\text{avec } t^2 = +64).$$

La contrainte équivalente au point P a donc pour valeur

$$n'_r = \sqrt{(9+22)^2 + 4 \cdot 8^2} = \sqrt{1217} \ {}^{1}$$
$$n'_r = 34{,}8 \text{ kg/mm}^2 < n_a \quad (\text{avec } n_a = 36 \text{ kg/mm}^2).$$

1. — Cette opération peut s'opérer sur l'abaque *Planche* 25.

Deuxième cas : Superposons une contrainte normale longitudinale de *traction :* $n_t = -20$ kg/mm² (flexion générale, fibres tendues) et la même contrainte de cisaillement $t=8$ kg/mm² au point P′ (fig. 6) :

$$n_y = n_z = -22$$
$$n_x = n_z + n_t = -11 - 20 = -31 .$$

On est donc dans le cas :

$$n_x \cdot n_y = 22 \cdot 31 = 682 > t^2 \quad \text{(avec} \cdot t^2 = 64).$$

La contrainte équivalente au point P′ est donnée par

$$n''_r = 0{,}5\ (31 + 22 + + n'_r)$$

avec : $$n'_r = \sqrt{(-31+22)^2 + 4{,}8^2} = \sqrt{337} = 18{,}4$$

d'où : $$n''_r = 0{,}5\ (31+22+18{,}4) = 0{,}5 \cdot 71{,}4$$
$$n''_r = 35{,}7 \text{ kg/mm}^2 < n_a \text{ (avec } n_a = 36 \text{ kg/mm}^2).$$

Les contraintes aux deux points P et P′ sont donc admissibles.

4.34 Cas particulier. — Faisons $t = 0$ (contrainte tangentielle nulle) dans les formules précédentes du paragraphe 4.32, en posant *à priori*

$$n_x > n_y.\ ^{1}$$

a) Si n_x et n_y sont de *même signe* on se trouve dans le cas

$$n_x \cdot n_y > t^2 \quad \text{avec} \quad t^2 - 0.$$

c'est-à-dire dans le deuxième cas, donc

$$n''_r = 0{,}5\ (n_x + n_y + \sqrt{(n_x - n_y)^2}) = 0{,}5 \cdot 2\ n_x = n_x.$$

La contrainte équivalente est égale à la plus grande des contraintes normales principales ce que nous avions indiqué au paragraphe **2.21**.

b) Si n_x et n_y sont de *signes contraires,* on se trouve dans le cas

$$n_x \cdot n_y < t^2 \quad \text{avec} \quad t^2 = 0 \text{ (1}^{\text{er}} \text{ cas)}$$

donc

$$n'_r = \sqrt{(n_x - n_y)^2} = n_x - n_y$$

c'est-à-dire en valeur absolue (puisque n_x et n_y sont de signes contraires)

$$n'_r = |n_x + n_y|.$$

C'est ce que nous avions indiqué au paragraphe **2.22**.

---

1. — Cette convention est posée, en élasticité, quand n_x et n_y sont des contraintes principales, ce qui est notre cas.

TROISIÈME PARTIE

COMPLÉMENTS DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX GÉNÉRALE

Nous avons groupé, dans cette troisième partie, trois chapitres traitant de problèmes se rattachant encore, dans leur ensemble, à la résistance des matériaux dite « générale ».

Les démonstrations théoriques relatives à ces problèmes exigent, cependant, des connaissances mathématiques plus poussées que celles utilisées dans la majorité des sujets traités au cours des précédents chapitres.

C'est pourquoi nous avons dû, quelquefois, faire appel à des démonstrations approchées, ou, le plus souvent, nous limiter à mentionner les résultats obtenus grâce aux théories complètes.

Nous avons été conduits à développer d'une manière particulière certains problèmes relatifs aux éléments minces fréquemment utilisés en construction aéronautique : flambage local des profilés minces, calcul des plaques ou membranes.

Nous avons orienté l'étude générale des systèmes hyperstatiques vers un but d'utilisation pratique, c'est-à-dire de facilité de mise en œuvre des calculs.

CHAPITRE XVI

FLAMBAGE DES POUTRES PRISMATIQUES

0. INTRODUCTION

Au cours des précédents chapitres, nous avons toujours supposé que les charges extérieures appliquées aux éléments étudiés donnaient lieu à des états d'*équilibre interne stable*.

En d'autres termes, sous l'action d'un système de charges donné, une poutre prenait une certaine déformation d'équilibre parfaitement déterminée et dirigée dans le sens général de la sollicitation.

Les phénomènes de *flambage* que nous étudions maintenant constituent, au contraire, des *états d'instabilité*, où les sollicitations sont appliquées en *compression axiale*, mais où les déformations apparaissent, avec plus ou moins de brutalité, dans des sens tout différents de ceux de ces sollicitations. Les déformations se trouvent cependant *entretenues* et *amplifiées* par les sollicitations.

L'étude générale de tels phénomènes exige des développements mathématiques qui sortent du cadre de notre exposé. Nous nous limiterons donc à des démonstrations approchées ou simplement à une indication des résultats pratiques.

Nous verrons, au surplus, que cette étude fait appel, pour une large part, à des renseignements expérimentaux traduits quelquefois par des formules empiriques plus ou moins divergentes. Nous n'indiquerons, dans ce cas, que les règles les plus utilisées en construction aéronautique. Cette considération nous a conduit à inclure, dans ce chapitre, un phénomène particulier aux éléments minces, connu sous le nom de *flambage local* [1].

I. DIFFÉRENTS MODES DE RUPTURE DES POUTRES PRISMATIQUES RECTILIGNES CHARGÉES DE BOUT

1.1 DÉFINITION.

On dit qu'une poutre prismatique rectiligne est *chargée de bout* quand elle est soumise à l'action de deux forces égales et de sens contraires appliquées, suivant son axe, aux centres de gravité de ses sections terminales. Ce mode de sollicitation constitue donc initialement une *compression axiale* analogue à l'état de compression simple envisagé au chapitre VI.

On constate expérimentalement que la déformation et le type de rupture d'une telle poutre ainsi chargée dépendent essentiellement :

1. — Le phénomène de flambage local étudié ci-après ne résultera toujours que de sollicitations en compression axiale d'éléments *prismatiques*. Nous étudierons ci-après, au chapitre XIX, d'autres phénomènes d'instabilité particuliers aux *plaques* ou *voiles minces* sous l'action de diverses sollicitations.

a) De la longueur de la poutre, ou plus exactement d'un paramètre sans dimension appelé *élancement* qui est fonction de la longueur et que nous définirons ultérieurement ;

b) Des caractéristiques de forme des sections droites de la poutre et principalement d'un « *indice de minceur* » de ces sections.

Cette dernière considération, particulièrement importante en construction aéronautique, nous conduit dès maintenant à distinguer deux cas principaux :

1) poutres de sections massives ;
2) poutres de sections minces.

1.2 POUTRES DE SECTIONS MASSIVES (BARRES PLEINES OU PROFILES TRES EPAIS).

Comprimons *progressivement* [1] une telle poutre par une charge de bout croissante.

Les modes de déformation et de rupture varient encore selon que la poutre est *courte* ou *longue*.

1.21 Poutres courtes de sections massives. — Elles se déforment d'abord élastiquement, puis plastiquement, mais en conservant un *axe rectiligne* et sans que leurs sections droites aient tendance à tourner en torsion les unes par rapport aux autres. Ce cas constitue donc le phénomène de *compression simple* déjà étudié.

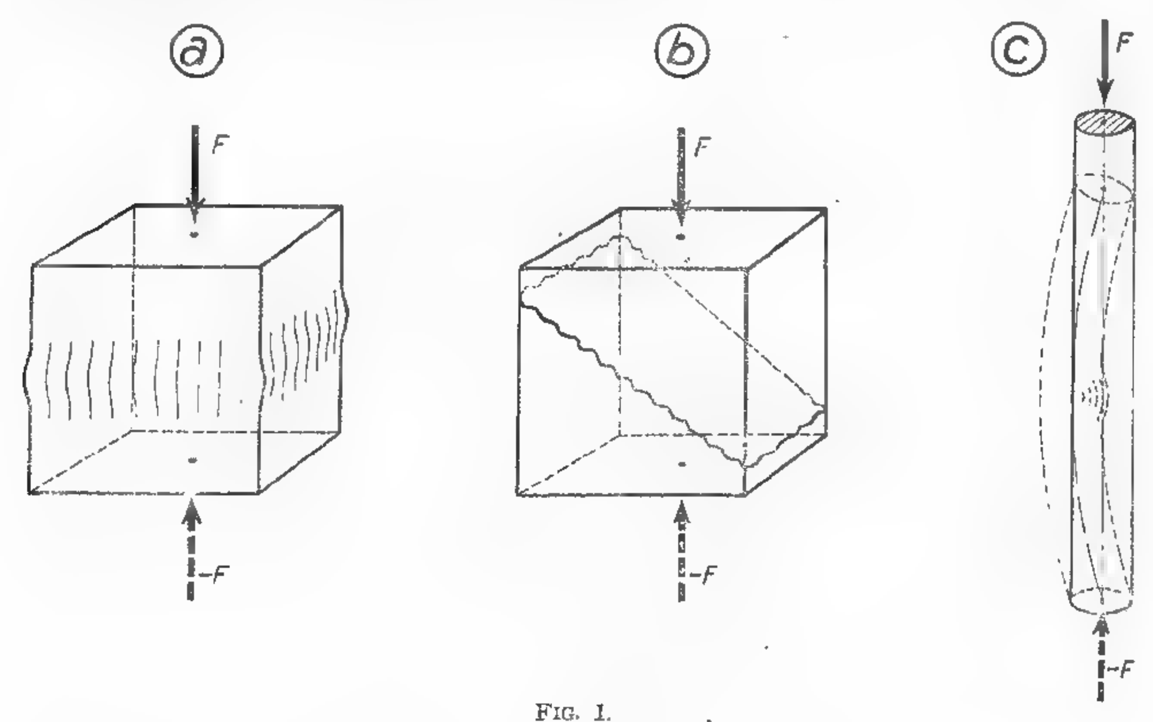


Fig. 1.

La rupture se produit, soit par *écrasement* ou « *fluage* » (écoulement plastique de la matière, voir fig. 1 *a*), soit par *cisaillement induit* suivant une direction inclinée d'un angle voisin de 45° par rapport à la direction de l'effort appliqué (mode général de rupture des éprouvettes en bois, voir fig. 1 *b*), soit enfin par *fragmentation* (ou lamellage) dans le cas des matériaux fragiles.

1. — Cette compression *progressive* est, par exemple, celle que l'on obtient à l'aide d'une machine d'essai.

C'est dans ces différents modes de rupture que l'on définit la *contrainte admissible à la rupture en compression simple* d'un matériau :

$$n_{ca} = \frac{F}{S}$$

F étant la charge de rupture et S l'aire de la section droite de la poutre.

1.22 Poutres longues de sections massives (fig. 1 *c*). — Si l'on comprime *progressivement* une telle poutre entre les plateaux d'une machine d'essai, on constate, *qu'à partir d'une certaine charge*, son axe longitudinal s'incurve, ce qui donne lieu à un mode de travail en *flexion* (ou en flexion et torsion) accompagnant la compression. Ces déformations sont d'abord *élastiques*, c'est-à-dire que la poutre se redresse si l'on supprime la charge (exemple d'un jonc flexible chargé de bout entre les mains). Puis, pour une augmentation très faible de la charge, il naît une déformation *plastique* qui se localise et la poutre périt généralement de la même façon que les pièces courtes, mais seulement dans sa partie concave [1].

Si l'on remplace cette compression progressive (liée au raccourcissement très lent d'une distance) par différentes *charges statiques*, matérialisées par exemple par des poids P d'intensité croissante (mais *indépendante des déformations*), on constate un phénomène analogue quoique infiniment plus *brutal*. A partir d'un certain poids, il se produit un état de *déséquilibre* (ou d'*instabilité*) qui entraîne immédiatement l'effondrement et la rupture de la poutre.

Ces phénomènes caractérisent, tous deux, une *instabilité générale* de la poutre connue sous le nom de *flambage général* (ou flambage d'ensemble). La charge qui donne lieu à ce phénomène de rupture se désigne par *charge critique* ou *charge de flambage*.

Elle peut être *très inférieure* à la charge admissible à la compression simple pour la même poutre, ainsi que nous le verrons ci-après.

1.3 POUTRES DE SECTIONS MINCES (PROFILÉS ÉTIRÉS MINCES, TUBES, ASSEMBLAGES EN TOLE MINCE, ETC...).

Que la poutre mince considérée soit *longue ou courte*, il peut se produire, avant le flambage général ou avant écrasement en compression simple, une *déformation localisée* de la section droite. On constate, par exemple, dans le cas d'une cornière (fig. 2 *a*) un *voilement partiel* de l'une ou des deux ailes ou, dans le cas d'un tube mince (fig. 2 *b*), un *gonflement localisé* de la section.

Ce phénomène se *distingue* de celui du flambage général en ce sens qu'il n'affecte qu'une partie de la poutre, qu'il est théoriquement indépendant de la longueur de cette poutre et qu'il ne donne pas lieu à un effondrement immédiat. Il peut, par contre, avancer considérablement la limite de flambage général ou même, s'il affecte une partie notable de la poutre, déterminer pratiquement la contrainte admissible à la rupture.

On désigne ce phénomène, qui présente une importance capitale en construction aéronautique, par *flambage local*, par opposition au flambage général défini ci-dessus.

C'est le flambage local qui conditionne, très souvent, *l'allure des sections* utilisées en construction aéronautique et qui conduit, par exemple, à utiliser des *profilés à bords tombés* (ou roulés) ou avec *boudins extrêmes de raidissement* (fig. 2 *c* et 2 *d*).

---

1. — Pour certains matériaux fragiles, la rupture peut avoir lieu en traction dans la partie convexe.

On voit que les deux phénomènes de flambage local et de flambage général, qui sont théoriquement indépendants, ne peuvent cependant, pratiquement, pas être séparés pour l'étude de la résistance aux charges de bout des éléments minces.

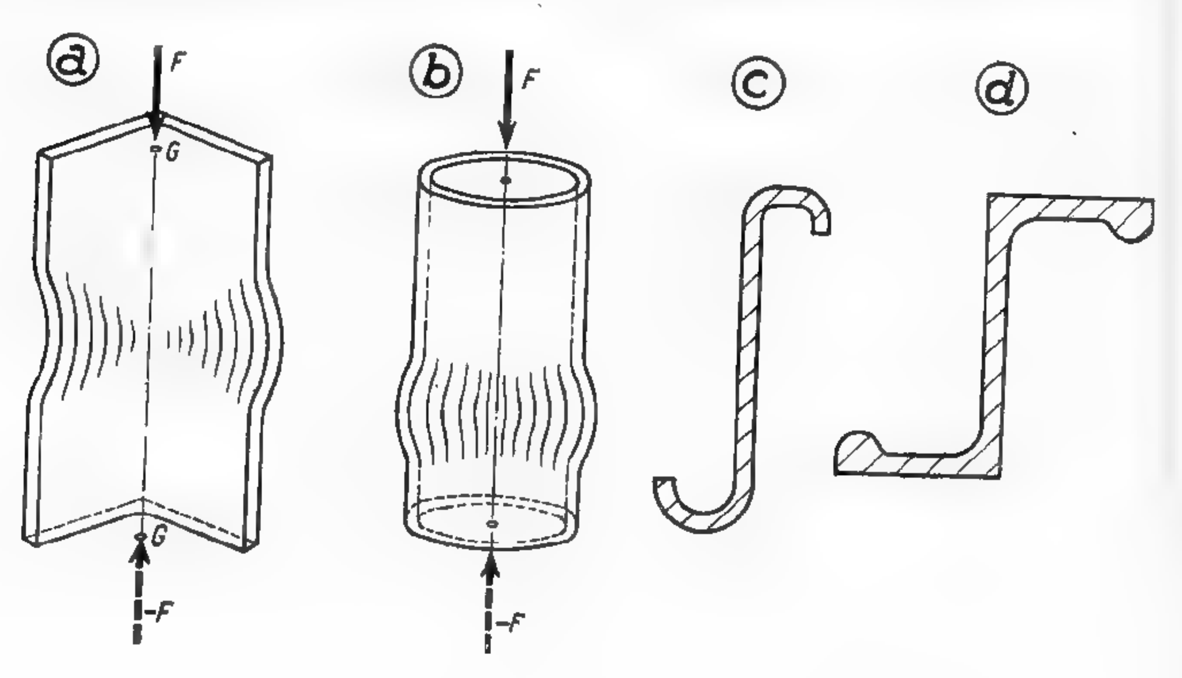


Fig. 2.

2. THÉORIE DU FLAMBAGE GÉNÉRAL DES POUTRES RECTILIGNES ET DE SECTION CONSTANTE

2.1 FORMULE D'EULER.

Considérons une poutre AB supposée parfaitement *rectiligne*, de *section constante* S, parfaitement homogène, et maintenue à ses extrémités A et B par *deux articulations pures* ne permettant qu'un déplacement suivant l'axe AB de ces extrémités (fig. 3 *a*).

Soumettons cette poutre à une charge de bout F.

Il est évident que la position rectiligne de AB constitue une *position d'équilibre*, cet équilibre donnant lieu à un état de *compression simple*, c'est-à-dire à une contrainte (voir chap. VI, § **2.**) :

$$n = \frac{F}{S}.$$

Cherchons à voir s'il ne peut exister d'autres positions d'équilibre. Supposons pour cela que, pour une raison quelconque, la poutre ait *fléchi* légèrement dans un certain plan que nous adoptons comme plan de la figure, ce phénomène d'inflexion étant aussi faible que l'on voudra.

Désignons par y la flèche en une section quelconque d'abscisse x par rapport à l'extrémité A La force F engendre, dans cette section, un *moment fléchissant* provenant du décalage y de sa ligne d'action et ayant donc pour valeur

$$M = Fy.$$

Désignons, d'autre part, par r le *rayon de courbure* de la fibre moyenne déformée, sous cet état de flexion, au niveau de la section envisagée. Nous savons que ce rayon de courbure est relié à M et aux caractéristiques de

rigidité en flexion de la section par l'expression établie au chapitre IX, paragraphe **3.3**.

$$r = \frac{EI}{M} = \frac{EI}{F} \cdot \frac{1}{y}$$

(I désignant le moment d'inertie de la section droite par rapport à l'axe autour duquel nous avons supposé qu'elle fléchissait).

La poutre étant, par hypothèse, homogène et de section constante, le produit EI est constant sur toute sa longueur. Nous voyons donc que le rayon de courbure r de la déformée est, en chaque point, inversement proportionnel à la flèche y de cette déformée.

Cette propriété caractérise une *sinusoïde*. La déformée sera donc *sinusoïdale*.

Pour simplifier le calcul, nous allons assimiler cet arc de sinusoïde à un *arc de parabole* passant également par A et B et possédant, au milieu C de la poutre, la même flèche maximum (inconnue) y_c. Nous conserverons donc le même moment fléchissant maximum (au point C)

$$M_c = M \text{ max.} = F y_c.$$

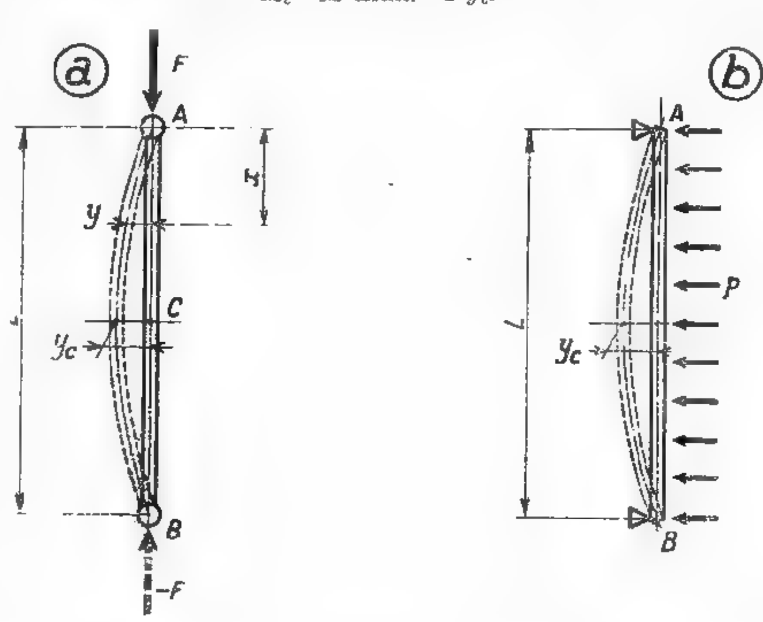


FIG. 3.

Nous savons, d'autre part, que l'on obtient une ligne moyenne déformée parabolique en soumettant à une charge répartie d'intensité constante une poutre rectiligne reposant sur deux appuis simples (voir formulaire *Planche* 17).

Supposons donc, un instant, que la déformée parabolique que nous avons adoptée pour notre poutre, soit due exclusivement à une *charge répartie transversale fictive* d'intensité arbitraire p (charge par unité de longueur, voir fig. 3 *b*) [1].

Le moment fléchissant maximum en C aura pour expression

$$M'_c = \frac{p\ L^2}{8}$$

(L désignant la distance AB c'est-à-dire la hauteur de la poutre).

Egalons les valeurs de M_c et M'_c, ce qui revient à poser (en valeurs

1. — La poutre AB est, en effet, assimilable à une poutre reposant sur deux appuis simples puisque les articulations A et B sont libres de se rapprocher.

absolues) que la *« tendance à se redresser » de la poutre équilibre l'action fléchissante fictive de p*, nous aurons

$$F\, y_c = \frac{p\, L^2}{8}$$

d'où

$$y_c = \frac{p}{8}\,\frac{L^2}{F}.$$

Nous savons, d'autre part, que cette flèche maximum, considérée comme celle de la poutre AB soumise à la charge p, a pour valeur (voir *Planche* 17)

$$y_c = \frac{5}{384}\,\frac{p\, L^4}{EI}.$$

Egalons donc ces deux expressions de y_c, il vient :

$$\frac{p}{8}\,\frac{L^2}{F} = \frac{5}{384}\,\frac{p\, L^4}{EI}$$

d'où l'on tire :

$$F = \frac{384}{5\times 8}\,\frac{EI}{L^2} = 9{,}6\,\frac{EI}{L^2}.$$

Cette valeur nous donne donc, sous réserve de l'approximation admise au sujet de la déformée, l'expression d'une *charge de bout F telle qu'il se produise un état d'équilibre en position infléchie de la poutre.* Désignons cette charge particulière par F_c :

$$F_c = 9{,}6\,\frac{EI}{L^2}.$$

Nous voyons que la charge fictive p, qui nous a servi d'artifice de calcul, s'est éliminée.

Nous voyons, d'autre part, que la valeur y_c de la flèche maximum (et donc la valeur y en un point quelconque) s'est également éliminée.

Il existe donc une infinité de positions d'équilibre de la poutre AB *en position infléchie, quand la charge de bout* F *possède cette valeur particulière* F_c.

Cette charge particulière caractérise donc un *état d'équilibre indifférent.* On la désigne par *charge critique de flambage*, ou plus simplement par *charge de flambage.*

Formule d'Euler. — Si, au lieu d'adopter une déformée approchée *parabolique*, nous avions considéré la déformée réelle *sinusoïdale*, nous aurions abouti à l'expression exacte de F_c connue sous le nom de *formule d'Euler* ou *charge d'Euler* :

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2\, EI}{L^2}}$$

(on voit que $\pi^2 = 3{,}1416^2 = 9{,}87$ est peu différent du coefficient 9,6 que nous avons obtenu avec l'approximation ci-dessus).

2.2 PROPRIETES GENERALES DU FLAMBAGE D'ENSEMBLE.

2.21 Caractéristiques générales du phénomène. — Nous venons de démontrer que la *charge d'Euler* F_c coïncidait avec un *état d'équilibre indifférent* de la poutre en position droite ou en position quelconque fléchie élastiquement.

Il est facile de voir que :

a) Si $F < F_c$ la poutre tend à reprendre *élastiquement* sa position d'équi-

libre initial rectiligne qui constitue donc une *position d'équilibre stable unique* (compression simple) ;

b) Si $F > F_c$ la poutre ne possède plus qu'une seule position d'équilibre éminemment *instable* qui est la position rectiligne. Toute impulsion transversale infiniment petite sera suffisante pour provoquer l'*effondrement immédiat* de la poutre et donc sa *rupture* (phénomène d'instabilité).

Le phénomène de *flambage général* ainsi établi constitue donc, en théorie, un phénomène d'instabilité *infiniment brutal* et donc très dangereux.

En réalité, les poutres n'étant jamais parfaitement rectilignes ou homogènes et les charges appliquées n'étant jamais parfaitement centrées, le fléchissement de la poutre peut s'amorcer pour des charges inférieures à la charge d'*Euler* qui constitue alors une *limite supérieure* jamais atteinte.

Remarque. — Quand la charge F est appliquée à l'aide d'une *machine d'essais en compression* (qui produit un raccourcissement de la distance AB), on obtient un diagramme charge-course de la machine ayant l'allure générale de celui représenté figure 4 *a* (tout au moins pour des poutres présentant une déformabilité en flexion suffisante avant rupture). La partie OM correspond à une zone de raccourcissements élastiques en compression simple. Le fléchissement de la poutre apparaît à partir d'un certain point M, ce qui précipite l'allure des déformations en fonction de la charge, puis à partir d'un certain point P la charge décroît tandis que les déformations augmentent. Ce phénomène signifie simplement que, par suite du fléchissement de la poutre sous l'action de la charge maximum enregistrée, la distance AB diminuerait plus vite que ne le permet la vitesse de la machine. Cette charge maximum en P constitue donc ici la charge de flambage de la poutre essayée qui est *supérieure* à celle enregistrée en fin d'essai, c'est-à-dire à la rupture (point R).

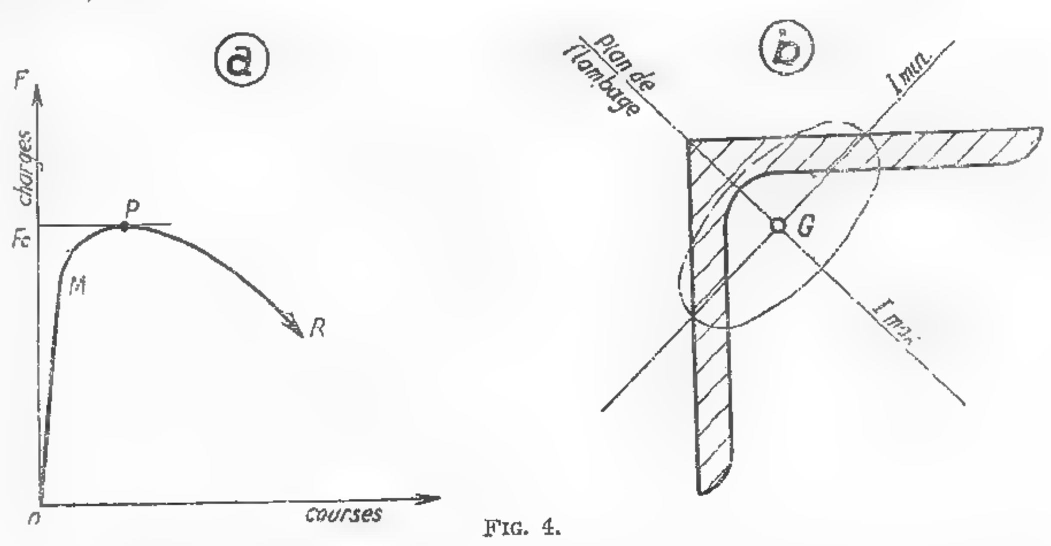


Fig. 4.

2.22 **Direction du flambage.** — La flexion, qui est cause du phénomène de flambage général, se produira, évidemment, *dans le sens où la poutre possède le moins de rigidité*. Cette rigidité de flexion étant mesurée par le moment d'inertie de la section, la flexion apparaîtra donc dans le plan de flexion correspondant au *moment d'inertie minimum* de la section. Comme ce I min. correspond à un axe principal d'inertie, *le plan de fléchissement sera normal à l'axe principal d'inertie minimum* (c'est-à-dire dirigé suivant le petit axe de l'ellipse d'inertie des sections droites).

Dans la formule d'Euler, ainsi que dans toutes les expressions sui-

vantes, I désignera toujours le *moment d'inertie minimum* des sections droites des poutres envisagées :

$$I = I \text{ min.}$$

Par exemple, pour une cornière à ailes égales rectangulaires, I min. correspond à un axe incliné à 45° sur les ailes (grand axe de l'ellipse d'inertie, fig. 4 *b*). Voir également à ce sujet les différents exemples de profilés donnés *Planche* 20.

2.23 Remarques. — Il est essentiel de bien se rappeler que l'expression de la charge d'Euler F_c, donnée ci-dessus, correspond au cas d'une poutre de *section constante* dont les *extrémités* A et B sont *articulées*.

Nous verrons ci-après, au paragraphe **2.4**, les modifications apportées à cette formule quand les extrémités sont assujetties à d'autres modes de fixations.

Nous verrons ensuite, au paragraphe **2.5**, les *réserves d'utilisation* très importantes qu'il y a lieu d'appliquer à la formule d'Euler.

2.3 CONTRAINTE CRITIQUE DE FLAMBAGE GÉNÉRAL. ÉLANCEMENT.

Faisons apparaître, dans la formule d'Euler, la *contrainte de compression simple* qui donne lieu au phénomène d'instabilité générale. Elle s'obtient directement en divisant l'expression de la charge critique F_c par la surface S des sections droites de la poutre, soit

$$\frac{F_c}{S} = \frac{\pi^2}{L^2}\frac{E\,I}{S}$$

ce que nous pouvons écrire sous la forme

$$\frac{F_c}{S} = \frac{\pi^2 E}{\dfrac{L^2}{\dfrac{I}{S}}}.$$

Or, le rapport $\frac{I}{S}$ représente le carré du *rayon de giration* ρ de la section droite relativement à l'axe servant au calcul de I puisque (chap. II, § **8.14**)

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{S}}.$$

Nous avons donc, puisque I représente le moment d'inertie minimum (convention ci-dessus)

$$\frac{I}{S} = \rho^2$$

ρ représentant le *rayon de giration minimum* de la section droite.

L'expression ci-dessus s'écrit

$$\frac{F_c}{S} = \frac{\pi^2 E}{\dfrac{L^2}{\rho^2}} = \frac{\pi^2 E}{\left(\dfrac{L}{\rho}\right)^2}.$$

Nous avons ainsi fait apparaître au dénominateur un *coefficient sans dimension* (rapport des deux longueurs L et ρ) qui, pour une poutre de matériau donné (E donné), devient le seul paramètre qui entre en jeu pour le calcul de la contrainte critique donnant lieu au flambage. Ce coefficient.

caractérisant donc la *tendance au flambage général*, s'appelle *l'élancement* de la poutre considérée. On le représente, généralement, par la lettre λ

$$\boxed{\lambda = \frac{L}{\rho}}.$$

La formule donnant la *contrainte critique* devient, avec cette notation

$$\frac{F_c}{S} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

Nous conviendrons d'utiliser, pour désigner cette *contrainte critique*, le symbole $n_{c\lambda}$ (contrainte critique sous l'élancement λ) [1].

Nous avons donc

$$\boxed{n_{c\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}}$$

autre expression très intéressante de la formule d'Euler (voir ci-après § 2.6).

2.4 INFLUENCE DES CONDITIONS D'APPUI. LONGUEUR LIBRE AU FLAMBAGE.

2.40 Notations. — Pour établir la formule d'Euler, nous nous sommes placés dans le cas particulier d'une poutre parfaitement *articulée* à ses deux extrémités A et B distantes de la longueur L.

Dans les autres modes de fixation des extrémités, nous conviendrons de désigner par L′ la *longueur réelle* de la poutre étudiée.

Nous ferons apparaître, dans chacun des cas, la distance L devant exister entre deux *points d'articulation fictifs* pour reproduire la même charge critique de flambage.

Nous désignerons cette distance L par la « *longueur équivalente* » ou « *longueur libre au flambage* » de la poutre étudiée. La comparaison de L avec L′ s'exprimera par la *relation générale*

$$L = \alpha L'$$

où le coefficient sans dimension

$$\alpha = \frac{L}{L'}$$

est appelé « *coefficient d'encastrement* » ou « *coefficient de fixité* » propre à chaque cas particulier étudié.

La *charge critique d'* Euler sera donc toujours donnée par son expression primitive

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{équivalente à} \quad F_c = \frac{\pi^2 EI}{\alpha^2 L'^2}.$$

Nous définirons, de même, un *élancement équivalent* (ou *élancement effectif*)

$$\lambda = \frac{L}{\rho} = \frac{\alpha L'}{\rho} = \alpha\lambda'$$

en désignant par λ' l'*élancement apparent* (ou *élancement géométrique*) de la poutre étudiée.

1. — Nous utilisons cette notation à double indice afin de marquer directement, dans les formules, une différence avec celles du flambage local étudié ci-après.

L'expression de la *contrainte critique* $n_{c\lambda}$ conservera donc, également, sa forme primitive :

$$n_{c\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \qquad \text{équivalente à} \qquad n_{c\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\alpha^2 \lambda'^2}.$$

Les expressions établies ci-dessus deviennent donc *générales*, par suite des notations adoptées. Nous étudions, ci-après, quelques *cas particuliers* de fixation des extrémités.

2.41 Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre. — La déformation de flambage s'établit alors selon l'allure A'B représentée sur la figure 5 *a*. Prenons le symétrique A" de A par rapport à l'encastrement B. Nous obtenons ainsi l'allure A'BA" de la déformée d'une poutre articulée de *longueur équivalente :*

$$L = 2\,L'.$$

Nous obtenons donc $\alpha = 2$

d'où $$\lambda = \frac{2\,L'}{\rho} \qquad \text{et} \qquad F_c = \frac{\pi^2\,EI}{4\,L'^2}.$$

La charge critique de flambage est donc quatre fois plus faible que celle de la même poutre articulée à ses deux extrémités.

C'est le cas le plus défavorable de fixation des extrémités.

2.42 Poutre encastrée à ses deux extrémités. — Il y a lieu ici de considérer deux cas, selon que les encastrements sont, ou non, assujettis à rester fixes l'un par rapport à l'autre, dans le sens transversal.

2.421 *Encastrements fixés transversalement* (fig. 5 *b*). — Les tangentes en A et B à la déformée sont alors obligatoirement dirigées suivant la droite AB elle-même. L'allure de la déformation s'établit suivant celle représentée sur la figure 5 *b* [1]. Il se produit deux *points d'inflexion* en *a* et *b*. Ces points sont donc assimilables à deux *articulations fictives* [2]. Il est aisé de voir que, par suite de la symétrie, ces points *a* et *b* partagent chacune des demi-poutres AC et BC en deux parties égales et donc que

$$L = a\,b = \frac{L'}{2}$$

et par suite $$\alpha = \frac{1}{2}\,; \qquad \lambda = \frac{L'}{2\,\rho}\,; \qquad F_c = \frac{4\,\pi^2\,EI}{L'^2}.$$

La charge critique de flambage est donc quatre fois plus grande que celle de la même poutre articulée à ses deux extrémités. C'est le cas le plus favorable de fixation des extrémités.

2.422 *Encastrements non fixés transversalement* (fig. 5 *c*). — Les tangentes en A et B ne sont plus assujetties qu'à rester parallèles à AB (et non confondues avec AB).

La déformation s'établira selon la demi-sinusoïde de la figure 5 *c* possédant un point d'inflexion au milieu C de AB.

La poutre est donc assimilable à deux tronçons AC et BC encastrés à

1. — Cette allure correspond à celle donnant lieu au « minimum d'énergie interne », et donc à celle qui se produira par priorité. On pourrait, en effet, envisager d'autres allures sinusoïdales tangentes en A et en B à AB.

2. — En effet, un point d'inflexion correspond à un rayon de courbure $r = \infty$ qui entraîne immédiatement $M = 0$ (comme à une articulation) d'après la relation fondamentale : $r = \dfrac{EI}{M}$.

une extrémité et libres à l'autre et sa longueur équivalente est égale à celle de l'un de ces tronçons de longueur $\frac{L'}{2}$ c'est-à-dire d'après le paragraphe 2.41.

$$L = 2\,\frac{L'}{2} = L'.$$

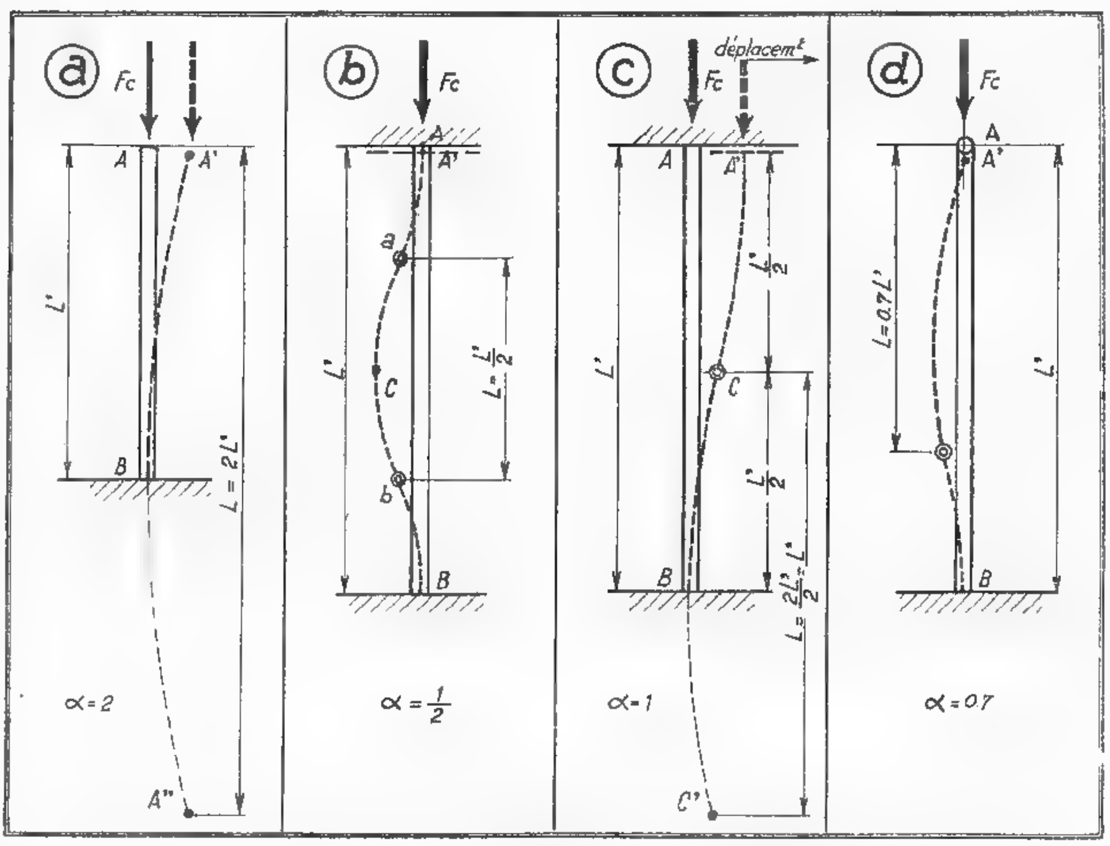


Fig. 5.

On retrouve ainsi un coefficient α égal à 1 et, *bien qu'étant bi-encastrée, la poutre possède donc la même charge critique de flambage qu'une poutre articulée de même longueur.*

Remarque. — Ce résultat conduit à remarquer qu'il y a toujours lieu de bien examiner les conditions de rigidité transversale des encastrements extrêmes d'une poutre avant de lui appliquer le coefficient $\alpha = 1/2$ (voir ci-après).

2.43 **Poutre encastrée à une extrémité et articulée à l'autre.** — Ici encore, il y a lieu d'examiner si l'articulation A et l'encastrement B peuvent, ou non, se déplacer transversalement l'un par rapport à l'autre.

2.431 *Articulation et encastrement non fixés transversalement.* — On retombe alors, immédiatement, dans le cas de la figure 5 *a* (car l'articulation A devient une extrémité libre) et donc

$$\alpha = 2\,; \qquad \lambda = \frac{2\ L'}{\rho}\,; \qquad F_c = \frac{\pi^2\,EI}{4\ L^2}.$$

2.432 *Articulation et encastrement fixés transversalement.* — L'arti-

culation A ne peut alors se déplacer que suivant AB (fig. 5 *d*). On démontre que, dans ce cas, le coefficient d'encastrement a pour valeur

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2,05}} = 0,698 \qquad \text{d'où} \qquad L = 0,698\ L' \approx 0,7\ L'.$$

On a donc $\lambda = 0,698 \dfrac{L'}{\rho}$ et $F = \dfrac{2,05\ \pi^2\ EI}{L'^2}$.

La charge critique de flambage est environ deux fois plus grande que celle de la même poutre articulée à ses deux extrémités. Ce cas constitue donc un intermédiaire entre celui de deux articulations pures et celui de deux encastrements parfaits infiniment rigides l'un par rapport à l'autre, dans le sens transversal.

2.44 Poutre sur trois appuis. — Désignons par L'_1 et L'_2 les distances entre appuis (fig. 6) en posant

$$L'_1 > L'_2, \quad \text{et} \quad k = \frac{L'_1}{L'_2} \quad (k < 1).$$

La déformée possède un point d'inflexion *a* situé dans la grande travée et la distance de ce point à l'appui extrême adjacent définit la *longueur équivalente* L.

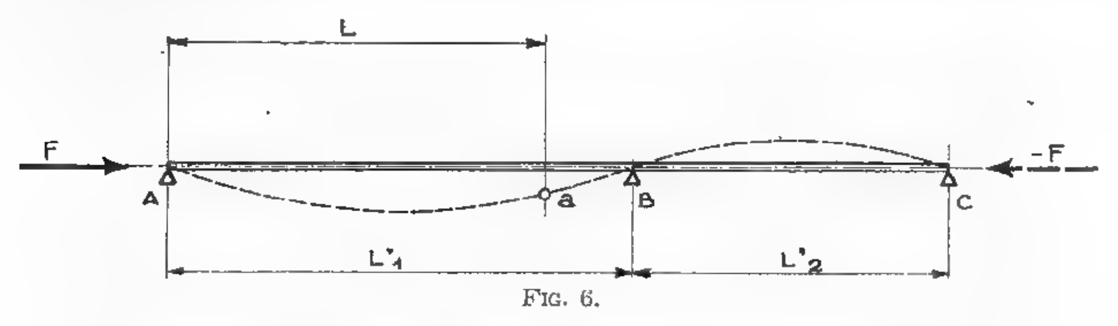


FIG. 6.

On démontre que cette longueur a très sensiblement pour valeur

$$L = \frac{L'_1}{\sqrt{2-k}}$$

soit : un *coefficient d'encastrement* α *affectant la longueur* L'_1 *de la plus grande travée*

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{2-k}}}$$

et une *charge critique* de flambage

$$F_c = \frac{\pi^2\ EI}{L^2} = (2-k)\frac{\pi^2\ EI}{L'^2_1}.$$

Remarques. — *a*) Envisageons le cas limite théorique où $L'_2 = 0$. Nous retrouvons ainsi une *poutre articulée en* A *et encastrée en* B [1].

Or, nous avons $k = 0$ d'où $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ au lieu de la valeur exacte $\alpha = 0,698$ (§ **2.432**). Cet écart qui vaut ici 1,3 % représente l'*erreur relative maximum* sur α commise en utilisant l'expression approchée ci-dessus.

---

1. — On obtient, en effet, en B, deux appuis infiniment voisins qui imposent une *direction fixe* à la tangente à la déformée, au même titre qu'un encastrement.

b) Dans l'autre cas limite (pratique) : $L'_2=L'_1$ soit $k=1$, on retrouve $\alpha=1$, c'est-à-dire le cas d'une *poutre articulée* en A et B, ce qui s'explique physiquement en remarquant que le point d'inflexion doit être en B par raison de symétrie.

c) On voit donc que *la petite travée* BC *soulage la grande travée* AB avec une influence variant de celle d'un encastrement ($L'_2=0$) à celle d'une articulation. ($L'_2=L'_1$) à l'appui B.

d) Les raisonnements ci-dessus supposent que le flambage se produit dans le plan de la figure, c'est-à-dire *dans le sens de rigidité des appuis*. Il y a lieu de considérer s'il ne peut, en réalité, exister plutôt dans le sens transversal. Voir ci-après paragraphe 2.46.

2.45 Coefficients d'encastrements pratiques. — L'annexe à la Norme Air 2004 B qui fixait, en France, les conditions de calcul des avions [1] préconisait d'adopter, *pour les éléments les mieux encastrés* utilisés en construction aéronautique, une *valeur minimum* du coefficient α telle que

$$\alpha^2=\frac{1}{2,5}=0,4 \qquad \text{soit} \qquad \alpha=0,633.$$

Cette élévation forfaitaire du minimum théorique $\alpha=0,5$ correspond donc à une réduction de la charge critique maximum correspondante dans le rapport

$$\frac{2,5}{4}=0,625.$$

Cette réglementation résulte du fait qu'aucun encastrement ne peut pratiquement être considéré comme étant parfait dans le type de construction légère utilisé pour les avions. Elle provient également de considérations de sécurité tenant compte des imperfections pratiques de réalisation des éléments, notamment de leurs *flèches initiales*.

Signalons également que, dans le cas des *tubes soudés* (barres de bâtis-moteurs par exemple), la Norme conseillait, d'après essais, d'adopter

$$\alpha^2=\frac{1}{1,5}=0,666 \qquad \text{soit} \qquad \alpha=0,815.$$

2.46 Remarque importante. — Il arrive fréquemment, dans certaines structures, qu'une même barre possède deux longueurs de flambage diffé-

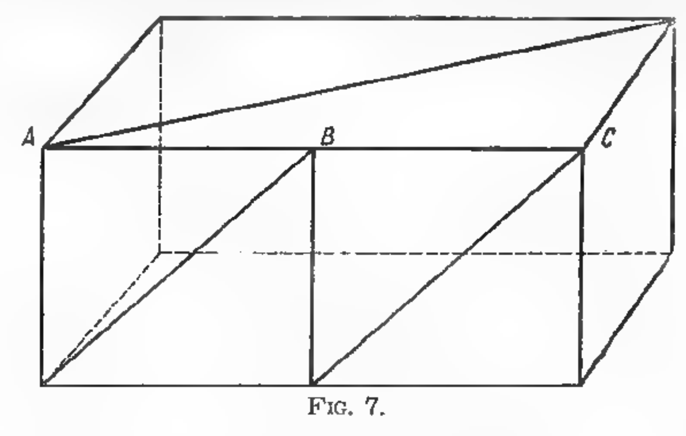


Fig. 7.

rentes selon qu'on la considère comme appartenant à une face ou à une autre, adjacente, de cette structure.

1. — Ces conditions de calcul sont actuellement régies par la Norme Air 2004C. Cette nouvelle réglementation n'impose pas de nouvelles valeurs au sujet des coefficients d'encastrement. Il paraît sage de continuer à utiliser ceux de la N. 2004B qui bénéficient de l'expérience acquise.

Dans le système triangulé représenté figure 7, par exemple, le nœud B ne fournit un appui efficace à la barre AC que dans le plan vertical. Si cette barre a mêmes caractéristiques verticalement et horizontalement (tube rond, par exemple), on devra donc la calculer au flambage avec une longueur $L' = AC$ supérieure à la longueur équivalente qui existe dans le plan vertical (§ **2.44**). On réalise quelquefois, dans ce cas, un *renfort de flambage* dans le plan horizontal, en augmentant l'inertie de la barre, en flexion, dans ce plan, au voisinage du nœud B.

Il est à remarquer à ce sujet qu'il suffit théoriquement d'un appui infiniment faible pour interdire le flambage (réaction nulle). Pratiquement, un tel « *appui de flambage* » peut se dimensionner en se donnant, *a priori*, une certaine flèche de la poutre au niveau de cet appui supposé inexistant et en déterminant la force de réaction nécessaire en ce point pour redresser la poutre.

2.5 DISCUSSION DE LA FORMULE D'EULER.

2.51 Représentation graphique. — Reprenons l'expression de la *contrainte critique* de compression simple donnant lieu à l'apparition du phénomène de flambage général :

$$n_{c\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Portons, sur deux axes de coordonnées, en abscisses les élancements λ et en ordonnées les contraintes $n_{c\lambda}$. Nous obtenons une courbe d'allure *hyperbolique* (fig. 8 *a*), asymptote aux deux axes de coordonnées. Cette courbe est souvent appelée « *courbe d'Euler* ».

Si l'élancement tend vers l'infini (c'est-à-dire si la longueur de la poutre augmente indéfiniment, ou si son inertie devient très faible) la contrainte critique tend vers zéro. Cette conclusion est conforme au bon sens (fil sans raideur par exemple).

Si l'élancement tend vers zéro (c'est-à-dire si la poutre devient infiniment courte ou d'inertie énorme) sa contrainte critique devient infinie. Il ne se produit plus alors aucun flambage, mais la valeur de $n_{c\lambda}$ ne représente plus la contrainte admissible qui ne saurait, en aucun cas, dépasser celle de compression simple.

2.52 Limites d'utilisation. — Nous avons vu, en établissant la formule d'Euler, qu'elle traduisait un *état d'équilibre élastique :* équilibre entre l'action fléchissante de F_c et la tendance de la poutre à se redresser élastiquement. *Nous en concluons donc que la formule d'*Euler *n'est, au maximum, valable que pendant la période élastique des matériaux auxquels elle s'applique.*

Il est donc nécessaire que l'on ait au moins

$$n_{c\lambda} < n_e$$

avec n_e = contrainte de limite élastique.

Mais nous avons, au surplus, admis implicitement, en établissant la formule d'Euler, que *les contraintes étaient proportionnelles aux allongements*, puisque nous avons utilisé une formule de flexion établie d'après la loi de Hooke. Or, en pratique, *il y a lieu, pour l'étude des phénomènes de flambage, de distinguer* (contrairement à ce que l'on fait en résistance des matériaux courante) *la limite de proportionnalité réelle, de la limite élastique* (conventionnelle) *des matériaux.*

Un diagramme expérimental « contraintes-déformations » s'établit, en

effet (d'une façon plus précise que celle que nous avions indiquée au chapitre V, paragraphe **4.1**) selon l'allure représentée figure 8 *b*.

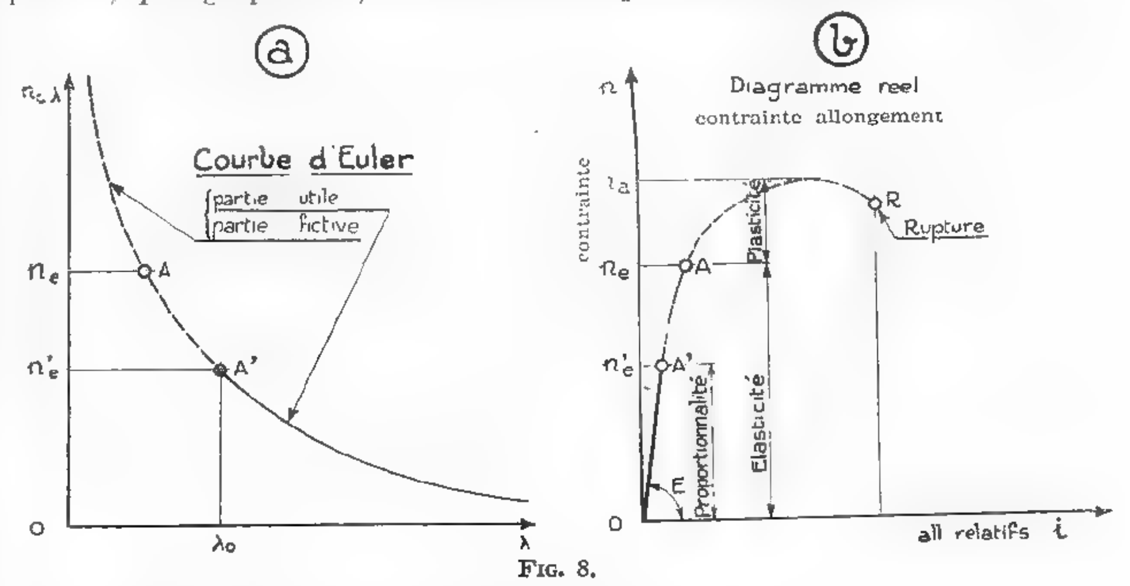


FIG. 8.

La *période élastique* OA, limitée supérieurement par la contrainte conventionnelle n_e [1], comprend, en réalité, une certaine période OA′ où la proportionnalité entre i et n est rigoureuse et une période A′A où cette proportionnalité cesse d'être rigoureuse [2]. Le diagramme se termine par la *période plastique* AR.

Ces résultats sont constatés aussi bien en compression qu'en traction pour les métaux courants.

Nous désignerons par n'_e la *contrainte correspondant à cette limite de proportionnalité en compression simple.* Nous devrons donc avoir finalement

$$n_{c\lambda} < n'_e.$$

Portons la valeur de n'_e sur le diagramme, figure 8 *a*. Elle situe un point A′ sur la courbe d'EULER qui délimite supérieurement la *partie utile* et inférieurement la *partie fictive* de cette courbe et donc de la formule d'EULER.

Ce point A′ possède une abscisse λ_0 telle que

$$n_{c\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_0^2} = n'_e$$

soit

$$\boxed{\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{n'_e}}}\ .$$

*Cette valeur définit un élancement limite au-dessous duquel la formule d'*EULER *cesse d'être applicable.*

La formule d'EULER ne concerne donc que des poutres d'élancement $\lambda > \lambda_0$, appelées communément *poutres longues*, ce qui justifie le titre général donné à ce paragraphe.

Exemples : Pour le *duralumin* AU4G, la limite de proportionnalité à l'état normal (non écroui) est de l'ordre de 22 kg/mm².

1. — Voir chapitre V, § 5.15 (notation correspondante : L_E sur les tableaux Planches 11 et 12).

2. — L'importance relative de ces deux périodes varie beaucoup avec l'état d'*écrouissage* des matériaux, comme nous le verrons ci-après.

Nous aurons donc

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{7000}{22}} = 56.$$

Pour un *acier doux* donnant n'_e de l'ordre de 20 kg/mm² nous obtiendrons :

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{20000}{20}} \approx 100.$$

Ces limites correspondent, en moyenne, à celles constatées expérimentalement, en comparant les charges de flambage réelles avec les charges critiques F_c données par la formule d'EULER.

2.53 Remarque. — L'expression de la charge critique d'EULER

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

montre que, dans les limites d'utilisation de cette formule, *la charge F_c est indépendante des contraintes admissibles des matériaux utilisés et donc de leurs traitements thermiques.* Ces traitements font, en effet, varier insensiblement le module d'élasticité E qui entre seul, comme caractéristique du matériau, dans la formule d'EULER [1]. Il est donc superflu de traiter thermiquement une *poutre longue* devant résister au flambage.

2.6 APPLICATION NUMERIQUE.

Une application numérique rapide nous montrera l'abattement considérable de la résistance en compression des pièces longues, par suite de leur tendance au flambage [2].

Considérons une *bielle de commande de vol* dont la longueur libre entre articulations (relais ou renvois) est de 1500 mm. Elle est réalisée par un tube rond de 32 × 1,6 en duralumin AU4G.

$S = 153$ mm² ; $I = 17720$ mm⁴ ; $\rho = 10,77$ mm.

$$\lambda = \frac{1500}{10,77} = 139$$

Contrainte critique de flambage :

$$n_{e\lambda} = \frac{\pi^2 \cdot 7000}{139^2} = 3,57 \text{ kg/mm}^2$$

(au lieu de $n_e = 40$ kg/mm² en traction).

Charge critique de flambage :

$$F_0 = 3,57 \cdot 153 = 546 \text{ kg}$$

(au lieu d'une charge théorique [3] de rupture en traction de : $40 \cdot 153 = 6120$ kg).

2.7 ANNEXE : FLAMBAGE DES POUTRES SOUMISES A DES CHARGES DE COMPRESSION REPARTIES.

La théorie générale du flambage peut s'appliquer à des poutres sollicitées par des charges de compression réparties, ces charges pouvant agir, soit isolément, soit en supplément à une charge en bout.

Nous reproduisons ci-dessous les résultats obtenus dans le cas des pou-

1. — Ils agissent, par contre, sur la limite de proportionnalité et donc sur la délimitation d'utilisation de la formule.

2. — Nous donnerons ci-après des abaques pratiques permettant une exécution rapide de ces calculs.

3. — En négligeant l'affaiblissement éventuel dû aux trous de fixation des embouts

tres articulées à leurs deux extrémités, ou encastrées à une extrémité et libres à l'autre, la charge répartie, appliquée tout le long de la poutre, étant d'intensité constante q (charge par unité de longueur) [1]. De même que la formule d'EULER, ces résultats sont applicables à des poutres longues, rectilignes, et d'inertie constante. Mentionnons qu'une charge de compression répartie q, correspond, dans l'industrie courante, au poids propre d'une colonne verticale et, dans l'industrie aéronautique, à une sollicitation apportée à une membrure par cisaillement d'une tôle mince reliée à cette membrure (élément de nervure d'aile par exemple).

2.71 Charge répartie agissant seule. — La charge critique totale $(qL)_c$ est donnée par :

a) *Poutre bi-articulée* (fig. 8 *bis a*)

$$(qL)_c = \frac{18,6\ EI}{L^2}$$

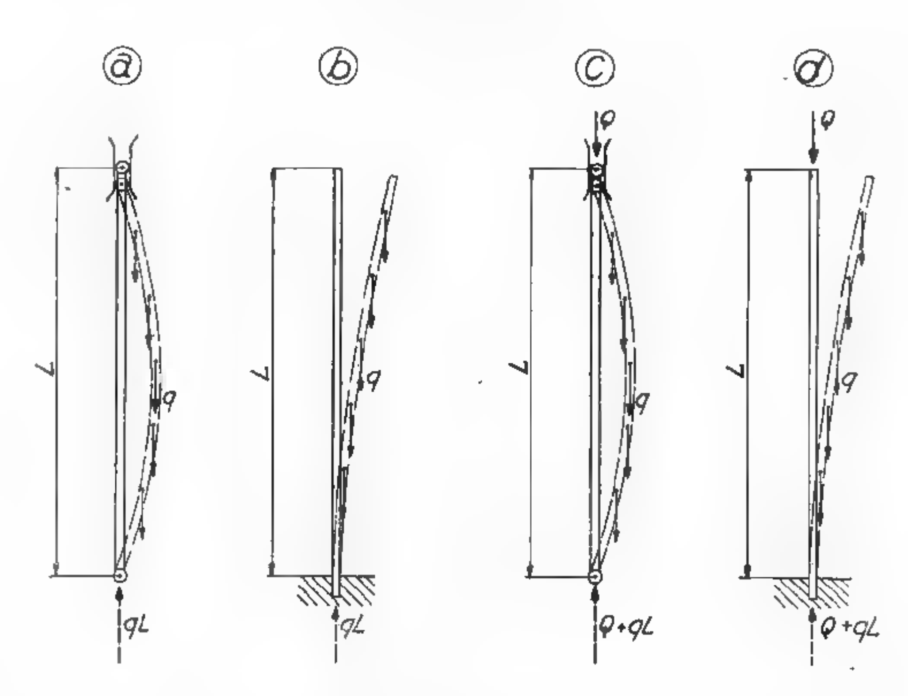


FIG. 8 *bis*.

b) *Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre* (fig. 8 *bis b*)

$$(qL)_c = \frac{7,83\ EI}{L^2}.$$

Les charges de bout critiques F_c des poutres envisagées ci-dessus étant, respectivement : $\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{9,87\ EI}{L^2}$ et $\frac{\pi^2 EI}{4\ L^2} = \frac{2,47\ EI}{L^2}$, on constate qu'une charge répartie correspond, au point de vue flambage :

dans le cas *a*) à une charge debout $F = 0,53\ qL$
dans le cas *b*) à une charge debout $F = 0,315\ qL$

soit sensiblement, pour usage mnémotechnique

$$\text{cas } a : \quad F = \frac{qL}{2}; \qquad \text{cas } b : F = \frac{qL}{3}.$$

---

1. — *Référence* : TIMOSHENKO, Théorie de la stabilité élastique § 2.3, Librairie Polytechnique, Ch. Béranger, Paris.

2.72 Charge répartie agissant en supplément à une charge debout Q. — La valeur critique Q_c de la charge Q est donnée par :

a) *Poutre bi-articulée* (fig. 8 *bis c*)

$$Q_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} - 0{,}53\ qL\ ;$$

b) *Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre* (fig. 8 *bis d*)

$$Q_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} - 0{,}315\ qL.$$

Remarques. — 1) Les charges critiques Q_c deviennent négatives pour des valeurs qL supérieures aux valeurs critiques $(qL)_c$ du cas précédent. Cela signifie que la charge Q doit alors agir en traction pour stabiliser la poutre.

2) En réalité, les coefficients 0,53 et 0,315 sont légèrement variables avec le rapport $k = \frac{F_c}{qL}$:

le premier varie de 0,5 à 0,55 pour k variant de 0 à 3,
le second varie de 0,3 à 0,325 pour k variant de 0 à 5 (variations sensiblement linéaires).

3) On constate, au point de vue flambage, que les charges réparties s'assimilent à des charges supplémentaires Q, respectivement égales aux valeurs de F définies ci-dessus.

3. FLAMBAGE GÉNÉRAL DES POUTRES COURTES RECTILIGNE, DE SECTION CONSTANTE

3.0 REMARQUES PRELIMINAIRES.

Nous venons de démontrer que l'utilisation de la formule d'EULER devait s'arrêter à un certain *élément limite* λ_0 correspondant à une contrainte de compression simple égale à la *limite de proportionnalité* du matériau considéré.

Nous allons envisager maintenant le cas des *poutres d'élancement inférieurs à l'élancement limite* λ_0, communément appelées *poutres courtes*. Le phénomène de flambage général se produira donc, pour ces poutres *au delà de la limite de proportionnalité*, c'est-à-dire : soit en fin de période élastique (non rigoureusement proportionnelle), soit en période plastique. Nous n'envisagerons toujours, dans ce paragraphe, que le cas des poutres rectilignes, de sections constantes sur toute leur longueur, et ne présentant pas de tendance au phénomène de flambage local (sections massives, voir § **1.** ci-dessus).

Nous donnerons d'abord un aperçu sur une théorie récente connue sous le nom de « *théorie du module réduit* ». Cette théorie, due à KARMAN, est encore relativement peu utilisée industriellement bien qu'elle conduise à des vérifications expérimentales très satisfaisantes. Nous indiquerons, ensuite, les *formules empiriques*, d'un emploi pratique, en nous limitant aux plus utilisées en construction aéronautique.

3.1 THEORIE DU MODULE REDUIT DE KARMAN [1].

3.11 Données. — Supposons que la charge de compression F appliquée à une poutre droite, *immédiatement avant flambage*, soit telle qu'elle engendre une contrainte de compression simple

$$n = \frac{F}{S} \text{ supérieure à } n'_e.$$

1. — *Référence :* Note n° 20 STAé/EG du 20-5-1943 par W. BARROIS.

La limite de proportionnalité est donc dépassée et le point correspondant P se situe sur le diagramme « *contraintes-déformations* »[1] du matériau au-dessus du point A′ précédemment défini (voir fig. 8 *b* et 9 *a*).

3.12 Module tangent. — La tangente à la courbe OA′R en ce point P possède, par rapport aux abscisses, une certaine inclinaison qui définit la véritable valeur du module d'élasticité de compression en ce point. On désigne cette valeur par le module *tangent* E_t au point considéré de contrainte n. Ce module tangent, qui varie en chaque point, est différent du *module d'origine* E que nous avons toujours considéré jusqu'ici et qui ne concerne, en réalité, que la période de proportionnalité OA′.

3.13 Cas théorique d'un matériau non écrouissable. — Admettons, un instant, que le matériau considéré *ne soit pas sujet à l'écrouissage*. Toute augmentation ou diminution très faible d'allongement à partir de P s'établira, comme en période de proportionnalité, à condition toutefois de remplacer E par E_t. On trouverait donc comme expression de la *charge critique de flambage*

$$F_c = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2}.$$

Cette charge critique devant être calculée par approximations successives de telle façon que la contrainte n_{ck} qui lui correspond concorde avec le module tangent E_t adopté, c'est-à-dire que

$$n_{ck} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2} - n.$$

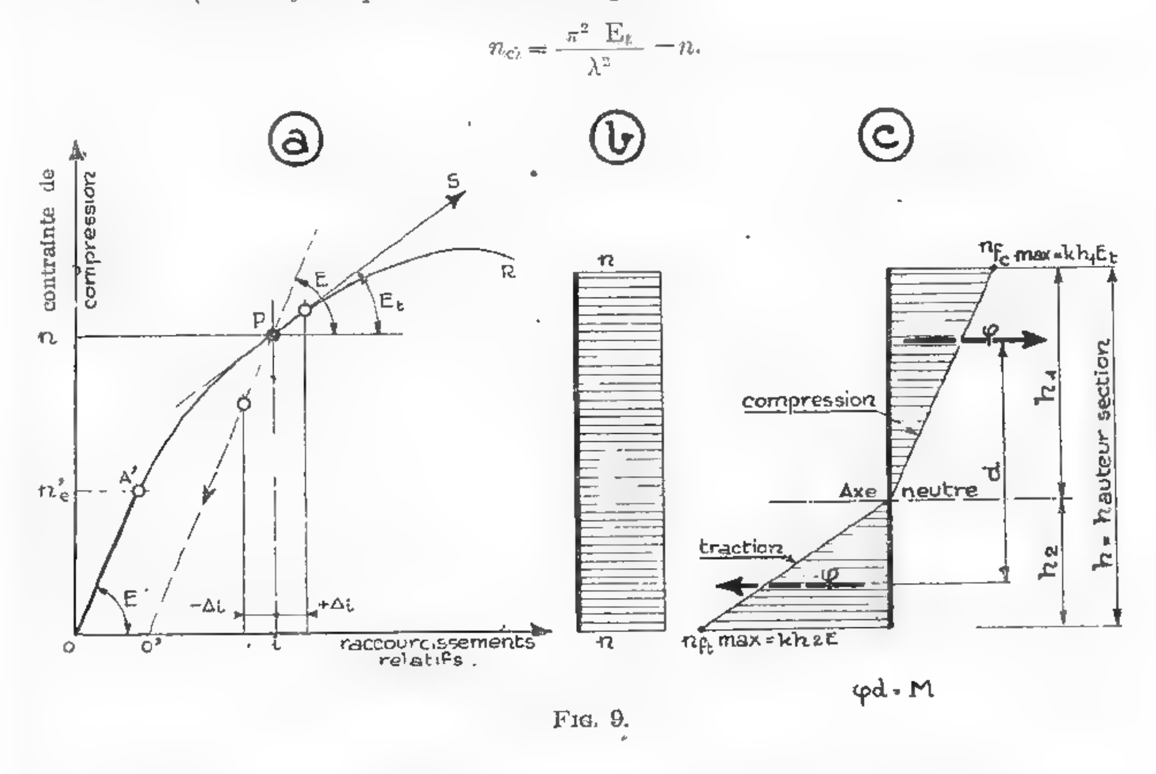


Fig. 9.

3.14 Phénomène réel. — En fait, pour tous les métaux usuels, tout dépassement de la limite de proportionnalité donne lieu à un phénomène d'*écrouissage*. Nous avons vu au chapitre V, paragraphe 5.19, que le « *dia-*

1. — Ce diagramme est supposé établi en *compression* à l'aide d'un élément reproduisant les caractéristiques géométriques des sections et les caractéristiques d'utilisation du matériau constituant la poutre elle-même.

gramme de décharge » après écrouissage s'établissait selon une droite PO' *sensiblement parallèle à la partie initiale* OA' [1].

Une diminution $-\Delta i$ de la « contraction relative » i qui existe en P, sous l'action de F, s'opèrera donc avec le module d'élasticité d'origine E, tandis qu'une augmentation $+\Delta i$ de i s'opèrera, au voisinage de P, avec le module tangent E_t.

Or, *le phénomène de flexion* dû à l'*instabilité* de la poutre en P engendrera précisément une *traction soustractive* (et donc une diminution de i) dans les parties convexes, et une *compression additive* (augmentation de i) dans les parties concaves.

Cette flexion s'opèrera donc avec le module E *pour les parties tendues et avec le module* E_t *pour les parties comprimées.*

Nous devrons, par suite, superposer à la contrainte de compression constante n existant sur une section droite (fig. 9 *b*) un *diagramme de contraintes complémentaires de flexion* tel que celui représenté sur la fig. 9 *c* [2].

Un tel phénomène de flexion, à deux modules d'élasticité, s'étudie d'une manière présentant une certaine analogie avec le procédé de calcul à rupture des poutres en bois détaillé au chapitre XII, paragraphe **1.31**.

On détermine la position de l'axe neutre en écrivant l'équivalence des moments statiques par rapport à cet axe des forces φ engendrées par les contraintes de flexion *le long de la section étudiée* (fig. 9 *c*).

On conçoit donc que la position de cet axe neutre dépendra de la *forme de la section envisagée*. Il en sera, par suite, de même des résultats finals.

3.15 Module réduit de flambage. - Les calculs permettent de faire apparaître, pour chaque type de section étudié, une valeur E_r *homogène à un module d'élasticité* qui entre en jeu dans la formule d'EULER à la place de E.

Cette valeur E_r se désigne par : « *Module réduit de flambage* » de la section étudiée. Son expression varie, théoriquement, avec chaque type de section, mais il se trouve, en pratique, que cette variation est suffisamment faible pour que l'on puisse, avec une excellente approximation, utiliser pour toutes les sections courantes le *résultat moyen* ci-dessous [3] :

$$E_r = \frac{3{,}6\ E\ E_t}{(\sqrt{E}+0{,}9\sqrt{E_t})^2}$$

3.16 Formules de flambage. — La *formule d'Euler généralisée aux poutres courtes* s'écrit alors

$$F_c = \frac{\pi^2\ E_r\ I}{L^2} \quad \text{ou} \quad n_{c\lambda} = \frac{\pi^2\ E_r}{\lambda^2}.$$

Ces expressions générales admettent comme *cas particulier* celui où $E_r = E$, c'est-à-dire où le flambage s'effectue pour une contrainte critique $n_{c\lambda}$ inférieure à la limite de proportionnalité (cas des *poutres longues* d'élancement $\lambda > \lambda_0$ étudiées au paragraphe précédent).

1. — En réalité, la pente de la « droite de décharge » s'écarte de ce parallélisme pour des contraintes avoisinant celle de rupture. Il y aurait alors lieu de considérer un « *module de décharge* » différent du module d'origine E.

2. — Ce diagramme est établi en supposant que les sections droites restent planes. Les pentes des droites qui le composent sont respectivement proportionnelles à E_t (parties comprimées) et E (parties tendues).

3. — L'erreur commise ne dépasse pas 1,6 % pour des sections droites variant de la forme circulaire pleine ou creuse à des formes rectangulaires pleines ou de genre caisson (résultat obtenu par le calcul de E_r pour chaque type de section).

3.17 Exemple d'utilisation de la théorie du module réduit.

3.171 *Données.* — Nous avons reproduit, figure 10 *a*, une « *courbe caractéristique contraintes-déformations* » en compression simple obtenue expérimentalement sur des éprouvettes de profilés en alliage léger type 24ST [1].

Il est à noter que cette courbe correspond à *l'état non écroui* de cet alliage (voir § **3.181** ci-après).

La limite de proportionnalité (point A') a lieu pour [2] $n = n_e =$ 16 kg/mm².

3.172 *Considérations générales.* — Soit une poutre, d'élancement λ donné, dont on veut déterminer la contrainte critique $n_{c\lambda}$. Le problème revient donc à connaître la valeur du module réduit E_r à faire intervenir dans ce cas particulier. Cette valeur de E_r se déterminera, elle-même, à l'aide d'une valeur du module tangent E_t. Or, celle-ci doit précisément être celle qui correspond à une contrainte de compression n égale à la contrainte critique $n_{c\lambda}$ cherchée.

Le problème ainsi posé, dans un cas particulier, nécessiterait donc une *solution par approximations successives :* On se donnerait *à priori* une contrainte n d'où E_t, E_r et une première valeur de $n_{c\lambda}$ (différente de n) que l'on pourrait utiliser comme base en deuxième approximation, etc...

Pratiquement, le procédé le plus précis consiste à établir une *courbe de flambage* caractéristique du matériau étudié.

3.173 *Construction de la courbe de flambage.* — Cette courbe, tracée figure 10 *b*, donne, en fonction des *élancements* λ portés en abscisses, les *contraintes critiques* de flambage $n_{c\lambda}$. Les calculs relatifs à son établissement sont reproduits, pour quelques points, dans le tableau ci-après.

a) *Calcul de* E_t.

Pour différentes valeurs de i (colonne 1 du tableau), on détermine, d'après la courbe (1), figure 10 *a*, les valeurs correspondantes du module tangent E_t. Ce calcul s'opère en traçant au point considéré une tangente à la courbe caractéristique et en mesurant sa *pente* compte tenu des échelles de cette courbe.

On a, en effet, (analogie avec la loi de Hooke)

$$\Delta n = E_t \ \Delta i \qquad \text{d'où} \qquad E_t = \frac{\Delta n}{\Delta i}$$

Δn et Δi étant des accroissements correspondants de n et de i mesurés entre deux points de la tangente considérée.

Les échelles, utilisées ici, ayant pour valeur

en abscisses : 1 mm $= 10^4 \ \Delta i$,
en ordonnées : 1 mm $=$ 0,5 kg/mm²,

la différence des ordonnées des points de rencontre d'une tangente avec les verticales élevées en $i = 0$ et $i = 50$ ($\Delta i = 50$) mesurent directement E_t à l'échelle

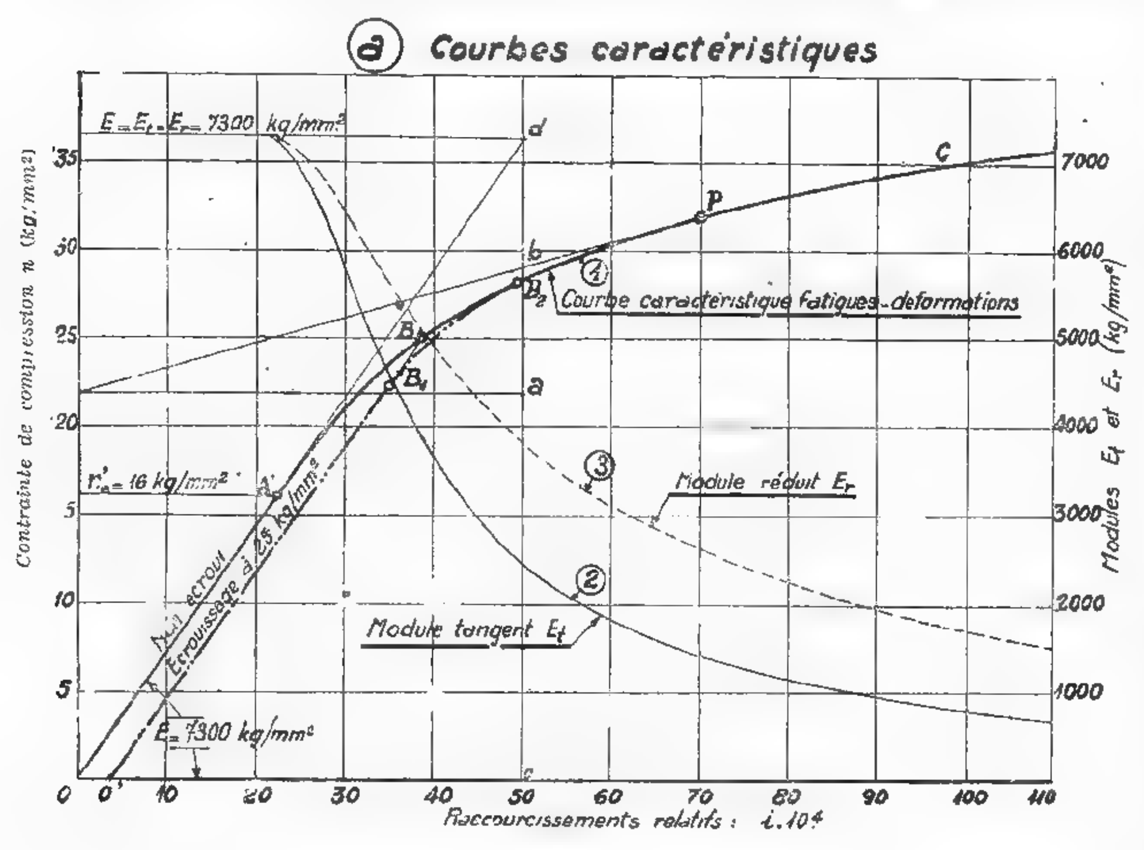
$$1 \text{ mm} = \frac{50}{0{,}5} 10^4 = 100 \ \text{kg/mm}^2.$$

1. — Alliage américain possédant des caractéristiques de résistance intermédiaires entre celles des alliages français AU4G (duralumin normal) et AU4G1 (duralumin à forte résistance). Voir Planche 12.

2. — On adopte généralement, pour cet alliage, une limite élastique conventionnelle égale à 28 kg/mm².

Exemples. — Au point P ($i = 70 \cdot 10^{-4}$, figure 10 *a*), E_t est représenté par $ab = 14{,}1$ mm d'où $E_t = 1410$ kg/mm².

APPLICATION DE LA THÉORIE DU MODULE RÉDUIT A DES PROFILÉS EN ALLIAGE 24ST



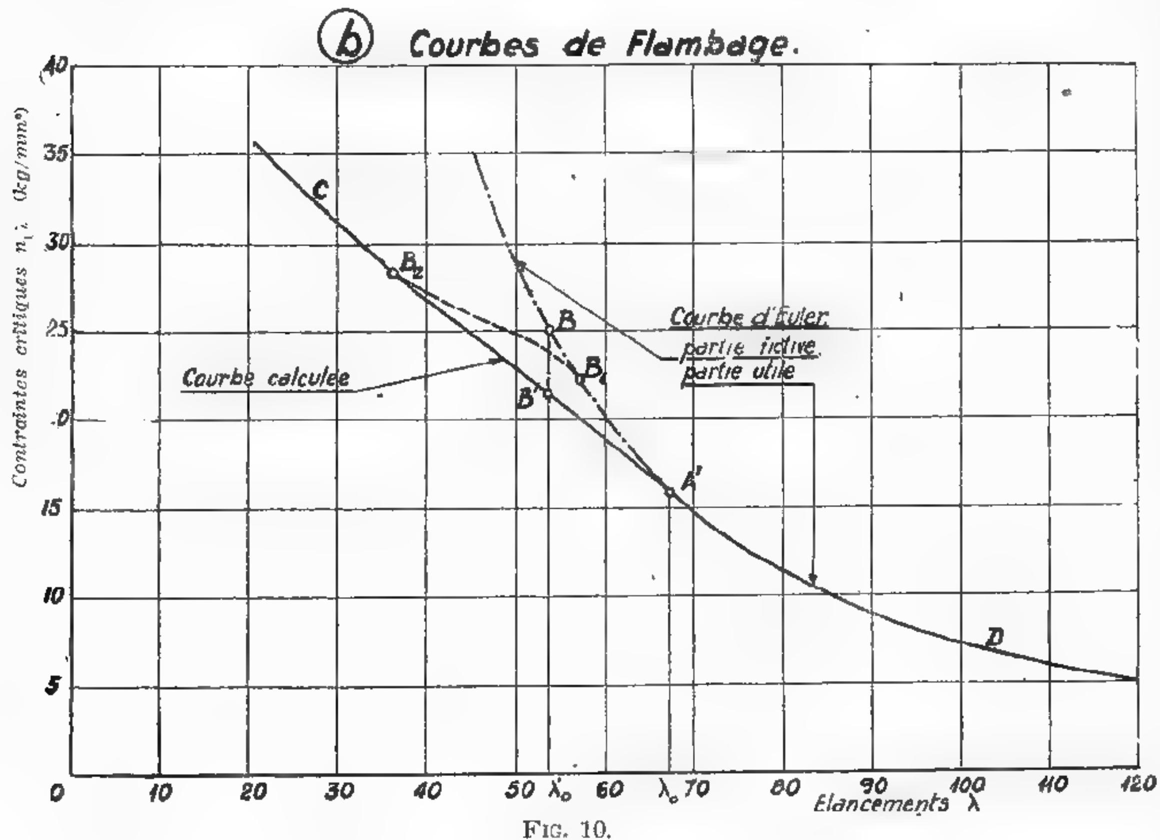


FIG. 10.

Le *module d'origine* E est mesuré par la pente de la droite OA, soit $\overline{cd}=73$ mm$=7300$ kg/mm².

Voir valeurs de E_t, colonne 2 du tableau ci-après, et courbe (2) figure 10 *a* [1].

b) Calcul de E_r.

On déduit, des valeurs de E_t, celles du *module réduit de flambage* E_r, à l'aide de l'expression donnée au paragraphe 3.15, que l'on a avantage à mettre sous la forme suivante, pour effectuer les calculs

$$E_r=3{,}6\ E\ \frac{\frac{E_t}{E}}{\left(1+0{,}9\sqrt{\frac{E_t}{E}}\right)^2}\ .$$

Voir colonnes 3 à 6 du tableau ci-après.

c) Correspondance de E_r *et de l'élancement* λ.

On doit avoir, en chaque point

$$n=n_{c\lambda}=\frac{\pi^2\ E_r}{\lambda^2} \qquad \text{soit} \qquad \lambda^2=\frac{\pi^2\ E_r}{n}$$

d'où

$$\lambda=\pi\sqrt{\frac{E_r}{n}}\ .$$

Les valeurs de n sont lues, en chaque point, sur la courbe (1) figure 10 *a*. Voir colonnes 7 à 9 du tableau.

TABLEAU DE CALCULS

$i\times10^4$	E_t	Calcul de E_r				Correspondance entre E_r et λ		
		$\frac{E_t}{E}$	$\sqrt{\frac{E_t}{E}}$	$\left(1+0{,}9\sqrt{\frac{E_t}{E}}\right)^2$	E_r	$n=n_{c\lambda}$	$\frac{E_r}{n}$	λ
	kg/mm²				kg/mm²	kg/mm²		
0	7300	1	1	3,6	7300	0	∞	∞
10	7300	1	1	3,6	7300	7,30	1000	99,4
20	7300	1	1	3,6	7300	14,60	500	70,2
30	5800	0,795	0,892	3,250	6425	21,20	303	54,7
50	2430	0,333	0,577	2,308	3790	28,35	134	36,4
70	1410	0,193	0,439	1,946	2605	31,95	81,5	28,4
90	950	0,130	0,361	1,755	1945	34,20	56,9	23,7
110	675	0,0925	0,304	1,622	1500	35,70	42	20,4
1	2	3	4	5	6	7	8	9

d) Courbe de flambage.

La courbe de la figure 10 *b* (en trait continu) s'obtient donc, par points, à l'aide des valeurs de λ et de $n=n_{c\lambda}$ correspondantes.

Au-dessus de l'*élancement limite*

$$\lambda_0=\pi\sqrt{\frac{E}{n'_e}}=\pi\sqrt{\frac{7300}{16}}=67{,}2$$

1. — Il est, pratiquement, nécessaire de tracer cette courbe pour corriger les imprécisions dues au tracé des tangentes.

on retrouve la courbe d'Euler (partie utile) d'équation

$$n_{c\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

3.174 *Exemple d'application.* — Soit à déterminer la charge critique de flambage d'un *tube rectangulaire* en AU4G [1] de dimensions : 64×32×1,6 appartenant à un *système triangulé.* Longueur des nœuds : L'=1,1 m.

Caractéristiques de section :

$$S = 281{,}6 \text{ mm}^2 \ ; \ I \min = 53830 \text{ mm}^4$$

$$\rho \min = \sqrt{\frac{53830}{281{,}6}} = 13{,}8 \text{ mm.}$$

Adoptons un coefficient d'encastrement $\alpha = 0{,}633$ tenant compte de la continuité de la barre de part et d'autre des nœuds (§ 2.45).

Elancement effectif :

$$\lambda = \alpha \frac{L'}{\rho} = 0{,}633 \frac{1100}{13{,}8} = 50{,}45.$$

La courbe figure 10 *b* donne directement

$$n_{c\lambda} = 22{,}7 \text{ kg/mm}^2$$

d'où

$$F_c = S \cdot n_{c\lambda} = 281{,}6 \cdot 22{,}7 = 6390 \text{ kg.}$$

Remarque : Cette application suppose qu'il ne se produit pas de *flambage local* des parois du tube considéré avant la contrainte $n_{c\lambda}$ (Voir ci-après).

3.18 **Difficulté d'application de la théorie du module réduit.** – L'application de la théorie du module réduit nécessite donc la connaissance préalable de la courbe caractéristique « *contraintes-déformations* » propre au matériau utilisé. Une telle courbe s'établit *expérimentalement* en comprimant progressivement une éprouvette entre les plateaux d'une machine d'essai et en mesurant ses raccourcissements à l'aide de comparateurs ou d'extensomètres montés sur cette éprouvette.

Mais, en réalité, plusieurs facteurs peuvent influencer considérablement l'exactitude de cette opération. Ce sont, notamment, l'*écrouissage préalable* et le *flambage local*.

3.181 *Influence de l'écrouissage préalable.* — Supposons que la détermination de la courbe expérimentale de la figure 10 *a* ait été effectuée après une *compression préalable* de l'éprouvette d'essai, sous un taux supérieur à celui de la limite de proportionnalité. Il se serait produit un *écrouissage préalable*.

Supposons, par exemple, une compression préalable au taux $n = 25$ kg/mm² (point B, fig. 10 *a*). Au lieu d'obtenir la courbe OBC, on aurait obtenu la courbe O'BC.

Entre $n = 0$ et $n = 25$ kg/mm² le module tangent E_t et, par suite, le module réduit E_r auraient été égaux au module d'origine E. Au-dessus de cette nouvelle partie linéaire, on aurait retrouvé, à contraintes égales [2], les mêmes valeurs de E_t et de E_r que dans l'application précédente (mêmes pentes des tangentes).

Les courbes de variation de E_t et E_r auraient donc possédé une discontinuité (théorique) au niveau du point B (deux tangentes différentes en ce point).

1. — Nous supposerons que la courbe de la fig. 9 *a* est valable pour cet alliage.
2. — Et non pour les mêmes valeurs de *i* (origine décalée).

Nous aurions, finalement, obtenu la *courbe de flambage* DA′BB′C (fig. 10 *b*), c'est-à-dire que la partie utile de la courbe d'Euler aurait été prolongée de la portion A′B comprise entre les ordonnées $n_{c\lambda}=16$ et 25.

Remarque. — En réalité, le point anguleux, en B, de la courbe contrainte-déformations après écrouissage (fig. **10** *a*) est théorique. On constaterait, pratiquement, un léger « congé de raccordement » autour de ce point.

En admettant, par exemple, le raccordement B_1 B_2 représenté figure 10 *a*, on obtiendrait la courbe de flambage DA′B_1B_2C (fig. 10 *b*).

Conséquences. — Un écrouissage préalable a donc pour effet de surélever la courbe de flambage dans une certaine région, c'est-à-dire d'*augmenter la résistance au flambage* des poutres dont l'élancement correspond à cette région modifiée.

En admettant la courbe modifiée A′B_1B_2 (fig. 10 *b*) on trouverait, par exemple, dans le cas de l'application du paragraphe **3.174** : $\lambda=50{,}45$,

$$n_{c\lambda}=24{,}7 \text{ kg/mm}^2, \text{ au lieu de } n_{c\lambda}=22{,}7 \text{ kg/mm}^2$$

pour l'état non écroui, soit une différence relative de 8,1 %. Or, en pratique, les poutres travaillant en compression sont susceptibles de recevoir, d'une façon usuelle, des charges entraînant un écrouissage préalable. Il résulte de ce fait, une certaine incertitude sur leur résistance réelle au flambage.

En conclusion pratique, comme il est difficile de préjuger de l'état exact de ces poutres au moment où elles devront encaisser sans flamber leur « pointe de charge » maximum, il est prudent d'utiliser, pour leur dimensionnement, la courbe caractéristique à l'état non écroui.

3.182 *Influence du flambage local.* — L'apparition d'une *instabilité locale*, dans le cas des poutres de sections minces (profilés, tubes, caissons composés, etc...) conduit également à une modification profonde des courbes caractéristiques. En particulier, le module tangent E_t diminue et le module de déchargement devient différent du module d'origine E (sa valeur diminue également). Ces modifications entraînent une *diminution de la résistance au flambage* (voir ci-après).

3.183 *Flambages théoriques et réels.* — L'expression de E_r servant de base à la théorie du module réduit est établie dans le cas théorique d'un flambage *infiniment brutal* au niveau de la contrainte critique. Or, nous avons déjà dit au paragraphe **2.2** que, par suite des défauts d'homogénéité ou de rectitude des poutres, le fléchissement pouvait apparaître, en réalité, pour des charges inférieures à la charge critique. Il en découlerait une modification du raisonnement et des calculs servant à déterminer E_r. La charge critique calculée dans l'hypothèse théorique devient une *limite supérieure* de la charge de flambage réelle.

3.19 Conclusion. — La théorie du module réduit fournit une solution générale très séduisante à l'étude des phénomènes de flambage. Cette théorie sera pratiquement utilisable, dans le domaine industriel courant, quand on connaîtra avec certitude les courbes « contraintes-déformations » de tous les métaux usuels, dans leurs états exacts d'utilisation et pour toutes les caractéristiques de sections utilisées.

Il est à signaler que des essais récents, effectués, notamment sur des éprouvettes en alliages légers et en acier au chrome-molybdène, ont démontré une concordance très satisfaisante entre les valeurs calculées, et les valeurs expérimentales.

3.2 FORMULES EMPIRIQUES.

3.20 Principe général d'établissement. — En attendant une utilisation généralisée de la théorie du module réduit, on continue à employer industriellement des *formules empiriques* que nous exposions ci-dessous [1] dans le cas des poutres ne présentant pas de tendance au flambage local [2].

Leur principe général d'établissement consiste à substituer à la courbe d'Euler, en dehors de ses limites d'application (poutres courtes d'élancement inférieur à λ_0), une courbe traduisant, au mieux, des résultats expérimentaux moyens. On doit, en particulier, retrouver pour un élancement $\lambda=0$ la contrainte admissible en compression simple n_{ca}.

La comparaison entre ces diverses formules est mise en évidence par le diagramme de la figure 11 relatif à un acier donnant un taux n_{ca} égal à 68 kg/mm² et un module d'élasticité d'origine E = 20000 kg/mm² (acier 20CD4, traité à R = 68 ; voir planche 11).

Il importe de ne pas attribuer à ces formules empiriques la valeur d'une réglementation absolue, ce qui est d'ailleurs mis en évidence par les différences de résultats auxquels elles conduisent (fig. 11).

3.21. Formule de Rankine. — Elle s'exprime par la relation

$$n_{c\lambda}=\frac{n_{ca}}{1+\dfrac{n_{ca}}{\pi^2\,E}\,\lambda^2}.$$

C'est l'une des plus anciennes formules de flambage qui n'est plus guère utilisée actuellement en construction aéronautique. Il est facile de voir, en égalant son expression à celle d'Euler, que sa courbe représentative ne rejoint celle d'Euler qu'à l'infini (fig. 11). Elle conduit, en général, à des valeurs trop défavorables des charges critiques, tout au moins pour les forts élancements où la formule d'Euler reste applicable.

3.22 Formule de Johnson.

$$n_{c\lambda}=n_{ca}-\frac{n_{ca}^2\,\lambda^2}{4\,\pi^2\,E}.$$

Cette formule est principalement utilisée en construction aéronautique aux Etats-Unis.

Sa courbe représentative est *tangente* à celle d'Euler pour un *élancement limité* λ'_0 défini par

$$\lambda'_0=\pi\sqrt{\frac{2\,E}{n_{ca}}}$$

ce qui donne pour le *duralumin* AU4G (E = 700 kg/mm² ; $n_{ca}=40$ kg/mm²).

$$\lambda'_0=\pi\sqrt{\frac{2\times7000}{40}}=59$$

et pour l'acier 20CD4 (fig. 11) : E = 20000 ; $n_{ca}=68$.

$$\lambda'_0=\pi\sqrt{\frac{2\times20000}{68}}=76{,}2.$$

1. — Nous nous sommes limités aux trois formules les plus usuelles en construction aéronautique.

2. — Les expressions de ces formules seront modifiées au § 4.222 pour tenir compte de ce phénomène.

Cet élancement limite définit, pour chaque cas particulier, la *limite inférieure d'utilisation de la formule de* JOHNSON.

Pour $\lambda > \lambda'_0$ il convient d'utiliser la formule d'EULER.

COMPARAISON DES FORMULES EMPIRIQUES DE FLAMBAGE POUR L'ACIER 20CD4

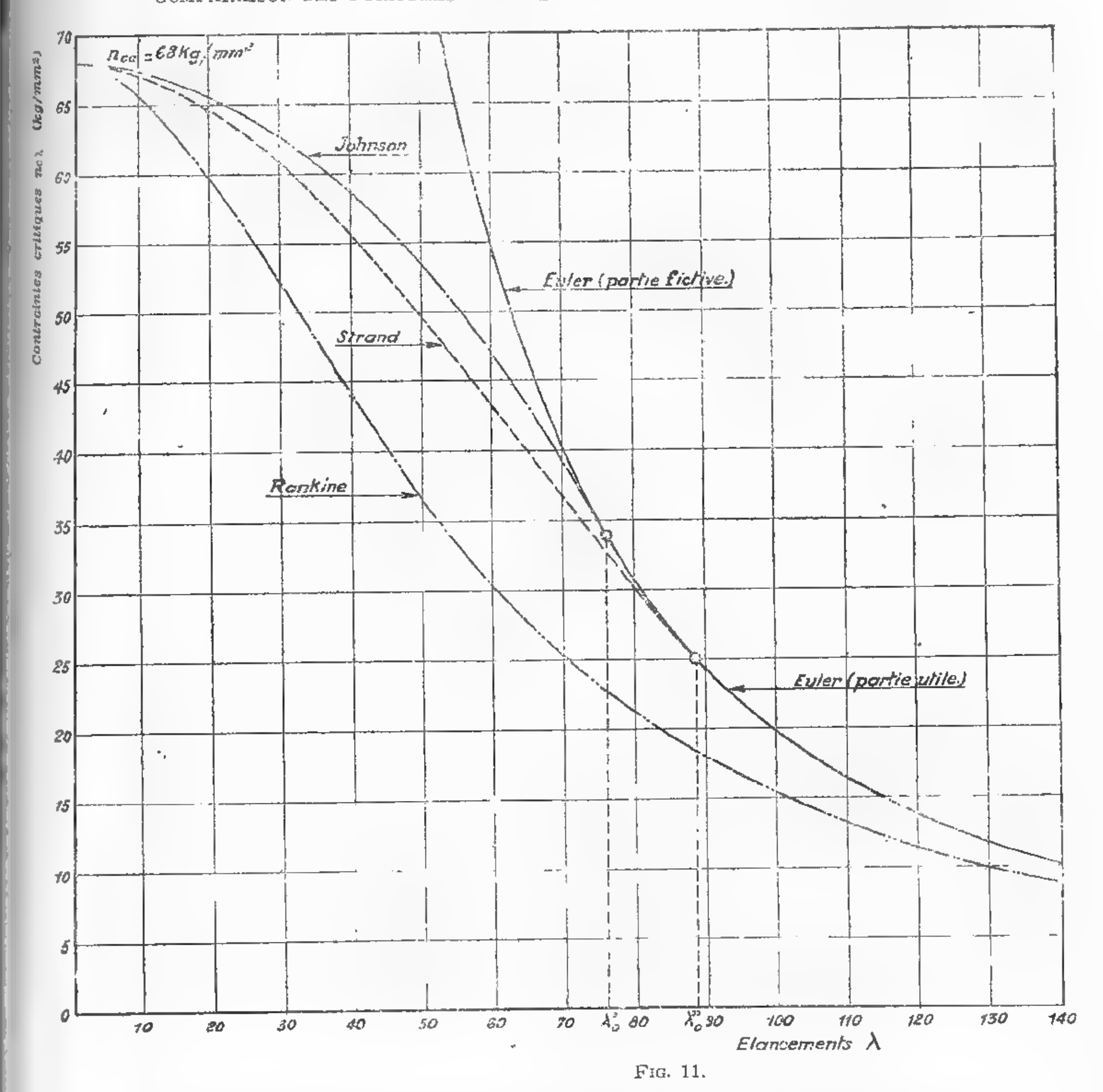


FIG. 11.

Remarque. — En remplaçant λ'_0 par sa valeur dans l'expression de $n_{o\lambda}$, on constate que l'élancement limite correspond à une contrainte

$$n_{c_\lambda} = \frac{n_{ca}}{2}.$$

La formule de JOHNSON n'est donc utilisable que pour des contraintes de compression supérieures à la moitié de la contrainte limite admissible.

3.23 Formule de Strand.

$$n_{cr} = n_{ca} \cdot e^{-\lambda^2 \frac{n_{ca}}{\pi^2 E e}}$$

Dans cette formule e est la base des *logarithmes népériens* (voir chap. I, § 2.3)

$$e = 2{,}71828...$$

Son expression exponentielle, qui rend son emploi numérique direct peu aisé, facilite au contraire sa représentation graphique sur des *abaques en coordonnées logarithmiques* (voir ci-après § **4.23**).

Cette formule est la plus utilisée en construction aéronautique française.

Sa courbe représentative qui s'écarte peu de celle de Johnson (fig. 11) est *tangente* à celle d'Euler pour un *élancement limite* λ''_0 défini par

$$\lambda''_0 = \pi \sqrt{\frac{Ee}{n_{ca}}}.$$

On a donc

$$\frac{\lambda''_0}{\lambda'_0} = \frac{\text{élanc}^t \text{ limite Strand}}{\text{élanc}^t \text{ limite Jonhson}} = \sqrt{\frac{e}{2}} = 1{,}166.$$

pour le *duralumin* AU4G : $\lambda''_0 = 68{,}8$.
pour l'*acier* 20CD4 (fig. 11) : $\lambda''_0 = 88{,}8$.

La valeur de λ''_0 définit également la *limite inférieure* d'utilisation de la formule de Strand, au-dessus de laquelle il y a lieu d'utiliser la formule d'Euler.

3.3 CONCLUSION.

Il importe de retenir, en conclusion aux études ci-dessus, que le flambage dans le domaine plastique est lié intimement à l'*état d'utilisation* du matériau. Nous avons vu, en effet, que cet état influençait considérablement la valeur du module réduit E_r et on le retrouve également dans les formules empiriques ci-dessus où entre la contrainte n_{ca}. *Les charges de flambage des poutres courtes sont donc tributaires des traitements thermiques des métaux qui les constituent*, contrairement à celles des poutres longues (§ **2.53**).

Cette conclusion fournit un argument justificatif à la dispersion souvent fort décevante constatée au cours d'essais expérimentaux concernant le flambage de ces poutres.

4. FLAMBAGE LOCAL ET FLAMBAGE GÉNÉRAL DES POUTRES RECTILIGNES DE SECTIONS MINCES

4.1 CONTRAINTE CRITIQUE DE FLAMBAGE LOCAL.

4.11 Définition. — Nous avons désigné, au paragraphe **1.2**, par *flambage local* un phénomène d'instabilité prenant naissance dans une zone localisée d'une poutre de sections minces, soumise à un effort de compression.

Cette instabilité, qui ne correspond pas à un effondrement immédiat de la poutre, contrairement au flambage général, peut cependant pratiquement limiter la résistance des poutres courtes et surtout influer considérablement sur le flambage général en créant une « *amorce de déséquilibre* ».

Nous désignerons par n_{co} la contrainte de compression simple donnant lieu à l'apparition du flambage local. *Cette contrainte critique de flambage local* est, théoriquement, *indépendante de la longueur* de la poutre étudiée.

On l'évalue en fonction d'un « *indice de minceur* » caractéristique de chaque section droite. Cette détermination peut se faire, soit par des méthodes expérimentales, soit par des calculs théoriques, soit enfin à l'aide de formules empiriques.

4.12 Méthodes expérimentales. — On soumet à des charges de compression des *éprouvettes courtes* ayant même section que la poutre ou de profilés étudiés. Des précautions particulières doivent être prises : il faut notamment que les *éprouvettes* soient *parfaitement dressées* et que les *plateaux* de la machine d'essai soient rigoureusement *parallèles* et *guidés* [1].

Le souci d'éviter le flambage général conduirait à adopter des éprouvettes très courtes telles que leurs élancements effectifs soient inférieurs à 10, par exemple.

Mais on se heurte à une difficulté pratique provenant de l'influence des encastrements de l'éprouvette sur les plateaux, ce qui conduit, finalement, à adopter des élancements supérieurs (λ compris entre 10 et 20), sous réserve d'effectuer, au besoin, une *correction de flambage général* à l'aide des formules ci-après (formule de Strand généralisée, par exemple) utilisées en sens inverse de leur emploi normal.

Cette méthode expérimentale est pratiquement la plus sûre et son emploi est toujours à conseiller quand on cherche à définir le type de réalisation d'une structure (choix des raidisseurs d'un caisson ou d'une coque, par exemple).

4.13 Calculs théoriques. — Il existe différentes méthodes de calculs théoriques qui sont toutes relativement récentes et encore en cours d'évolution.

Le problème se traite dans chaque cas particulier en se donnant, *à priori*, une « allure de déformation » et en cherchant les *conditions de stabilité* qui en découlent. Ces allures de déformation sont d'ailleurs suggérées par des essais expérimentaux.

Nous ne donnerons pas ici l'exposé des calculs qui sont généralement assez complexes, mais nous nous limiterons à reproduire quelques *résultats pratiques*.

Abaques à points alignés. — Ces résultats sont traduits sous forme d'abaques à points alignés, extraits d'une étude exécutée par M. Farinès, ingénieur à la S. N. C. A. S. E.

On trouvera :
- **Planche 26** : Le cas des cornières à ailes égales,
- **Planche 27** : Le cas des tubes carrés,
- **Planche 28** : Le cas des tubes circulaires.

L'usage de ces abaques est explicité sur chacun d'eux.

Le paramètre entrant en jeu pour déterminer n_{co}, est un *indice de minceur* β défini dans chaque cas particulier.

Les formules servant au tracé de ces abaques sont de la forme générale suivante :

$$\text{en période élastique : } n_{co} = \frac{E}{K\,\beta^2}.$$

$$\text{en période plastique : } n_{co} = n_{ca} \cdot e^{-K \frac{n_{ca}}{Ee} \beta^2}$$

(avec $e = 2{,}71828$).

On remarquera l'analogie de ces formules avec celles d'Euler et de

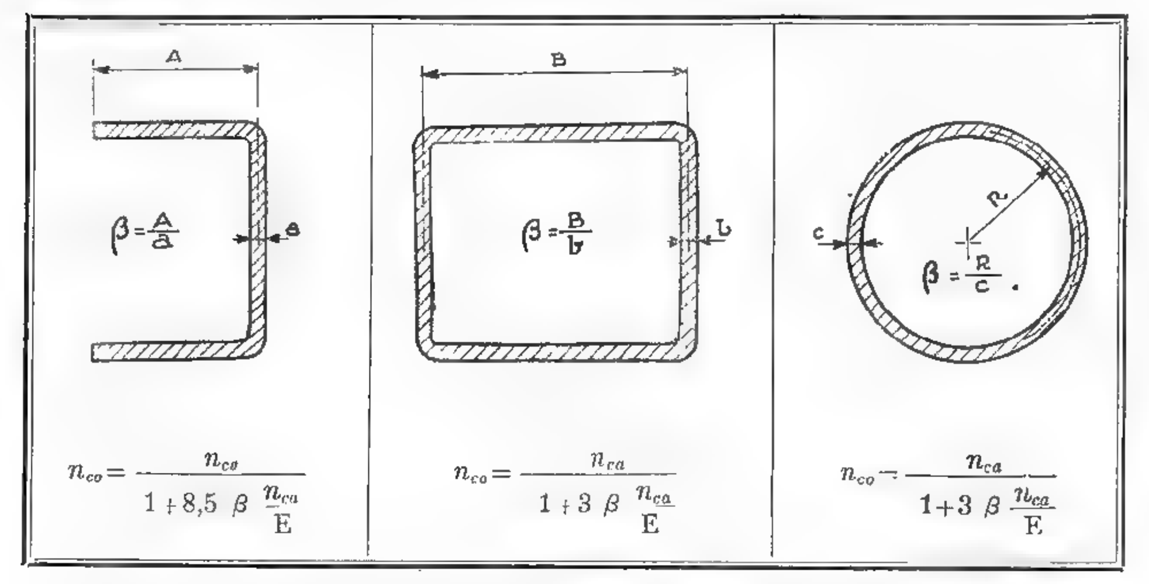
1. — Ces précautions exercent une influence capitale sur les résultats obtenus.

STAND. L'élancement λ s'y trouve remplacé par « l'indice de minceur » β et le coefficient K comprend l'influence de paramètres propres à chaque type de section ou de métal. Les valeurs de K sont indiquées sur chaque abaque.

Le passage d'une formule à l'autre se trouve pratiquement réalisé sur les abaques des Planches 26 et 27 par la condition de recoupement ou de tangence de la droite d'alignement et des courbes n_{ca}, explicitée sur chacun d'eux. Dans le cas des tubes circulaires (Planche 28), le flambage local se produit toujours en période plastique pour les valeurs de β envisagées (valeurs extrêmes usuelles) ce qui explique l'absence de cette condition de tangence.

4.14 Formules empiriques. — Nous donnons, dans le tableau ci-après, un groupe de trois formules essentiellement *expérimentales* adoptées, en France, par le S. T. Aé.

Il est à remarquer que leur forme générale s'apparente à celle de la formule de RANKINE (§ **3.21**) dans laquelle la variable ^{2} serait remplacée par l'indice de minceur β. Elles s'appliquent respectivement à chacune des formes de sections figurées.



4.15 Comparaison des résultats. — Comparons les résultats donnés par les abaques à points alignés et les formules ci-dessus dans deux cas particuliers :

a) Tube carré AU4G de 64 × 64 × 2, $n_{ca} = 40$ kg/mm².

abaque Planche 27 : (avec $\beta = \frac{62}{2} = 31$) ; $n_{co} = 23{,}7$ kg/mm²

formule empirique

$$n_{co} = \frac{40}{1 + 3 \cdot 31 \cdot \dfrac{40}{7000}} = 26{,}1 \text{ kg/mm}^2.$$

b) Tube étiré rond, acier $\Phi = 50$, $e = 2$, $n_{ca} = 68$ kg/mm².

abaque Planche 28 : E=20000 kg/mm² $\beta = \frac{24}{2} = 12$

$n_{co} = 65$ kg/mm²

formule : $n_{co} = \dfrac{68}{1 + 3 \times 12\ \dfrac{68}{20000}} = 60{,}6$ kg/mm².

Ces exemples montrent que la concordance entre les résultats est relativement lontaine. Aussi, n'y a-t-il pas lieu d'appliquer aux théories correspondantes la valeur de règlements formels.

4.16 Largeur portante d'une tôle pliée. — La théorie du flambage local des cornières permet de faire ressortir une notion très intéressante appelée « *largeur portante* » d'une tôle au niveau d'un pliage.

Cette largeur portante est la dimension fictive des ailes d'une cornière qui supporterait la même charge de compression que la tôle pliée considérée avec un taux de travail égal à la limite de proportionnalité [1] (fig. 12).

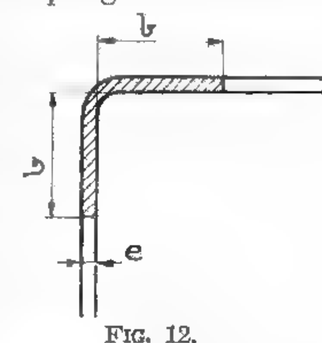


FIG. 12.

On trouve, dans le cas du duralumin AU4G, que cette largeur portante b mesure environ 15 fois l'épaisseur e, soit $b = 15e$, ce qui autorise un taux de compression local de l'ordre de 22 kg/mm². Elle définit donc la *largeur utile maximum* à donner à un *bord tombé de raidissement* d'une tôle comprimée. Il est pratiquement illusoire d'augmenter, au delà de cette limite, la largeur d'un bord tombé dans l'espoir d'accroître l'inertie.

4.17 Flambage local en flexion. — Les parties comprimées d'un tube mince travaillant en flexion tendent à flamber localement. Des calculs théoriques montrent que le flambage local se produit pour une contrainte supérieure d'environ 30 % à la contrainte critique de flambage local en compression uniforme

$$n_{fo} \approx 1,3\ n_{ca}.$$

Cet accroissement de stabilité provient de l'influence favorable de la proximité des parties tendues.

4.2 FLAMBAGE GÉNÉRAL DES POUTRES MINCES.

4.21 Poutres longues (flambage élastique). — Pour les poutres longues (c'est-à-dire pour celles possédant un élancement effectif λ supérieur à l'élancement limite λ_0 (§ **2.52**), la charge et la contrainte critiques de flambage général sont toujours données par les formules d'EULER :

$$F_c = \frac{\pi^2\ EI}{L^2}\ ; \qquad n_{c\lambda} = \frac{\pi^2\ E}{\lambda^2}$$

sous réserve toutefois que l'on obtienne

$$n_{c\lambda} < n_{co}.$$

Cette condition est, en général, satisfaite pour toutes les formes de sections usuelles qui admettent un taux de flambage local n_{co} supérieur à la limite de proportionnalité n'_e (limite supérieure de $n_{c\lambda}$ d'EULER).

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si l'application de la formule d'EULER donne

$$\frac{\pi^2\ E}{\lambda^2} > n_{co}$$

on admet généralement, et d'une façon défavorable, que la contrainte critique de flambage général coïncide avec l'apparition du flambage local, soit

$$n_{c\lambda} = n_{co}.$$

1. — Nous trouverons, au chapitre XIX, une notion similaire appelée « largeur équivalente en compression » des tôles minces raidies.

4.22 Poutres courtes. — (Poutres d'élancement effectif : $\lambda < \lambda_0$; flambage plastique.)

4.221 *Théorie du module réduit.* — Ainsi que nous l'avons indiqué au paragraphe **3.182**, la *théorie du module réduit* permet d'étudier le flambage général des poutres de sections minces, à condition d'établir préalablement les courbes « contraintes-déformations » à l'aide d'éprouvettes reproduisant exactement les *caractéristiques des sections droites*. Le phénomène de flambage local se trouve ainsi inclus dans l'allure de ces courbes caractéristiques et, par suite, dans les résultats finals.

4.222 *Formules pratiques.* — En l'absence de ces courbes expérimentales, on continue, en période plastique, à utiliser les *formules empiriques* exposées au paragraphe **3.2** en leur apportant, toutefois, la modification suivante.

On admet que la contrainte critique de flambage local constitue une *limite supérieure de la contrainte admissible en compression simple ;* c'est-à-dire que pour un élancement $\lambda = 0$, on obtient

$$n_{c\lambda} = n_{co}.$$

Il suffit alors de remplacer, dans ces formules, le terme n_{ca} par le terme n_{co} pour obtenir leurs *expressions généralisées au cas des poutres minces.*

On obtient ainsi, pour les formules les plus utilisées en construction aéronautique :

Formule de Johnson

$$\boxed{n_{c\lambda} = n_{co} - \frac{n_{co}^2 \lambda^2}{4 \pi^2 E}}.$$

Formule de Strand

$$\boxed{n_{c\lambda} = n_{co} \, e^{-\lambda^2 \frac{n_{co}}{\pi^2 E e}}}.$$

4.23 Abaques de Strand-Euler. — Pratiquement on utilise, en France, des *abaques* traduisant les expressions associées des formules de STRAND et d'EULER. Comme nous l'avons indiqué au paragraphe **3.23**, les courbes représentatives de ces deux formules sont, en effet, tangentes en un point dont l'abscisse a pour valeur, dans le cas des sections minces

$$\lambda''_0 = \pi \sqrt{\frac{E e}{n_{co}}}.$$

(Pour $\lambda > \lambda''_0$: formule d'Euler, et pour $\lambda < \lambda''_0$: formule de Strand.)

Ces abaques peuvent être utilisés indifféremment pour les sections minces ou massives.

4.231 *Abaques en coordonnées rectangulaires.* — Ces abaques, les plus répandus, se présentent en coordonnées rectangulaires comportant en ordonnées une *graduation logarithmique*.

Leur *principe d'établissement* est le suivant :

Prenons le logarithme néperien des deux membres de la formule de STRAND écrite ci-dessus, nous obtenons [1]

$$\text{L} \; n_{c\lambda} = \text{L} \; n_{co} - \lambda^2 \frac{n_{co}}{\pi^2 E e}.$$

1. — On sait, en effet, que Le (logarithme népérien du nombre e) = 1. Voir chapitre I. § 2.3.

En portant $x = \lambda^2$ en abscisses et $y = \mathrm{L}n_{c\lambda}$ en ordonnées (c'est-à-dire en utilisant pour ces ordonnées une graduation logarithmique), cette expression se représente, pour une valeur donnée de n_{co}, par une *droite* dont l'équation est de la forme

$$y = C_1 - C_2\, x$$

C_1 et C_2 étant des constantes tributaires de n_{co}.

En faisant varier n_{co}, on obtient un *réseau de droites* tangentes à la *courbe d'Euler* (tracée sur le même diagramme) aux points d'abscisses

$$x = \pi^2 \frac{E}{n_{co}} e.$$

Il est nécessaire d'établir un abaque pour chaque valeur de E, c'est-à-dire pour chaque métal.

Nous reproduisons **Planche 30** deux de ces abaques classiques relatifs aux aciers (E=20000 kg/mm²) et au *duralumin* [1] (E=7000 kg/mm²).

Leur usage, très simple, est le suivant (fig. 13).

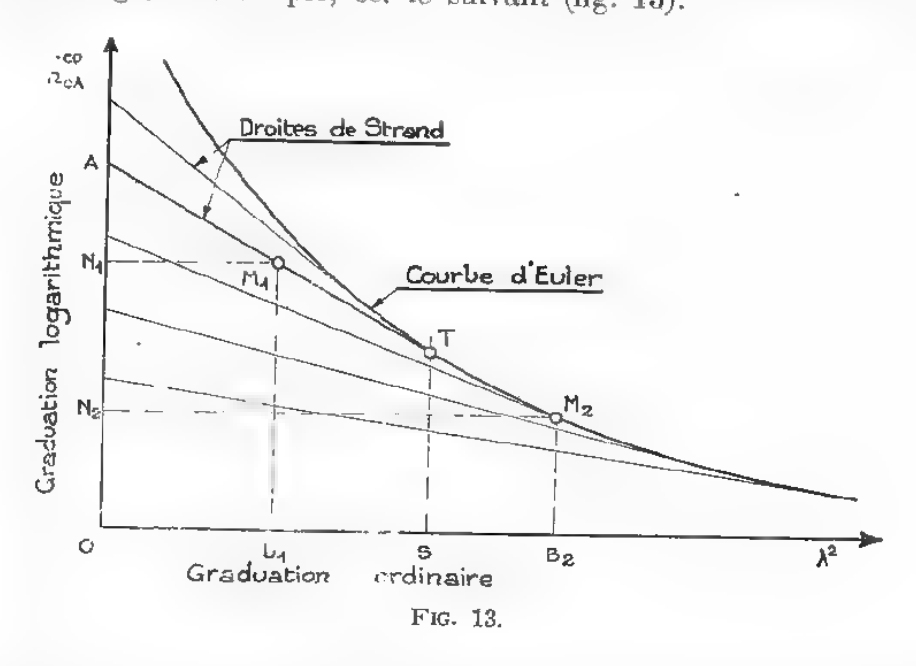


FIG. 13.

On calcule n_{co} à l'aide des formules du paragraphe **4.14**, ou des abaques des planches 26 à 28. On porte cette valeur en ordonnée [2] (point A) ce qui définit une droite de Strand AT. Pour une abscisse λ^2 comprise entre O et S (domaine de STRAND, point B_1 par exemple) on obtient un point M_1 sur AT dont l'ordonnée N_1 fixe la valeur de $n_{c\lambda}$.

Pour un point B_2 situé au delà de S (domaine d'EULER) on obtient $n_{c\lambda}$ sur l'horizontale de M_2 situé sur la courbe d'EULER.

4.232 *Abaque à points alignés.* — La **Planche 29** figure un abaque à points alignés de même origine et de même type de présentation et de mode d'emploi que les abaques des Planches 26 à 28 (§ **4.13**).

Il présente l'avantage, sur ceux de la planche 30, d'être plus général et plus précis pour les faibles valeurs de λ.

Son utilisation est indiquée sur la Planche 29.

---

1. — Pour ce dernier abaque, nous avons, pour des raisons d'encombrement, porté λ^2 en ordonnées et n_{co}, $n_{c\lambda}$ en abscisses.

2. — Si la section envisagée n'est pas sujette au flambage local (section massive), porter $n_{co} = n_{ca}$.

Le passage de Strand à Euler est toujours matérialisé par la condition de sécance ou de tangence de la droite d'alignement avec la courbe centrale (courbe n_{co}) qui n'est autre ici que l'enveloppe des différentes droites de Strand.

Exemple d'application. — Tube rond de 32×1,6 en AU4G

$$\beta = \frac{R}{c} = \frac{16-0,8}{1,6} = 9,5$$

d'où

n_{co}=38 kg/mm² (valeur obtenue Planche 28 en alignant β=9,5 et n_{ca}=40).

Portons cette valeur sur la courbe centrale de la Planche 29.

a) Envisageons un élancement effectif $\lambda = 30$. On obtient directement $n_{c\lambda}$ = 31,2 kg/mm² à l'aide de la droite d'alignement λ (AU4G) — n_{co} car, cette droite ne recoupant pas la courbe n_{co} à droite du point 38, on se trouve dans le domaine de Strand (poutres courtes) ;

b) Envisageons un élancement effectif λ=90. Il y a lieu de lire $n_{c\lambda}$ sur la tangente à la courbe n_{co} issue de ce point (car la droite d'alignement recoupe la courbe n_{co} à droite de 38). On obtient

$$n_{c\lambda} = 8,5 \text{ kg/mm}^2.$$

c) Remarquons que l'élancement limite de Strand est donné dans le cas considéré par la tangente à la courbe n_{co} au point 38 qui coupe l'échelle de gauche à une ordonnée

$$\lambda \text{ (AU4G)} = 70,3$$

qui correspond bien à

$$\lambda''_0 = \pi \sqrt{\frac{7000 \cdot 2,718}{38}} = 70,3.$$

5. FLAMBAGE GÉNÉRAL DES POUTRES RECTILIGNES DE SECTIONS ÉVOLUTIVES

5.1 REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

La résolution théorique des problèmes de flambage se trouve sérieusement compliquée lorsque les sections droites changent de forme ou de dimensions le long d'une même poutre, dont nous supposerons toujours l'*axe longitudinal rectiligne*.

Le problème doit s'étudier dans *chaque cas particulier*.

Nous donnons ci-après une formule simple (approchée) et des abaques dont les *restrictions d'emploi* sont les suivantes :

a) Ces cas particuliers ne concernent que des *poutres articulées à leurs deux extrémités* (hypothèse servant de base à l'établissement des formules correspondantes). On conçoit, en effet, que la notion de « longueur équivalente », ou d' « élancement effectif » perd ici tout son sens puisqu'on ne peut pas définir d'élancement (I et S variables).

Il n'est donc pas *rigoureux* de corriger les données ci-dessous à l'aide des coefficients d'encastrement α précédemment définis (§ 2.41).

b) Les résultats auxquels on aboutit ne sont, en toute rigueur, valables qu'en *période de proportionnalité des matériaux* (comme la formule d'Euler). La contrainte de compression est, d'ailleurs, variable le long des poutres (sections variables). Si la charge critique calculée F_c donne lieu, sur une partie notable de la poutre, à un dépassement de la contrainte limite de proportionnalité n'_e on pourra *grossièrement* affecter cette charge critique d'un

abattement proportionnel à celui de Strand par rapport à Euler. On déterminera, pour ce calcul, « l'élancement apparent » de la poutre à l'aide de la section moyenne des parties travaillant plastiquement $\left(\frac{F_c}{S} > n'_e\right)$ et cet abattement pourra être lu sur les abaques *Planche* 30 (différence d'ordonnées entre la droite de Strand et la courbe d'Euler) pour l'élancement apparent considéré.

Notons que cette correction peut également s'effectuer à l'aide de la *théorie du module réduit* en calculant E_r pour la même section moyenne des parties assujetties à travailler plastiquement. Ces méthodes approchées sont d'ailleurs défavorables.

5.2 POUTRES DONT LES SECTIONS ÉVOLUENT PROGRESSIVEMENT ET SYMETRIQUEMENT.

Ce cas est schématisé figure 14 par une barre dont la forme varie *symétriquement* par rapport au plan transversal médian xx'.

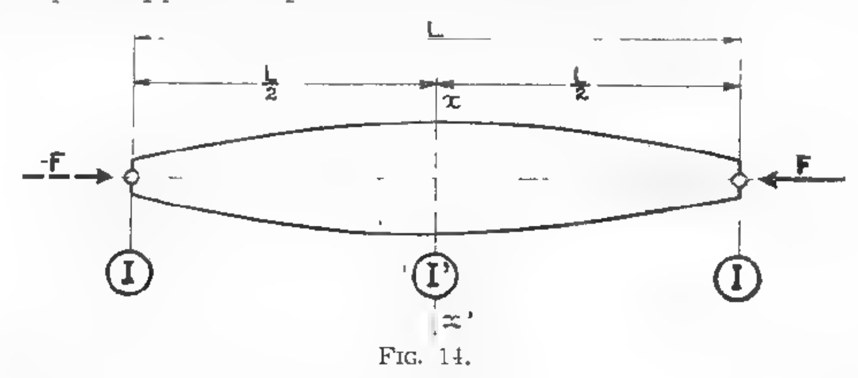


Fig. 14.

Désignons par I le moment d'inertie minimum des sections extrêmes et par I' le moment d'inertie minimum de la section centrale.

En étudiant diverses « variations types » de l'inertie minimum des sections intermédiaires, on établit que la *charge critique de flambage* est donnée par la *formule moyenne* ci-dessous [1]

$$F_c = \frac{8\ EI'}{L^2} + \frac{1{,}92\ EI}{L^2}.$$

Cette formule peut être utilisée avec une bonne approximation, sous réserve des restrictions ci-dessus, pour toutes les allures de variation d'inertie à condition qu'elles soient progressives et symétriques.

Remarque. — Si l'on fait I = I' (inertie constante), on obtient

$$F_c = \frac{9{,}92\ EI}{L^2} \approx \frac{\pi^2\ EI}{L^2}$$

5.3 POUTRES RENFORCEES SUR UNE PARTIE DE LEUR LONGUEUR.

Ce cas se rencontre assez fréquemment, dans la pratique, pour des pièces s'étant révélées insuffisantes et qui ont été renforcées sans modifier leurs attaches.

C'est également le cas de certaines barres longues de structures triangulées aéronautiques pour lesquelles la solution d'un renfort local de flambage peut aussi devenir celle de poids minimum.

1. — *Référence :* Leçons sur la Résistance des matériaux, par A. Caquot (cours E.N.S.Aé).

Nous donnons **Planche 31** deux abaques permettant le calcul de la charge critique de flambage dans les deux cas suivants :

poutres longues, renforcées en leur milieu : abaque n° 1 ;
poutres longues, renforcées à une extrémité : abaque n° 2.

La charge critique de flambage s'exprime en fonction de la charge d'Euler de la poutre non renforcée.

La comparaison des deux diagrammes montre qu'un renfort central est beaucoup plus efficace qu'un renfort extrême.

Nous rappelons que les restrictions d'emploi énoncées au paragraphe **5.1** s'appliquent à ces abaques.

Si la charge de flambage F_c donne lieu à des contraintes supérieures à n'_e dans les parties non renforcées, une indication approximative de la résistance pourra être donnée en appliquant directement le coefficient correcteur μ des abaques à la charge critique de la poutre non renforcée déduite des formules de Strand ou de Johnson.

Application numérique. — Tube rond en acier 20CD4, D=40, e=1,5, L=1500 mm (entre articulations) renforcé par un manchon central tubulaire réalisé par une tôle roulée d'épaisseur e'=2 mm soudée sur le tube et de longueur l=450 mm.

Caractérisques du tube non renforcé :

$$I=33675 \text{ mm}^4 ; \qquad \text{charge d'Euler : } \frac{\pi^2 \; EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 20000 \cdot 33675}{1500^2} = 2960 \text{ kg.}$$

Caractéristiques du tube renforcé : diamètre 44 mm, épaisseur 3,5 mm.

$$I_1 = 92100 \text{ mm}^4.$$

Paramètres du renfort :

$$\frac{l}{L} = \frac{450}{1500} = 0{,}3 \quad , \quad \frac{I_1}{I} = 2{,}73$$

d'où

$$\mu = 1{,}52 \text{ (abaque n° 1).}$$

Charge de flambage de la poutre renforcée :

$$1{,}52 \times 2960 = 4500 \text{ kg.}$$

Contrainte de compression correspondante des extrémités (S=182 mm²)

$$n_c = \frac{4500}{182} = 24{,}7 \text{ kg/mm}^2.$$

Cette contrainte est inférieure à la limite de proportionnalité de l'acier considéré qui a pour valeur n'_e = 30 kg/mm².

Le résultat ci-dessus est donc valable sans correction.

6. FLAMBAGE DES POUTRES DROITES COMPRIMÉES ET FLÉCHIES

6.1 GÉNÉRALITÉS.

6.11 Combinaison de la flexion et des efforts longitudinaux. — Au cours de l'étude de la flexion composée des poutres (chap. IX, § **3.22**) nous avons admis que la superposition des contraintes normales dues au moment fléchissant M et à l'effort normal N s'effectuait simplement d'une façon *algébrique* pour chaque élément de section droite d'une poutre. *Cette simple superposition n'est, en réalité, acceptable que si les déformations de flexion de la poutre sont très faibles, ou si l'effort normal est peu élevé.*

En effet, considérons (fig. 15) une poutre rectiligne sur deux appuis A

et B, soumise à des charges transversales de flexion produisant à elles seules un moment fléchissant M et une ligne élastique déformee ACB de flèche y appréciable.

Superposons à ces charges un effort de compression F. Sa ligne d'action possédant un certain bras de levier par rapport à la poutre déformée, l'effort F produira un *moment fléchissant supplémentaire* μ dont la valeur en chaque point sera déterminée par la *nouvelle position d'équilibre* de la poutre (position AC'B par exemple de flèche $y'>y$).

Le moment fléchissant final deviendra donc

$$M' = M + \mu > M$$

et c'est ce « *moment amplifié* » qui doit entrer en ligne de compte pour composer les contraintes correspondantes avec celles dues à F.

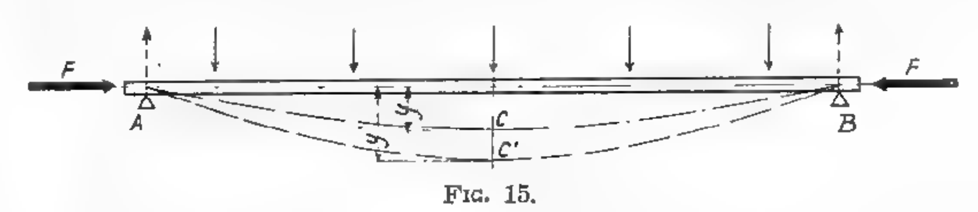


Fig. 15.

Si l'effort normal F était exercé en *traction* au lieu de l'être en compression, l'effet produit sur les flèches et les moments serait inverse (diminution de y et de M).

Nous voyons donc que, dans le calcul des poutres chargées transversalement et longitudinalement, *les déformations de ces poutres devraient en toute rigueur, intervenir pour le calcul même des moments fléchissants.*

6.12 Influence de la flexion sur le flambage. — On ne tient, généralement, pas compte des effets correcteurs ci-dessus pour le calcul, en flexion composée, des éléments courts ou peu déformables, mais il est nécessaire d'en tenir compte pour des éléments risquant de périr par *flambage*.

La théorie générale de ce phénomène permet de faire ressortir la conclusion suivante :

Il n'existe plus en flexion-compression de charge critique de flambage proprement dite (c'est-à-dire de charge donnant lieu à une infinité de positions d'équilibre, voir paragraphe 2.21). La poutre périt, dans une position d'équilibre unique, quand le « moment fléchissant amplifié » est tel qu'il engendre la rupture.

Nous n'aurons donc plus à parler ci-après de charges ou contraintes *critiques* de flambage, mais seulement de *contraintes résultantes* qui seront à comparer avec les contraintes admissibles pour le matériau considéré.

6.13 Remarques. — L'étude de la flexion-compression donnant lieu à des développements mathématiques compliqués nous nous limiterons ci dessous à exposer les résultats simples auxquels on aboutit dans deux cas particuliers de variation du moment M.

Il est à signaler que ces résultats, qui sont obtenus par des *équations d'équilibre élastique*, ne sont valables avec rigueur qu'en période de proportionnalité. C'est par convention que l'on compare les contraintes qu'ils feront apparaître avec les contraintes admissibles à la rupture.

6.2 CAS D'UN MOMENT M CONSTANT.

6.21 Formules. — Ce cas est pratiquement réalisé quand la force de

compression F agit *parallèlement à l'axe longitudinal* de la poutre avec une certaine *excentricité d* (fig. 16) [1]. On a, en effet (avant déformation)

$$M = Fd = \text{constante}.$$

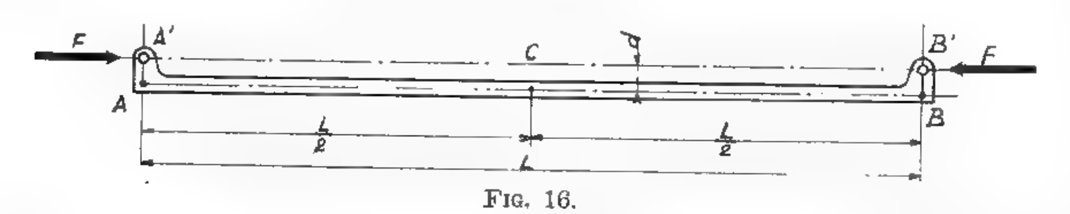


FIG. 16.

On démontre que le *moment fléchissant amplifié* M' a pour *valeur maximum* (au milieu C de la poutre) [2]

$$M'_{max} = \frac{M}{\cos u} \quad \text{soit} \quad M'_{max} = \frac{Fd}{\cos u}$$

avec : $u = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{F}{F_c}}$ (en radians) ; soit : $u = 90\sqrt{\frac{F}{F_c}}$ (en degrés).

Dans cette expression, F_c figure la *charge critique d'Euler* de la poutre articulée à ses extrémités réelles A et B (sans excentricité)

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

Le terme cos *u* s'appelle le *cosinus amplificateur*. L'expression de la *contrainte résultante maximum* de la poutre est donc

$$n_r = \frac{F}{S} + \frac{M'_{max}}{\left(\frac{I}{V}\right)} \quad \text{soit} \quad n_r = F\left(\frac{1}{S} + \frac{d}{\left(\frac{I}{V}\right)\cos u}\right).$$

6.22 Remarques.

6.221 Si l'on fait $F = F_c$ dans l'expression de *u* on trouve

$$u = \frac{\pi}{2} \quad \text{d'où} \quad \cos u = 0 \quad \text{et} \quad M' = \infty.$$

On voit donc que *la charge critique F_c constitue une limite jamais atteinte pour une poutre chargée excentriquement*, même si le décalage *d* est extrêmement faible. Cette conclusion explique l'observation concernant le mode de flambage pratique des poutres (§ **2.21**).

6.222 *La flèche maximum d'équilibre* de la poutre, qui a lieu en son milieu C, a pour expression

$$y'_{max} = \frac{M L^2}{8 EI}\,\frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u}.$$

Le terme $\frac{ML^2}{8EI}$ figure la flèche y_{max} de la poutre uniquement soumise au moment M=constante (flexion circulaire). Cette flèche se trouve également

1. — C'est, par exemple, le cas d'une barre d'un système triangulé, dont les extrémités sont également décalées par rapport aux *nœuds théoriques* (Voir application ci-dessous).

2. — *Référence :* Leçons sur la Résistance des matériaux, par J. GÉRARDIN.

amplifiée par l'effort normal de compression, car le terme $\frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u}$ est toujours supérieur à 1.

6.23 **Application numérique.** — Soit une *barre d'un système triangulé* présentant les caractéristiques suivantes :

Tube acier 20CD4 ($E=20000$ kg/mm²) ; $D=40$; $e=1{,}5$; $S=182$ mm² ;

$I=33675$ mm⁴ ; $\frac{I}{V}=1684$ mm³ ; $L=1000$ mm (entre articulations).

Charge critique sans excentricité

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 6680 \text{ kg.}, \quad \text{soit} \quad n_c = \frac{F_c}{S} = 36{,}7 \text{ kg/mm}^2.$$

Recherchons quelle est la *valeur maximum de l'excentricité admissible* pour une charge de compression $F=5000$ kg, en se fixant une contrainte maximum $n_r=60$ kg/mm².

Le cosinus amplificateur a pour valeur

$$\cos u = \cos\left(90^\circ \sqrt{\frac{5000}{6680}}\right) = \cos 77^\circ 50' = 0{,}211.$$

D'après l'expression de n_r ci-dessus, l'excentricité max. d doit être telle que

$$60 = 5000\left(\frac{1}{182} + \frac{d}{1684 \times 0{,}211}\right) = 27{,}5 + 14{,}1\, d$$

d'où

$$d = \frac{60-27{,}5}{14{,}1} = 2{,}3 \text{ mm.}$$

Cet exemple montre qu'il suffit d'une excentricité très faible pour rompre une barre comprimée. En effet, un décalage ne représentant que 5,8 % du diamètre du tube ci-dessus a suffi pour lui faire perdre une marge de sécurité de

$$100\left(\frac{F_c - F}{F}\right) = 33{,}6 \%.$$

Il y a donc toujours lieu, en pratique, de chercher à assurer la convergence rigoureuse aux nœuds théoriques, des barres des systèmes triangulés, ce que nous avions déjà indiqué au chapitre VII.

6.3 CAS PARTICULIER DE VARIATION DU MOMENT M.

6.31 Conditions d'application. — Ainsi que nous l'avons énoncé plus haut, chaque cas particulier de variation de M doit donner lieu à des calculs

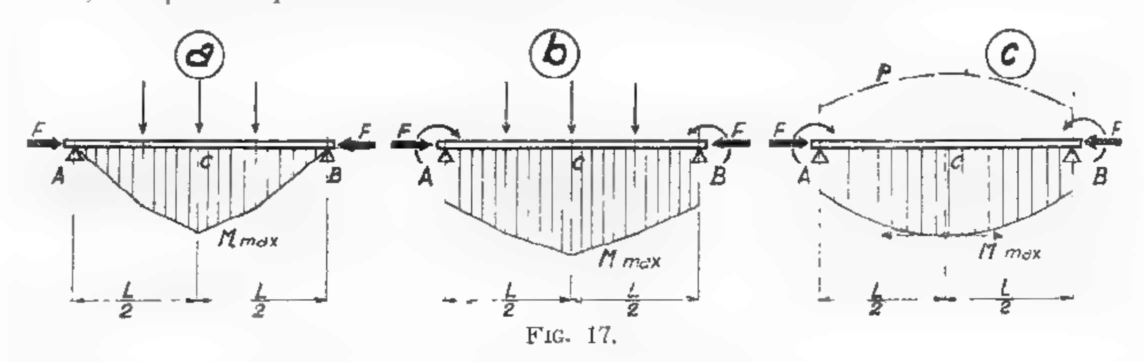


FIG. 17.

théoriques distincts. Il se trouve cependant que, dans le *cas particulier* où le moment M présente un maximum au milieu de la poutre et varie *symétriquement* de part et d'autre de ce maximum on arrive aux *résultats approchés* simples ci-dessous.

Remarquons d'abord que ce cas particulier comprend, par exemple, les diverses allures de M (moments de flexion sans tenir compte de l'action de F) représentée figure 17, soit [1] :

— Figures 17 *a* et 17 *b*, charges transversales concentrées et moments extrêmes symétriques.

— Figure 17 *c*, charge transversale répartie et moments extrêmes symétriques.

6.32 Formules. — En étudiant diverses « variations types » de M on établit, théoriquement, que l'influence de F sur la valeur M max. peut se traduire en faisant apparaître un « *coefficient amplificateur moyen* » ayant pour valeur [2]

$$\boxed{k = 1 + 1{,}03\ \frac{F}{F_c - F}}$$

avec $F_c = \dfrac{\pi^2\ EI}{L^2}$ = charge d'Euler de la poutre entre articulations A et B.

Le *moment fléchissant maximum amplifié* (au milieu de la poutre) a donc pour valeur

$$M'_{max} = k\ M_{max}$$

et la *contrainte résultante maximum amplifiée* (au milieu de la poutre)

$$\boxed{n_r = \frac{F}{S} + k\ \frac{M_{max}}{\left(\frac{I}{V}\right)}\ .}$$

6.33 Remarque. — Il arrive fréquemment que l'on ait à étudier l'influence de moments M de variation *linéaire* telle que sur la figure 18 *a*. C'est, par exemple, le cas d'une barre d'un système triangulé dont une seule extrémité A' est excentrée par rapport au nœud théorique A (indications schématiques de la figure 18 *b*).

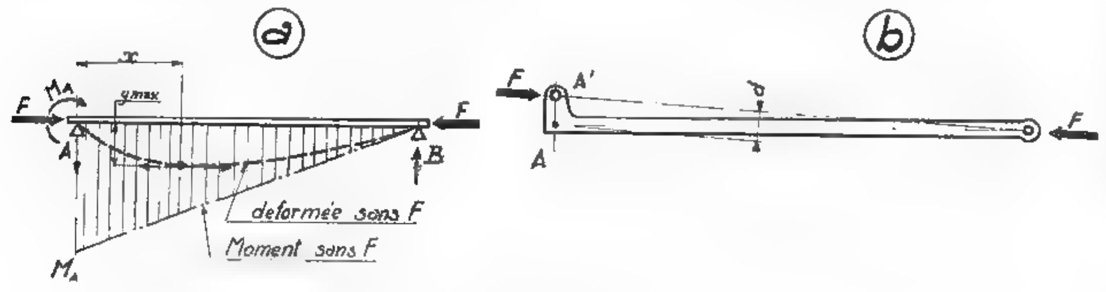


Fig. 18

On obtiendra alors une *valeur approchée* de n_r en remplaçant, dans la formule ci-dessus, la valeur M max. par celle du moment M existant *au niveau de la flèche y maximum*, c'est-à-dire sensiblement à $x = 0{,}4$ L de A. On pourra donc remplacer M max. par

$$0{,}6\ M_A = 0{,}6\ F\ d.$$

1. — La condition de symétrie est nécessaire pour que l'on obtienne au même point M max. et *y* max. Voir remarque § 6.33.

2. — *Référence :* Leçon sur la Résistance des matériaux, par A. Caquot (cours E.N.S.Aé).

On présente, parfois, cette formule sous la forme sensiblement équivalente (en assimilant 1,03 à 1) : $k = \dfrac{F_c}{F_c - F}$ et on la désigne souvent, sous cette forme, par « formule de Perry ».

6.34 Application numérique. — Envisageons, de nouveau, la barre étudiée au paragraphe 6.23, à laquelle nous supposerons appliquée sans excentricité une charge F=5000 kg (fig. 19).

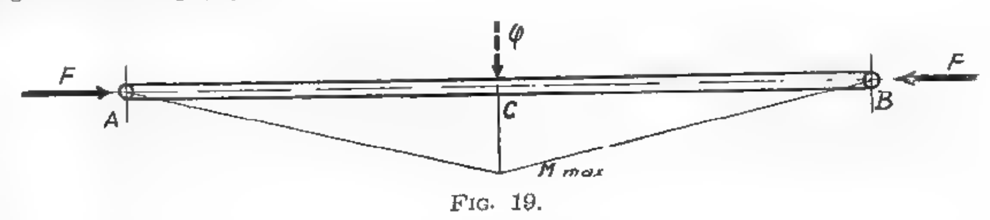


FIG. 19.

Déterminons la *charge transversale concentrée* φ *admissible au milieu* C *de* cette barre, pour obtenir n_r=60 kg/mm².

Cette charge φ donnera en C :

$$M_{max} = \frac{L\varphi}{4} = 250\ \varphi \text{ (en mmkg).}$$

D'autre part,
$$k = 1 + 1{,}03\ \frac{5000}{6680 - 5000} = 4{,}07.$$

On doit donc avoir :

$$60 = \frac{5000}{182} + 4{,}07\ \frac{250\ \varphi}{1684} = 27{,}5 + 0{,}605\ \varphi$$

d'où
$$\varphi = \frac{60 - 27{,}5}{0{,}605} = 54 \text{ kg.}$$

Cet exemple suffit à montrer que *les barres comprimées des systèmes triangulés admettent des charges transversales très faibles, en supplément à leurs charges axiales.*

On devra donc, dans ces systèmes, s'efforcer de concentrer directement aux nœuds toutes les charges transversales importantes (attache d'un accessoire d'aménagement important, par exemple).

7. NOTIONS SUR LE FLAMBAGE DE TORSION

7.0 GENERALITES.

Si l'on soumet à une compression axiale une poutre présentant une faible rigidité en torsion, on constate qu'elle peut périr par un phénomène d'instabilité entraînant une *rotation en torsion* des sections droites, à l'exclusion de tout fléchissement général. Ce phénomène est connu sous le nom de *flambage de torsion*. Il concerne essentiellement les *poutres de sections minces ouvertes*, profilés ouverts par exemple, qui (comme nous l'avons vu au chapitre XIII, paragraphe **5.4**) présentent une faible rigidité en torsion, principalement si le gauchissement de leurs sections droites n'est pas empêché.

Nous nous placerons d'abord dans cette hypothèse de *gauchissement libre* pour établir les formules de flambage de torsion. Nous examinerons ensuite succinctement l'influence d'un obstacle au gauchissement des sections (*flambage en flexion-torsion*).

7.1 CHARGE CRITIQUE DE FLAMBAGE DE TORSION.

Soit un élément de hauteur Δl d'un profilé ouvert soumis à une force de compression de bout F parfaitement répartie le long des sections droites terminales (fig. 20 *a*).

Cet élément possède un axe de torsion zz' : lieu des centres des cisaillements des sections droites (chap. XIII. § **1.5**).

Imaginons qu'une rotation de torsion (autour de zz') se produise et désignons par $\Delta\theta$ l'angle de rotation des sections terminales de l'élément.

Nous savons que cette déformation est liée au moment de torsion M_t qui lui a donné naissance par la relation

$$\Delta\theta = \frac{M_t}{GJ} \cdot \Delta l$$

J étant la *constante de rigidité en torsion* des sections droites (torsion gauche libre) (voir chap. XIII, § 5.2).

Inversement le profilé *réagit élastiquement* à la déformation $\Delta\theta$ avec un moment de torsion

$$M_t = GJ\,\frac{\Delta\theta}{\Delta l} \qquad \text{soit} \qquad M_t = GJ\theta'$$

en désignant par $\theta' = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta l}$ *l'angle de torsion de l'unité de longueur* (c'est-à-dire la *dérivée* de θ par rapport à la dimension longitudinale). Considérons une « colonne longitudinale » AB de section ΔS et située à une distance r de l'axe de torsion (fig. 20 *a* et 20 *b*). Au cours de la rotation de torsion son extrémité A a subi, par rapport à l'extrémité B, supposée fixe, un déplacement transversal

$$AA' = r\ \Delta\theta.$$

La figure 20 *c* représente cette colonne isolée après déformation, le déplacement AA′ étant contenu dans le plan de la figure. L'angle $\Delta\alpha$ dont s'est inclinée la colonne est défini par

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha = \frac{AA'}{\Delta l} = r\,\frac{\Delta\theta}{\Delta l} = r\,\theta'.$$

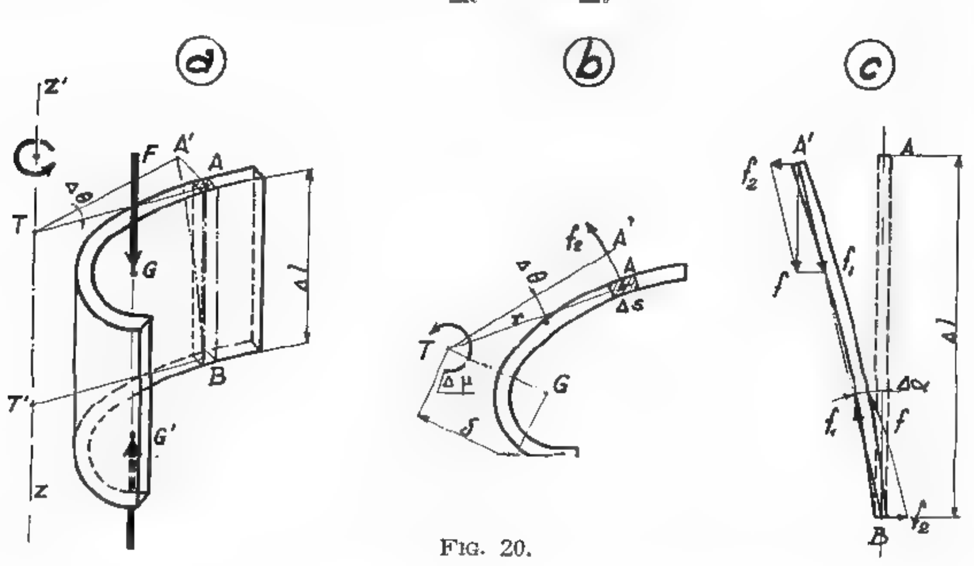


Fig. 20.

Or, par suite de la charge de bout F, cette colonne reçoit en A′ et B deux forces élémentaires opposées parallèles à F et égales, en valeur absolue, à

$$f = \frac{F}{S}\,\Delta S \qquad \text{avec S = section droite du profilé.}$$

Les composantes f_1 de ces forces se détruisent mais il reste dans chaque section droite terminale des composantes

$$f_2 = f\ \operatorname{tg}\Delta\alpha = \frac{F}{S}\ \theta' r\ \Delta S.$$

Ces composantes engendrent, par rapport à l'axe de torsion, deux moments élémentaires en équilibre

$$\Delta\mu = f_2 \ r = \frac{F}{S} \theta' \ r^2 \ \Delta S.$$

L'ensemble des colonnes constituant l'élément, c'est-à-dire l'ensemble des éléments ΔS, engendre donc un moment de torsion

$$\mu = \Sigma_i \ \Delta\mu = \frac{F}{S} \ \theta' \ \Sigma \ r^2 \ \Delta S.$$

Or, $\Sigma r^2 \Delta S$ représente le *moment d'inertie polaire de la section droite par rapport à l'axe de torsion*, c'est-à-dire par rapport au centre de cisaillement (ou centre de torsion) de cette section. Désignons-le par I_T. On a donc

$$\mu = \frac{F}{S} \ \theta' \ I_T = F \ \theta' \ \frac{I_T}{S} = F \ \theta' \ \rho_T^2$$

en désignant par ρ_T le *rayon de giration polaire* autour de l'axe de torsion. Cette valeur représente le *couple de torsion dû à la charge* F quand l'élément a acquis une rotation θ' par unité de longueur. Ce couple tend à accroître l'angle de torsion.

Comparons-le avec le *couple de redressement élastique* M_t évalué cidessus :

Si $\mu < M_t$ le profilé se redresse élastiquement.
Si $\mu > M_t$ la rotation s'accroît indéfiniment sous l'action de F.
Si $\mu = M_t$ il existe une infinité de positions d'équilibre en torsion sous l'action de F.

Cette valeur particulière de μ définit donc un *état critique de flambage*. La charge F qui lui correspond est telle que

$$F \ \theta' \ \rho_T^2 = GJ \ \theta'.$$

Nous conviendrons de désigner cette valeur particulière par F'_c

$$\boxed{F'_c = \frac{GJ}{\rho_T^2}}$$

expression de la « *charge critique de flambage en torsion* ».

A cette charge correspond une « *contrainte critique de flambage en torsion* »

$$n'_{co} = \frac{F'_c}{S} = \frac{GJ}{\rho_T^2 \ S}$$

soit

$$\boxed{n'_{co} = \frac{GJ}{I_T}.}$$

7.2 REMARQUES.

7.21 Rappelons que I_T ou ρ_T sont relatifs à *l'axe de torsion*, c'est-à-dire au *centre de cisaillement* de la section [1]. Si l'on connaît le moment d'inertie polaire I_0 par rapport au centre de gravité G de la section (somme de deux moments d'inertie autour d'axes rectangulaires issus de G), on a (chap. II, § **8.6**)

$$I_T = I_0 + S \ \delta^2 \qquad \text{et} \qquad \rho^2_T = \rho^2_0 + \delta^2$$

δ désignant la distance GT (fig. **20** *b*).

1. — Voir, à ce sujet, les positions du centre de cisaillement données *Planche* 20.

7.22 Les formules ci-dessus ne sont valables que *si la torsion est libre* (gauchissement libre). Voir ci-après paragraphe **7.4**.

7.23 Elles ne sont également valables qu'en *période de proportionnalité* (équilibre élastique), c'est-à-dire pour $n'_{co}<n'_e$.

7.24 L'examen des formules ci-dessus montre que *le flambage de torsion libre est indépendant de la longueur des poutres et donc de leur élancement.*

Il ne dépend que des *caractéristiques des sections droites* et il s'apparente ainsi au flambage local.

Il est également indépendant de *l'état d'emploi* des matériaux, ainsi que le flambage d'Euler.

7.25 Il est aisé de voir que *le flambage de torsion n'est pas à craindre pour les sections fermées.*

En effet, envisageons, par exemple, une section circulaire (creuse ou pleine). On a, dans ce cas

$$J = I_T = I_0 \quad \text{(chap. XIII)}$$

d'où

$$n'_{co} = G.$$

La contrainte critique théorique serait donc égale au module d'élasticité transversal (soit $n'_{co} = 2700$ kg/mm² dans le cas du duralumin). L'application ci-dessous montre qu'il n'en est plus de même pour les sections ouvertes.

7.3 APPLICATION NUMÉRIQUE.

Soit à déterminer les caractéristiques au flambage de torsion d'un profilé en U en duralumin AU4G (G=2700 kg/mm²) de dimensions standard : 50×32×2,5 (fig. 21).

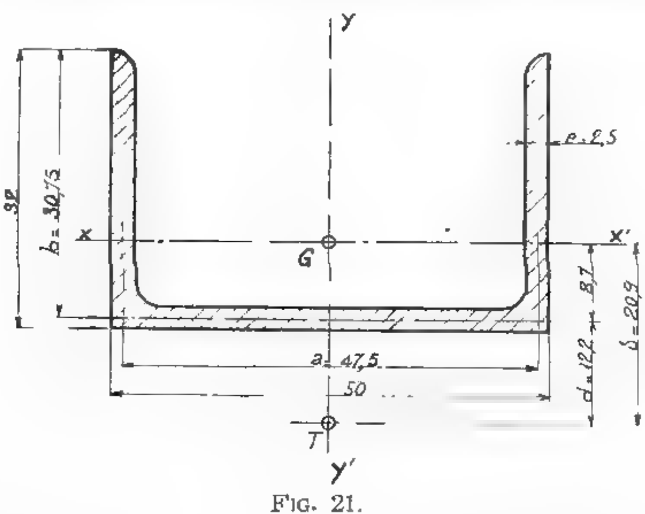


Fig. 21.

Caractéristiques :

$$S = 277 \text{ mm}^2 ; \quad I_x = 28080 \text{ mm}^4 ; \quad I_y = 109300 \text{ mm}^4$$

d'où

$$I_0 = I_x + I_y = 137380 \text{ mm}^4.$$

Décalage d de T (Planche 20)

$$d = \frac{3\ b}{6 + \frac{h}{b}} = \frac{3 \cdot 30,75}{6 + \frac{47,5}{30,75}} = 12,2 \text{ mm}$$

d'où

$$\delta = 12,2 + 8,7 = 20,9 \text{ mm}$$

et

$$I_T = I_0 + S\ \delta^2 = 137380 + 277 \cdot \overline{20,9}^2 = 258500 \text{ mm}^4.$$

Constante de rigidité en torsion libre (chap. XIII, § 5.2)

$$J = \frac{e^3}{3}(h+2b) = \frac{2{,}5^3}{3}(47{,}5+61{,}5) = 568 \text{ mm}^4.$$

Contrainte critique de flambage de torsion (torsion libre)

$$n'_{co} = \frac{GJ}{I_T} = \frac{2700 \cdot 568}{258500} = \mathbf{5{,}93 \ kg/mm^2}.$$

On voit que cette contrainte est très faible. Elle correspond à la contrainte critique de flexion (flambage d'Euler) pour un élancement λ tel que

$$n_{c\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = 5{,}93 \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = 108$$

c'est-à-dire pour une longueur entre articulations

$$L = \lambda\rho_x = 108\sqrt{\frac{I_x}{S}} = 1090 \text{ mm}.$$

Au-dessous de cette longueur le flambage de torsion prédomine.

Elle est également très inférieure au taux n_{co} de flambage local qui a pour valeur, d'après la formule empirique du paragraphe 4.14.

$$n_{co} = \frac{40}{1+8{,}5\,\dfrac{30{,}75 \cdot 40}{2{,}5 \cdot 7000}} = 25 \text{ kg/mm}^2.$$

7.4 FLAMBAGE EN TORSION-FLEXION.

En réalité, il y a lieu d'appliquer aux théories ci-dessus les mêmes conditions restrictives d'utilisation que celles énoncées au chapitre XIII, paragraphe 5.0, lors de l'étude de la torsion libre des profilés ouverts.

Les « *conditions aux limites* » des poutres interdisent en fait, la plupart du temps, le gauchissement des sections extrêmes.

Le flambage se produit alors suivant un *phénomène complexe de flexion et de torsion* et la charge de flambage correspondante est *supérieure* à celle de torsion libre. A la valeur n'_{co} ci-dessus, indépendante de la longueur de la poutre, s'ajoute un terme correctif fonction du carré de cette longueur.

Le problème se traite d'une façon analogue à celui de la torsion gauche non libre (chap. XIII, § 6.3). Cette étude, qui doit se traiter pour chaque cas particulier de section, ne peut donner lieu à des résultats généraux simples. Contentons-nous d'indiquer que, dans le cas du profilé envisagé au paragraphe précédent, on obtient un accroissement de résistance au flambage variant de 4,5 % à 50 % quand l'élancement varie de 100 à 30 (ces accroissements étant relatifs aux n'_{co} calculé ci-dessus) [1].

Il n'en subsiste pas moins, dans cet exemple, que le flambage de torsion restera prédominant pour les élancements compris entre ces limites.

7.5 CONCLUSION.

Il y a donc lieu d'utiliser avec prudence les profilés ouverts pour travailler en compression. Ce défaut s'ajoute à ceux déjà signalés aux chapitres XI et XIII au sujet de l'utilisation de ces profilés en flexion ou en torsion, leur cause commune résidant dans une *faible rigidité en torsion.*

C'est pourquoi l'on n'utilise guère ces profilés qu'en les associant longitudinalement à d'autres éléments qui interdisent pratiquement leur possibilité de « déversement ».

1. — *Référence :* Leçons sur la Résistance des matériaux, par J. GÉRARDIN.

C'est, par exemple, le cas des assemblages représentés figure 22.

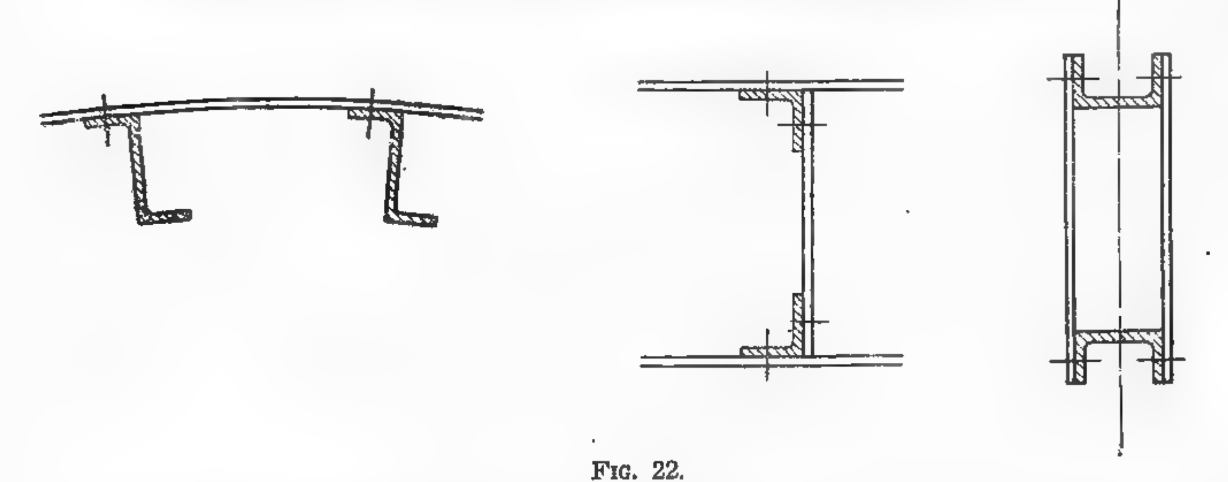


FIG. 22.

Il serait grossièrement inexact d'appliquer les théories ci-dessus aux profilés qui les composent, car ces théories supposent toujours, ainsi que nous l'avons vu, les profilés isolés.

CHAPITRE XVII

CALCUL DES PLAQUES CHARGÉES TRANSVERSALEMENT

1. GÉNÉRALITÉS

1.1 DEFINITION DES PLAQUES.

Toutes les théories envisagées jusqu'ici ne concernaient qu'une catégorie particulière de pièces prismatiques : celle des *poutres* (fig. 1 *a*).

Nous avons vu au chapitre V, paragraphe **3.213**, que la particularité de ces poutres était de posséder *une dimension très grande* (dimension longitudinale L) *relativement aux deux autres* (dimensions transversales *l* et *h* mesurant les sections droites). Ces dimensions tranversales étaient, au surplus, *libres ;* ce qui nous a permis de négliger l'influence de leurs contractions ou dilatations dues à « l'effet de Poisson » [1] (chap. V, § **4.4**).

On désigne par *plaque* un corps prismatique présentant une dimension très faible relativement aux deux autres (fig. 1 *b*). Cette faible dimension s'appelle l'*épaisseur e* de la plaque. Les deux autres (*a* et *b*) caractérisent la *surface* de la plaque, cette surface pouvant être *plane* (plaques planes) ou *courbe* (plaques courbes ou galbées).

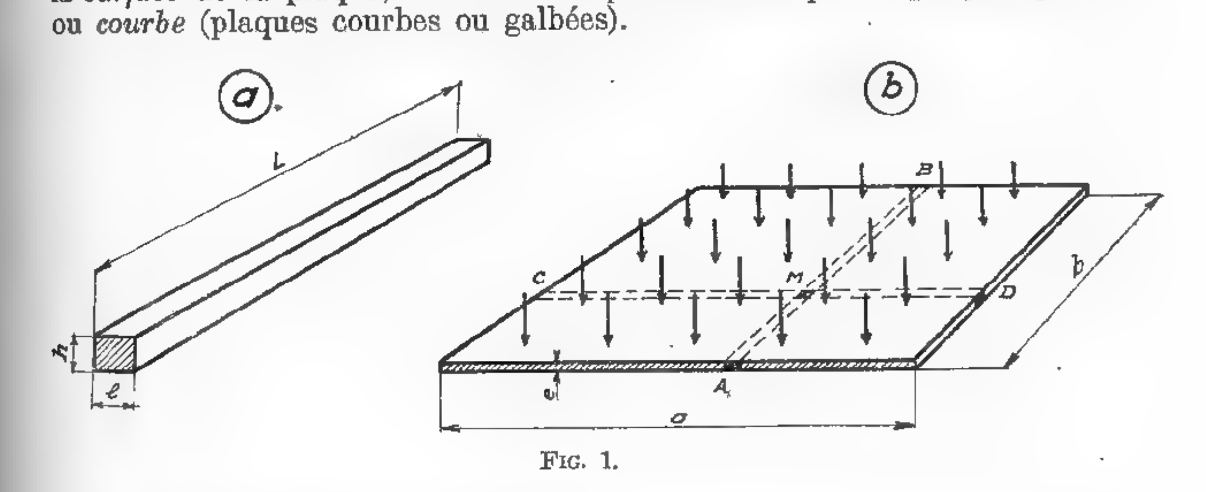


FIG. 1.

1.2 SOLLICITATIONS ENVISAGÉES.

Le présent chapitre est réservé au calcul des *plaques chargées transversalement*, c'est-à-dire à celles soumises à des charges qui agissent *normale-*

1. — Ces variations élastiques des dimensions des sections étaient d'ailleurs très faibles par suite de la faiblesse de leurs dimensions d'origine.

ment à leurs surfaces [1] (fig. 1 *b*). Les théories qui s'y rapportent sont souvent désignées par *flexion des plaques*, par analogie avec la flexion des poutres qui se produit sous des sollicitations orientées d'une façon analogue par rapport à la dimension longitudinale.

Nous n'envisagerons, ci-après, que le seul cas particulier de *charges uniformément réparties* sur la surface de ces plaques. Ces charges se traduiront donc par une *pression normale uniforme p* que nous exprimerons en kg/mm².

Il convient de remarquer que ce cas particulier est pratiquement le plus usuel. On le rencontre notamment, en construction aéronautique, pour les fonds de réservoirs, fonds de coques, parois de cabines étanches, etc... C'est, au surplus, le seul cas qui donne lieu à des résultats théoriques pouvant être traduits sous une forme simple [2].

1.3 PROCEDES GENERAUX DE CALCUL.

On conçoit aisément que la simplification rappelée ci-dessus concernant les variations des dimensions transversales, ne puisse plus être acceptable dans le cas des plaques où l'une de ces dimensions est grande. Les plaques sont, au surplus, généralement assujetties à recevoir des réactions sur tout leur pourtour. On ne peut donc les étudier qu'en les ramenant à une juxtaposition de poutres entrecroisées car la flèche d'un point M (fig. 1 *b*) dépend à la fois de celle de la poutre AB et de celle de la poutre CD par exemple.

Ces considérations expliquent que la théorie de la flexion des plaques soit beaucoup plus complexe que celle des poutres, bien qu'elle se conduise à l'aide de méthodes générales comparables.

Par suite de la complexité mathématique de cette théorie, nous serons conduits à donner seulement ci-après des *résultats pratiques* où les différents paramètres seront englobés dans des *coefficients* dépendant de la forme des surfaces des plaques.

1.4 CLASSIFICATION DES PLAQUES.

En supplément à la distinction entre les plaques *planes* ou *courbes*, il y a lieu, pour les études à suivre, de considérer deux grandes catégories de plaques différant entre elles par leur *mode de travail principal*, c'est-à-dire par la façon dont elles *résistent* intérieurement aux charges qui leurs sont appliquées.

1.41 Plaques résistant en flexion. — Nous groupons sous cette désignation les plaques qui se comportent comme une juxtaposition de poutres fléchies dont les variations de longueur ne sont pas contrariées par leurs points d'appuis.

En d'autres termes ces plaques peuvent *glisser sur leurs encadrements* au cours de leurs déformations de flexion.

Ces encadrements peuvent réagir :

— Soit comme des *appuis simples* (fig. 2 *a*). Nous dirons alors que ces plaques sont *appuyées* ;

— Soit comme des *encastrements* présentant un degré de liberté en translation dans le plan de la plaque (fig. 2 *b*). Nous dirons dans ce cas que ces plaques sont *encastrées*.

1. — La résistance des plaques sous l'action d'efforts orientés *dans le sens de leurs grandes dimensions* sera étudié au chapitre XIX. Cette étude sera conduite sous l'angle particulier du calcul des revêtements métalliques minces participant à la résistance générale de la structure à laquelle ils appartiennent.

2. — Les formulaires usuels donnent des formules (essentiellement empiriques) relatives aux plaques soumises à des forces concentrées. Nous ne les reproduisons pas, leur exactitude étant généralement contestable.

Il est aisé de concevoir que ces plaques doivent posséder une épaisseur assez forte pour résister à des charges appréciables. C'est pourquoi on les désigne encore par *plaques épaisses*, par opposition à la catégorie suivante.

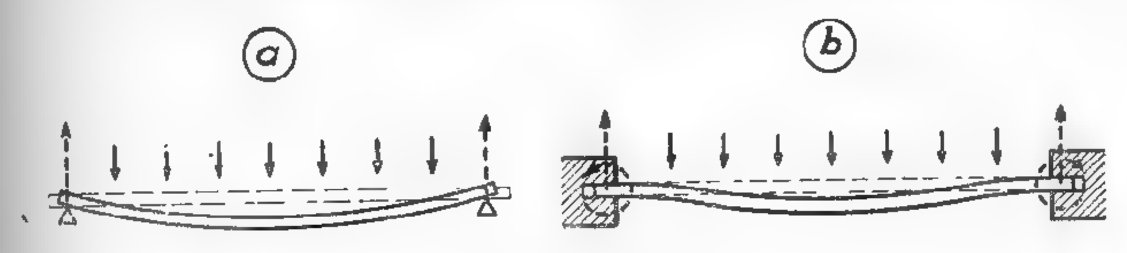


Fig. 2.

C'est cette catégorie de plaques que l'on considère habituellement (et exclusivement) dans la plupart des formulaires industriels courants. Elle concerne, par exemple, les plaques de fermeture de regards, les dalles, les planchers, etc... Leur utilisation est assez peu répandue en construction aéronautique.

1.42 **Plaques résistant principalement en traction sur leurs encadrements.** — Si une plaque est reliée à son encadrement de telle façon qu'au moins deux de ses côtés opposés ne puissent se rapprocher librement l'un par rapport à l'autre, son mode de travail diffère essentiellement de celui des plaques ci-dessus. Les encadrements fournissent, en supplément aux efforts du cas ci-dessus, des réactions orientées dans le plan de la plaque (voir fig. 3 *a* : plaques appuyées, et fig. 3 *b* : plaques encastrées).

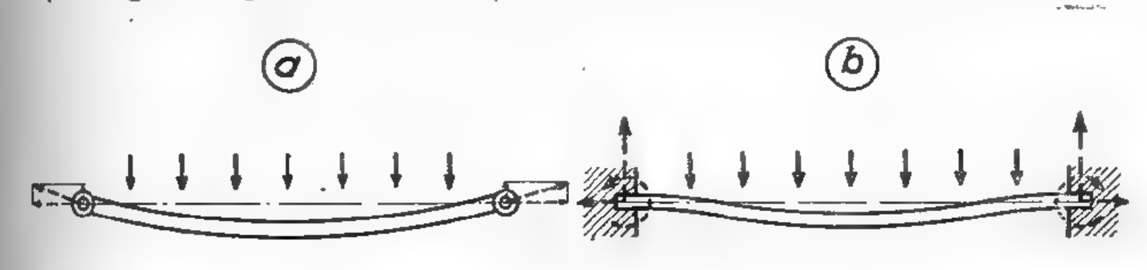


Fig. 3.

Ces réactions produisent des tensions internes de *traction* qui *stabilisent* la plaque et lui permettent d'acquérir, à épaisseur égale, une *résistance beaucoup plus élevée* que celles du cas précédent.

Le *cas limite* est fourni par une plaque extrêmement mince dont la rigidité de flexion peut être considérée comme nulle. C'est, par exemple, le cas d'un *entoilage*. La théorie qui correspond à ce cas s'appelle : *Théorie des membranes*.

Pratiquement, la plupart des éléments minces utilisés en construction aéronautique tendent vers cette limite. C'est, par exemple, le cas des revêtements minces d'ailes ou de fuselages soumis à des pressions aérodynamiques extérieures ou à des pressions statiques intérieures (fuselages étanches). Les réactions produisant de la traction sont dues, dans ce cas, à la *continuité* de ces éléments de part et d'autre des *panneaux* envisagés, ou encore à leurs fixations continues sur des *encadrements rigides* (fonds de réservoirs, fonds de coques reliés aux quilles d'angles, etc...).

Les théories qui les concernent sont connues sous le nom de théories des *plaques minces*.

1.43 Plan d'étude. — Nous adopterons finalement le plan d'étude suivant, guidé à la fois par la classification ci-dessus et par la complexité croissante des résultats.

a) *Plaques planes épaisses :* plaques résistant en flexion ;

b) *Membranes planes :* plaques infiniment minces résistant exclusivement en traction sur leurs bordures ;

c) *Plaques planes minces :* plaques résistant à la fois en flexion propre et en traction sur leurs encadrements ;

d) *Plaques courbes.*

1.5 NOTATIONS.

Nous utiliserons, d'une manière générale, les notations ci-dessous :

Nous désignerons, pour une plaque étudiée, par :

e l'*épaisseur* de la plaque (en mm) ;

a ou b les *dimensions caractéristiques* (en mm) du plan de la plaque, ces dimensions étant définies dans chaque cas particulier :

p la *pression uniforme* (en kg/mm²) s'exerçant sur la plaque.

Pour simplifier les formules, nous ferons apparaître dans leurs expressions, le symbole E′ jouant le rôle d'un « *module d'élasticité corrigé* » propre à chaque matériau [1]. Sa valeur est définie, en fonction du module d'élasticité longitudinal E, par la relation

$$E' = \frac{E}{1-\sigma^2}$$

avec σ=coefficient de Poisson (voir chap. V, § **4.4**).

Nous aurons donc les valeurs suivantes :

pour les *aciers* où $\sigma=0{,}25$ et $E=20000$ kg/mm² (en moyenne)

$$E'=1{,}069\ E=21380\ \text{kg/mm}^2 ;$$

pour les *alliages légers à base d'aluminium* où $\sigma=0{,}3$ et $E=7000$ kg/mm²

$$E'=1{,}1\ E=7700\ \text{kg/mm}^2.$$

1.6 REMARQUE.

Les théories concernant le calcul des plaques reposent, comme toutes celles de la résistance des matériaux, sur des déformations *élastiques*. Les résultats ne sont donc applicables avec rigueur qu'en *période élastique* des matériaux. Notons qu'il existe une théorie du module réduit, analogue à celle exposée au chapitre précédent, pour le flambage, qui permet d'étudier les plaques en période plastique.

Nous indiquerons seulement le résultat simple auquel elle conduit dans le cas particulier des membranes.

2. PLAQUES PLANES ÉPAISSES (PLAQUES RÉSISTANT EN FLEXION)

2.1 FORMULES (voir notations, § 1.5).

Les expressions de ces formules feront apparaître des *coefficients sans dimension* A, B, C, dont les valeurs sont données dans le tableau ci-après pour chaque cas particulier envisagé.

1. — Ce module d'élasticité corrigé ne constitue, en réalité, qu'un *artifice de calcul* destiné à tenir compte de « *l'effet de Poisson* ».

La *contrainte normale maximum de flexion* est donnée par

$$n = A\ p \left(\frac{b}{e}\right)^2. \qquad (1)$$

Cette contrainte est atteinte aux emplacements précisés ci-après pour chaque cas particulier.

DIFFÉRENTS CAS		COEFFICIENT A	B	C	EMPLACEMENT DE LA CONTRAINTE MAX.
a) **Plaque circulaire** de diamètre *b*	appuyée le long de son périmètre	0,310	0,555	0,048	Centre.
	encastrée le long de son périmètre	0,1875	0,433	0,0118	Périmètre
b) **Plaque rectangulaire ne prenant réaction que sur deux côtés AB et CD** (ou plaque de grand allongement)	appuyée sur les côtés AB et CD	0,75	0,866	0,156	Centre.
	encastrée suivant les côtés AB et CD	0,5	0,707	0,0312	Le long de AB et CD
c) **Plaque rectangulaire prenant réaction sur ses quatre côtés** *a*=grand côté *b*=petit côté	appuyée sur ses quatre côtés	Voir **Planche 32** (*diagramme n° 1*), les courbes de variation de A et C en fonction de $\frac{b}{a}$ $B = \sqrt{A}$ (Voir ci-dessous).			Centre.
	encastrée suivant ses quatre côtés				Périmètre.

L'épaisseur minimum admissible de la plaque est donnée par

$$e_a = Bb\sqrt{\frac{n_a}{p}} \qquad (2)$$

n_a étant la valeur de la contrainte admissible en flexion.

La *flèche au centre* de la plaque a pour expression

$$f = C\ \frac{p\ b^4}{E'\ e^3}. \qquad (3)$$

2.2 REMARQUES.

2.21 Relation entre A et B. — La formule (2) (équation d'équarissage) se déduit directement de la formule (1) (équation de résistance). Si l'on remplace n par n_a et e par e_a dans cette dernière formule, on obtient en effet

$$e_a^2 = A\ p\ \frac{b^2}{n_a}$$

d'où

$$e_a = \sqrt{A} \cdot b \cdot \sqrt{\frac{p}{n_a}} = B\ b\ \sqrt{\frac{p}{n_a}}.$$

On voit donc que $B = \sqrt{A}$.

2.22 Vérification des formules dans le cas b). — Dans le cas b) (plaque appuyée sur deux côtés), il est évident que la déformée de la plaque sera une surface cylindrique à génératrices longitudinales rectilignes. Sous réserve de remplacer E par E′ on doit donc pouvoir assimiler la plaque à une succession de poutres reposant sur deux appuis simples situés sur les côtés appuyés.

Isolons une de ces poutres telle que FF′ (fig. 4) en lui donnant une largeur égale à l'unité.

Elle reçoit donc une charge par unité de longueur, mesurée par

$$p \times 1 = p$$

d'où un moment fléchissant maximum (au milieu)

$$M = p\ \frac{b^2}{8}.$$

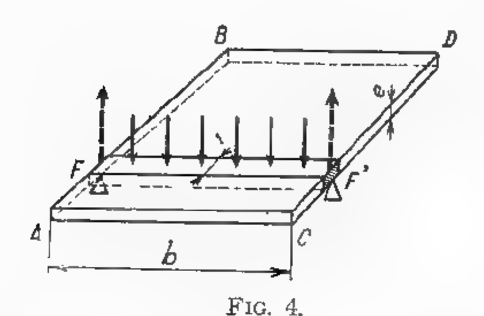


Fig. 4.

Son module d'inertie a pour expression

$$\frac{I}{V} = \frac{1 \times e^2}{6} = \frac{e^2}{6}.$$

La *contrainte maximum* de flexion vaut donc

$$n = \frac{M}{\left(\frac{I}{V}\right)} = \frac{6\ p\ b^2}{8\ e^2} = 0{,}75\ p \left(\frac{b}{e}\right)^2.$$

On retrouve bien la formule (1) avec A = 0,75 (tableau).

La *flèche maximum* de la poutre est donnée par

$$f = \frac{5}{384}\ p\ \frac{b^4}{E'I} \qquad \text{(Voir Planche 17)}$$

soit, avec

$$I = \frac{1 \times e^3}{12} = \frac{e^3}{12}$$

$$f = \frac{60}{384}\ \frac{p\ b^4}{E'\ e^3} = 0{,}156\ \frac{p\ b^4}{E'\ e^3}.$$

On retrouve bien la formule (3) avec B = 0,156 (tableau).

On vérifierait de même la concordance des coefficients dans le cas des côtés encastrés.

2.23 Concordance des cas b) et c). — Si l'on fait $\frac{a}{b} = 0$ dans le cas c) on se trouve dans le cas d'une plaque rectangulaire d'allongement infini (a très grand), c'est-à-dire dans le cas b).

On retrouve bien, en effet, sur les courbes de la **Planche 32,** les mêmes

valeurs des coefficients A et C en ce point particulier, soit : A = 0,75 et C = 0,156 (côtés appuyés) ou A = 0,5 et C = 0,0312 (côtés encastrés).

2.3 APPLICATION NUMERIQUE.

2.31 **Données.** — Soit une *plaque rectangulaire fléchie en duralumin* AU4G ($E'=7700$ kg/mm²) *de très grand allongement* (cas *b*) de petite dimension $b=300$ mm ayant à supporter une pression $p=1$ kg/cm²$=0{,}01$ kg/mm².
Supposons successivement cette plaque *appuyée* et *encastrée.*

2.32 **Epaisseurs minima admissibles.** — Fixons-nous une contrainte maximum de flexion $n_a=25$ kg/mm² (sensiblement égale à la limite élastique conventionnelle du duralumin)

$$e_a=\text{B}\ b\sqrt{\frac{p}{n_a}}=\text{B}\cdot 300\sqrt{\frac{0.01}{25}}=6\ \text{B} \qquad \text{(en mm)}$$

côtés appuyés (B=,866) : $e_a=5{,}2$ mm,
côtés encastrés (B=0,707) : $e_a=4{,}255$ mm.

2.33 **Flèches maxima.** — Ces flèches maxima (au centre) seront calculées avec les épaisseurs e_a ci-dessus.

$$f=\text{C}\ \frac{p\ b^4}{\text{E}'\ e^3}=\frac{\text{C}}{e^3}\cdot\frac{0{,}01\cdot 300^4}{7700}=10510\ \frac{\text{C}}{e^3} \quad \text{(en mm)}$$

côtés appuyés ($C=0{,}156$; $e=e_a=5{,}2$)

$$f=10510\ \frac{0{,}156}{5{,}2^3}=11{,}6 \text{ mm},$$

côtés encastrés ($C=0{,}0312$; $e=e_a=4{,}25$)

$$f=10510\ \frac{0{,}0312}{4{,}25^3}=4{,}27 \text{ mm}.$$

2.34 **Remarque.** — Cette application montre que, même encastrées, les plaques travaillant en flexion doivent être d'épaisseurs notables pour résister à des charges relativement faibles. Elles prennent des flèches considérables eu égard à leurs dimensions.

3. MEMBRANES PLANES

(*Plaques très minces de rigidité en flexion négligeable, résistant exclusivement par traction sur leurs bordures.*) Voir notations § **1.5.**

3.1 FORMULES.

Les formules ci-après supposent toujours les *bordures infiniment rigides*, c'est-à-dire de distances relatives invariables (voir § **3.5**). Nous ferons également apparaître des *coefficients sans dimension* A′, B′, C′, définis dans chaque cas particulier par le tableau ci-après.

Contrainte de traction pure (sensiblement constante en tous les points de la plaque)

$$n=\text{A}'\sqrt[3]{\text{E}'\left(\frac{p\ b}{e}\right)^2}. \qquad \textbf{(4)}$$

Epaisseur minimum admissible, pour obtenir une contrainte maximum de traction n_a

$$e_a=\text{B}'\ p\ b\sqrt{\frac{\text{E}'}{n_a^3}}. \qquad \textbf{(5)}$$

Flèche maximum (au centre)

$$\boxed{f = C' b \sqrt[3]{\frac{p\ b}{E' e}}} . \qquad (6)$$

Nous n'aurons pas à discriminer ici les cas de bords appuyés ou encastrés. En effet, les membranes ayant, par définition, une rigidité de flexion nulle, un encastrement est identique à une articulation située immédiatement à son niveau. Toutes les membranes seront donc supposées *articulées* au niveau des bordures où elles sont fixées.

DIFFÉRENTS CAS	COEFFICIENTS		
	A′	B′	C′
a) Membrane circulaire de diamètre b — fixée tout le long de son périmètre	0,246	0,122	0,254
b) Membrane rectangulaire fixée sur deux côtés — (côtés AB et CD distants de b) ou membrane de grand allongement fixée sur ses quatre côtés.	0,347	0,204	0,360
c) Membrane rectangulaire fixée sur ses quatre côtés — a=grand côté, b=petit côté	Voir **Planche 32** (*diagramme n°* 2) les courbes de variation de A′ et C′ en fonction de $\frac{b}{a}$ (voir § 3.23); $B' = \sqrt{A'^3}$ (voir § 3.21)		

3.2 REMARQUES.

3.21 Relation entre A′ et B′. — En faisant $n = n_a$ et $e = e_a$ dans la formule (4), on obtient

$$n_a^3 = A'^3\, E' \frac{p^2 b^2}{e_a^2}$$

d'où

$$e_a = \sqrt{A'^3}\ p\ b \sqrt{\frac{E'}{n_a^3}} .$$

On retrouve ainsi l'expression de la formule (5) avec la relation

$$\boxed{B' = \sqrt{A'^3}.}$$

3.22 Vérification de la relation entre A′ et C′ dans le cas b). — Dans le cas *b*) (membrane rectangulaire fixée sur deux côtés), la déformation de la membrane s'établit suivant une *surface cylindrique de base parabolique* (génératrices parallèles aux côtés fixés AB et CD). Voir fig. 5 [1].

Si nous découpons une bande de largeur égale à l'unité, elle sera soumise à un effort de traction

$$F = n \times e \times 1 = n\, e.$$

Nous avons établi au chapitre VII, paragraphe 2.24, en assimilant à une parabole la figure d'équilibre d'un câble pesant, qu'il existait entre la flèche *f* au centre de sa portée 2L et l'effort de traction T_0 agissant dans ce câble, la relation

$$T_0 = \frac{p\, L^2}{2\, f}$$

(avec p = poids de l'unité de longueur, assimilable à une charge uniformément répartie).

Cette relation s'écrit ici en remplaçant T_0 par $F = ne$ et L par $\frac{b}{2}$

$$n\, e = \frac{p\, b^2}{8\, f} \qquad \text{soit} \qquad f = \frac{p\, b^2}{8\, n\, e}$$

d'où

$$f^3 = \frac{p^3\, b^6}{512\, e^3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

et en remplaçant n^3 par sa valeur déduite de la formule (4)

$$f^3 = \frac{p\, b^4}{e\, E'} \, \frac{1}{512\, A'^3}$$

d'où

$$f = \frac{1}{8\, A'}\, b \sqrt[3]{\frac{p\, b}{E'\, e}}$$

expression semblable à la formule (6) avec $C' = \frac{1}{8A'}$.

Or, nous avons bien dans le cas *b*)

$$C' = \frac{1}{8\,.\,0{,}347} = 0{,}360.$$

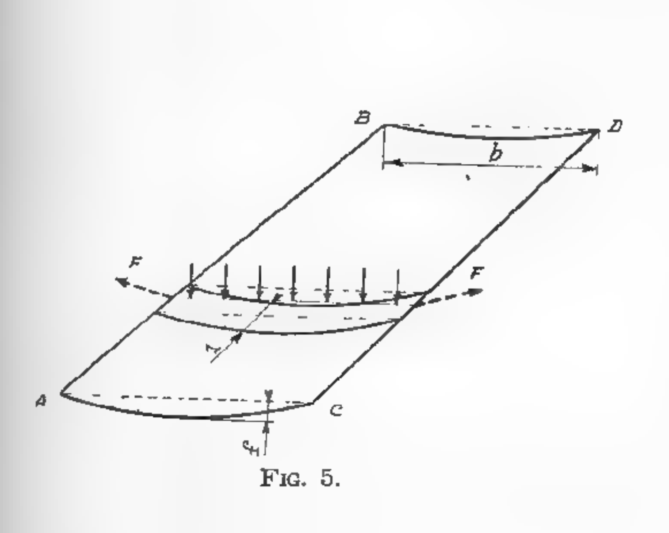


Fig. 5.

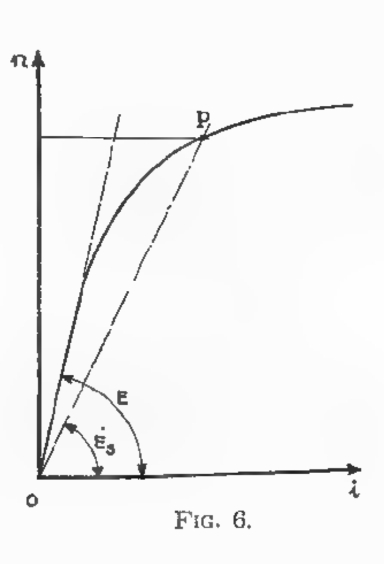


Fig. 6.

1. — *Référence* : Résistance des matériaux, par J. Gérardin.

3.23 Courbes du cas c). — Les courbes de variation de A′ et C′ données **Planche 32** pour le cas *c*) (membrane rectangulaire fixée sur ses quatre côtés) sont déduites des expressions suivantes [1]

$$A' = \frac{K_1}{\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad C' = \frac{K_2}{\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^4\right]^{\frac{1}{3}}}.$$

Nous avons admis pour valeur des coefficients K_1 et K_2, celles permettant de retrouver les résultats théoriques du cas *b*) quand le rapport $\frac{b}{a}$ devient égal à zéro (membrane de très grand allongement) c'est-à-dire

$$K_1 = 0{,}347 \quad \text{et} \quad K_2 = 0{,}360.$$

3.24 Résistance des membranes en période plastique. — Si la contrainte de traction *n* calculée par la formule (4) est supérieure à la limite de proportionnalité du matériau, il y a lieu dans les formules (4), (5) et (6) de remplacer le « module corrigé » E′ (§ **1**.5) par une autre valeur de module corrigé [2]

$$E'_s = \frac{E_s}{1-\sigma^2}.$$

Dans cette relation, E_s désigne le « *module sécant* » qui s'obtient sur un diagramme contraintes-allongements de traction (fig. 6) par la pente de la sécante OP relative au point P considéré. Ce module étant inférieur au « module d'origine » E, les contraintes réelles *n* sont plus faibles et les flèches *f* plus fortes que celles calculées avec la valeur de E′ correspondant à E.

3.3 APPLICATION NUMERIQUE.

3.31 Données. — Afin d'établir une comparaison entre les résultats obtenus, nous utiliserons les mêmes données qu'au paragraphe 2.31, soit :

Plaque rectangulaire de très grand allongement (cas **b**) avec $b=300$ mm ; $p=1$ kg/cm² $=0{,}01$ kg/mm² (articulations le long des deux côtés fixés). Matière duralumin AU4G : $E'=7700$ kg/mm² (§ 1.5).

Nous supposerons, à priori, la théorie des membranes applicable (plaque très mince, voir ci-après).

3.32 Epaisseur minimum admissible. — Adoptons, de même qu'au paragraphe 2.31

contrainte admissible en traction : $n_a=25$ kg/mm².

La formule (5) donne, avec $B'=0{,}205$

$$e_a = 0{,}205 \cdot 0{,}01 \cdot 300 \sqrt{\frac{7700}{25^3}} = 0{,}432 \text{ mm}.$$

Valeur théorique à comparer avec $e_a=5{,}2$ mm obtenue pour une plaque librement appuyée (§ 2.32).

La fixation sur un encadrement rigide (ou la *continuité*) permet donc, dans ce cas, d'utiliser une tôle d'épaisseur 12 fois plus faible.

---

1. — *Référence :* Précis d'aérotechnique (formules dues à M. Rivière).

2. — Notons qu'il y aurait lieu de remplacer les valeurs habituelles de σ par des valeurs variant entre celles-ci et la valeur limite $\sigma = 0{,}5$ obtenue en plasticité pure.

Si l'on adopte une *épaisseur pratique* de tôle $e=0{,}8$ mm [1] on obtient une *contrainte de traction* (formule 4 avec A'–0,347).

$$n=0{,}347\sqrt[3]{7700\left(\frac{0{,}01\cdot 300}{0{,}8}\right)^2}=14{,}9 \text{ kg/mm}^2.$$

3.33 **Flèche maximum** (Formule 6) avec C'=0,360).
Avec *l'épaisseur théorique* $e_a=0{,}432$ mm on obtient :

$$f=0{,}360\cdot 300\sqrt[3]{\frac{0{,}01\cdot 300}{7700\cdot 0{,}432}}=108\sqrt[3]{0{,}902.10^{-3}}=10{,}4 \text{ mm}.$$

Avec *l'épaisseur théorique* $e_a=0{,}432$ mm on obtient :

$$f=8{,}5 \text{ mm}.$$

On voit que ces flèches sont inférieures à celles de la plaque fléchie avec côtés appuyés, étudiée au paragraphe 2.33.

3.34 **Remarque.** — Les données ci-dessus correspondent à l'ordre de grandeur de celles utilisées pour le calcul d'une *paroi de fuselage étanche* (appareil stratosphérique). La pression $p=1$ kg/cm² correspond sensiblement à la différence des pressions atmosphériques existant entre les altitudes de 2.500 m. (pression rétablie à l'intérieur) et de 10.000 m (altitude de vol), cette différence étant affectée, pour le calcul, d'un coefficient de 2 (sécurité à la rupture).

La distance b correspondrait à l'intervalle entre deux raidisseurs rigides bordant un élément de paroi plane.

3.4 SOLLICITATIONS DES ENCADREMENTS,

3.41 **Membrane isolée** (fig. 7). — Par suite de son mode de travail en traction, une membrane « *tire sur toutes ses bordures* » avec une force dont la valeur *par unité de longueur* est donnée directement par (§ **3.22**)

$$F=n\ e$$

soit, d'après la formule (4)

$$\boxed{F=A'\sqrt[3]{E'\,p^2\,b^2\,e.}}$$

(Pour une même charge et une même dimension b cette force est donc proportionnelle à la racine cubique de l'épaisseur.)

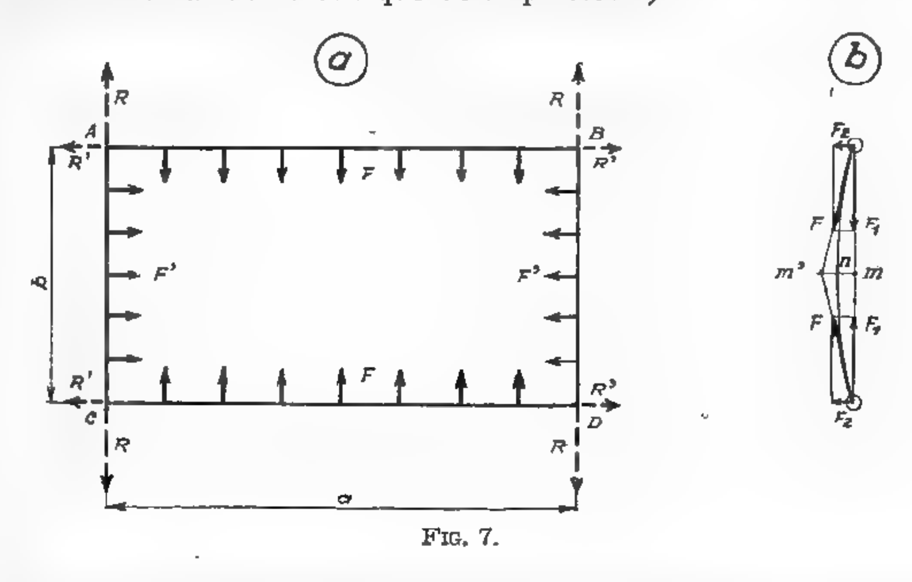


Fig. 7.

1. — La théorie des membranes reste encore applicable avec une très bonne approximation pour cette épaisseur, eu égard à la dimension b envisagée.

Ces sollicitations forment, par elles-mêmes, un *système en équilibre dans le plan de la membrane*. Les côtés AB et CD (fig. 7 *a*) s'appuient (ou s'encastrent) sur les côtés AC et BD en produisant une *compression* de ceux-ci égale à

$$C = -R = F\ a.$$

Les côtés travaillent en *flexion* et *compression* pour assurer cet équilibre.

Notons que, dans le cas de la figure 7 *a*, les efforts F′ s'exerçant par unité de longueur des côtés AC et BD sont inférieurs [1] à F.

On opèrera donc un calcul désavantageux en assimilant F′ à F.

Application. — Dans l'application du paragraphe 3.3 les côtés repris par la membrane avaient à transmettre un effort

$F = 25 \times 0{,}432 = 10{,}8$ kg/mm dans le cas de l'épaisseur théorique e_a
et $F = 14{,}9 \times 0{,}8 = 11{,}9$ kg/mm dans l'autre cas.

Remarque. — Les efforts F sont dirigés tangentiellement à la déformée de la membrane (fig. 7 *b*). Les composantes F_2 perpendiculaires au plan de l'encadrement représentent l'effet de la pression appliquée elle-même. (Leur résultante générale est égale à $p \cdot a \cdot b$.)

On effectuera un calcul désavantageux en adoptant la valeur de F_2 qui correspond au cas des bords AC et BD non repris, soit

$$F_2 = p\,\frac{b}{2} \text{ (par unité de longueur).}$$

Il reste toujours très voisin de la réalité d'assimiler les composantes F_1 aux efforts F eux-mêmes, ce que nous avons fait ci-dessus.

3.42 Membrane continue. — Dans le cas d'une membrane *continue*, composée de plusieurs panneaux, seuls les encadrements extrêmes reçoivent la totalité des efforts ci-dessus.

Dans le cas du *système continu plan* de la figure 8 *a* un élément intermédiaire tel que B recevra la résultante Φ des efforts F qui lui sont adjacents.

Si les panneaux AB et BC ont même largeur *b* et sont de grand allongement on a directement

$$\Phi = 2\ F_2 = p\ b.$$

FIG. 8.

Si les panneaux font entre eux un certain angle α (fig. 8 *b*) la résultante Φ a sensiblement pour valeur, dans les mêmes conditions que ci-dessus

$$\Phi = p\ b + 2\ F \sin \alpha.$$

1. — La formule (4) appliquée aux membranes reprises sur leurs quatre côtés ne donne que la contrainte de traction maximum qui s'exerce parallèlement aux petits côtés. Nous savons (Chap XV, § 2.2) qu'elle ne se combine pas avec la contrainte parallèle aux grands côtés.

3.5 REMARQUES.

Ainsi que nous l'avons indiqué ci-dessus, la théorie des membranes suppose toujours les bordures infiniment rigides. En réalité, celles-ci fléchissent sous l'action des sollicitations qu'elles reçoivent.

Les contraintes de traction ayant tendance à diminuer par suite de ces déformations [1], on pourra continuer à utiliser les formules (**4**) et (**5**).

Par contre, la flèche au centre augmente avec les déformations de l'encadrement et il y aura lieu de tenir compte de cette considération en utilisant les résultats de la formule (**6**).

4. PLAQUES PLANES MINCES

(Plaques résistant à la fois par flexion propre et par traction sur leurs encadrements.)

4.1 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Quand une plaque, fixée rigidement à un encadrement, présente une rigidité propre en flexion non négligeable, son mode de travail est intermédiaire entre celui d'une plaque épaisse à bords libres et celui d'une membrane.

Les résultats que nous exposons ci-après résultent d'une théorie qui s'apparente à celle de la stabilité des poutres comprimées et fléchies (chap. XVI, § **6.**) La traction qui s'exerce sur la plaque produit, sur les moments et sur les flèches de flexion pure, une « *influence réductrice* » au lieu de « *l'influence amplificatrice* » créée par la compression des poutres.

Cette théorie ne concerne que le cas des *plaques rectangulaires* fixées sur *deux côtés opposés* (cas **b** des paragraphes **2.** et **3.**). Les résultats restent applicables aux *plaques de grand allongement fixées sur leurs quatre côtés* qui possèdent également, tout au moins hors de la proximité immédiate de leurs petits côtés, une déformée cylindrique.

Nous aurons à considérer successivement le cas des *bords articulés* et celui des *bords encastrés.*

4.2 PLAQUES PLANES RECTANGULAIRES ARTICULÉES.

4.21 **Notations** (fig. 9). — Nous désignerons toujours par p la pression uniforme appliquée à la plaque et par b la distance séparant les côtés articulés (c'est-à-dire la *petite dimension* dans le cas d'une plaque de grand allongement fixée sur ses quatre côtés).

Nous désignerons, d'autre part, par f_0 la flèche de flexion pure que la plaque prendrait élastiquement si elle était simplement appuyée. Cette flèche nous est donnée par la formule (**3**) relative aux plaques fléchies (§ **2.1 et 2.22**), soit

$$f_0 = 0{,}156 \frac{p}{E'} \frac{b^4}{e^3}.$$

Il est à remarquer que le calcul conduit, généralement, à des valeurs de f_0 paraissant anormales, par suite de leur grandeur excessive vis-à-vis des dimensions des plaques. Ceci tient au fait que ces flèches correspondraient, alors, à des contraintes excédant largement la limite élastique ou même la rupture. En réalité, la flèche f_0 est une *valeur fictive* qui ne sert que d'intermédiaire de calcul et dont on n'a pas à se préoccuper de la vraisemblance physique.

1. — A condition, toutefois, que ces déformations des encadrements ne soient pas localisées sur une faible partie de leur longueur.

Nous désignerons, enfin, par F l'effort de traction s'exerçant sur une bande transversale de plaque de largeur égale à 1 (bande AB, fig. 9). Nous donnons d'abord ci-dessous les expressions algébriques traduisant les résultats des calculs théoriques. L'usage de ces formules sera facilité par un abaque pratique dont nous exposons ensuite le mode d'emploi.

4.22 Formules.

4.221 *Flèche maximum réelle.* — La flèche maximum atteinte au centre de la plaque, s'exprime en fonction de la flèche fictive f_0 par la relation

$$\boxed{f = \frac{f_0}{1+\alpha}}.$$

où α désigne le rapport existant, en valeur absolue, entre l'effort F et la charge critique F_c de flambage d'Euler de la bande de largeur 1 [1].

Ce rapport est défini par l'équation

$$\alpha(\alpha+1)^2 = 3\left(\frac{f_0}{e}\right)^2$$

soit

$$x^3 - x^2 = k$$

en posant

$$x = \alpha+1 \quad \text{et} \quad k = 3\left(\frac{f_0}{e}\right)^2$$

Cette équation du troisième degré en x peut se résoudre, pratiquement, en effectuant quelques approximations (à l'aide d'une table de carrés et cubes) en partant de valeurs x légèrement supérieures [2] à $\sqrt[3]{k}$. L'abaque pratique donné ci-après dispense de ce calcul.

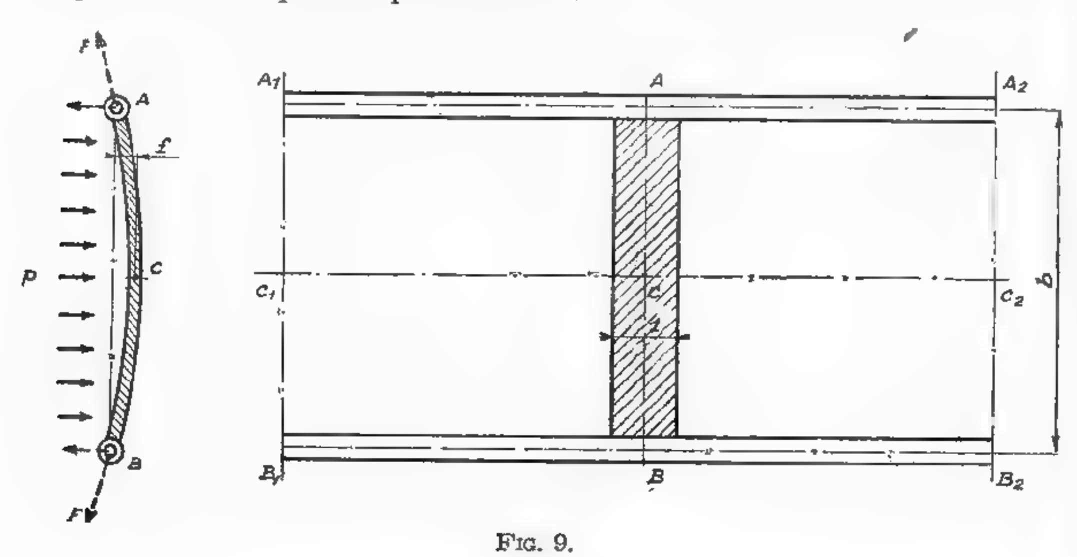


FIG. 9.

4.222 *Contrainte de traction.* — L'effort de traction F a pour valeur, d'après la définition ci-dessus

$$F = \alpha\, F_c$$

1. — Le dénominateur $1 + \alpha$ traduit l'*influence réductrice* due à la traction F.

2. — Il arrive que k soit suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler directement $\sqrt[3]{k}$ à x et à α (ce qui revient à confondre α et $\alpha + 1$).

avec F_e=charge d'Euler de la bande de largeur unité

$$F_e = \frac{\pi^2 E' I}{b^2} = \frac{\pi^2 E' e^3}{12\, b^2}.\ ^1$$

On a donc

$$F = \alpha \frac{\pi^2 E' e^3}{12\, b^2} = 0{,}8225 \frac{E' e^3}{b^2} \alpha.$$

La contrainte de traction, résultant de cet effort, a pour valeur

$$n_t = \frac{F}{e \cdot 1} = \frac{F}{e}$$

soit

$$\boxed{n_t = 0{,}8225\ E' \left(\frac{e}{b}\right)^2 \alpha.}$$

4.223 *Contrainte de flexion.* — Le *moment fléchissant maximum* qui s'exerce au milieu C de la bande de largeur unité (fig. 9) a pour expression

$$M_{max} = \frac{p\, b^2}{8} \varphi$$

où φ représente l'*influence réductrice* de la traction F sur le moment fléchissant maximum, obtenu en considérant la bande comme une poutre simplement appuyée en ses extrémités $\left(\text{ce moment aurait pour valeur } \frac{p\, b^2}{8}\right)$.

Le coefficient φ est défini par la relation algébrique[2]

$$\varphi = 2 \frac{\text{ch}\, u - 1}{u^2\, \text{ch}\, u}$$

avec

$$u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha}.$$

L'abaque pratique donné ci-après traduit directement les résultats de ces calculs.

La *contrainte maximum de flexion* qui résulte du moment M_{max} a pour valeur

$$n_f = \frac{M_{max}}{\left(\frac{I}{V}\right)} \qquad \text{avec} \qquad \left(\frac{I}{V}\right) = \frac{e^2}{6} \quad \text{(bande de largeur 1)}$$

d'où

$$n_f = 6 \frac{M_{max}}{e^2}$$

soit

$$\boxed{n_f = 0{,}75\ p \left(\frac{b}{e}\right)^2 \varphi.}$$

4.224 *Contrainte résultante.* — La superposition de la traction et de la flexion engendre une *contrainte normale résultante maximum*

$$\boxed{n = n_t + n_f.}$$

Cette contrainte, dirigée en *traction*, s'exerce sur la génératrice médiane C_1C_2 de la plaque (fig. 9) et sur la face opposée à celle où agit la pression p.

1. — L'emploi de E' comme module d'élasticité tient compte de la continuité longitudinale réelle de la plaque (§ 1.5).

2. — Le symbole ch$u$ se lit « cosinus hyperbolique de u ».

4.23 Abaque pratique. — Les calculs ci-dessus peuvent être effectués rapidement en utilisant l'abaque pratique donné **Planche 32** (diagramme n° 3). L'usage de cet abaque, établi en coordonnées logarithmiques [1] est le suivant :

Porter en abscisses le paramètre sans dimension

$$\mu = \frac{f_0}{e} = 0{,}156\ p\ \frac{b^4}{E'\ e^4}$$

caractérisant la plaque étudiée et élever une verticale en ce point.

Les valeurs de α et de $1000\ \varphi$ se lisent en ordonnées, d'après les intersections de la verticale avec les courbes correspondant à ces paramètres.

4.24 Application numérique.

4.241 *Données.* — Adoptons, toujours, les données numériques des paragraphes 2.31 et 3.31, soit : plaque rectangulaire (articulée), de grand allongement, de largeur $b=300$ mm, soumise à une pression uniforme $p=0{,}01$ kg/mm² ; matière : duralumin AU4G : $E'=7700$ kg/mm².

Nous évaluerons les contraintes et la flèche dans le cas d'une épaisseur $e=2$ mm.

4.242 *Calcul des paramètres.* — Le paramètre à porter en abscisses a pour valeur

$$\mu = 0{,}156 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{300^4}{7700 \cdot 2^4} = 102{,}5.$$

On lit sur l'abaque, planche 32

$$\alpha = 31\ ; \qquad 1000\ \varphi = 26{,}5 \qquad \text{d'où} \qquad \varphi = 0{,}0265.$$

4.243 *Contraintes :*

Contrainte de traction pure (§ 4.222)

$$n_t = 0{,}8225 \cdot 7700 \cdot \left(\frac{2}{300}\right)^2 \cdot 31 = 8{,}75 \text{ kg/mm}^2\ ;$$

Contrainte maximum de flexion (§ 4.223)

$$n_f = 0{,}75 \cdot 0{,}01 \cdot \left(\frac{300}{2}\right)^2 \cdot 0{,}0265 = 4{,}47 \text{ kg/mm}^2\ ;$$

Contrainte résultante maximum (traction)

$$n = 8{,}75 + 4{,}47 = \mathbf{13{,}22\ kg/mm^2}.$$

4.244 *Flèche maximum* (§ 4.221).

$$f = \frac{f_0}{1+\alpha} = \mu \frac{e}{\alpha+1} = 102{,}5\ \frac{2}{32} = \frac{102{,}5}{16}$$

$$f \sim \mathbf{6{,}4\ mm}.$$

4.25 Remarques. — En assimilant la plaque étudiée ci-dessus à une

1. — L'usage de ces coordonnées est rendu nécessaire par suite des variations considérables des paramètres qui entrent en jeu dans l'abaque. Il permet d'obtenir une précision relative aussi bonne pour les grandes que pour les petites valeurs de ces paramètres. Pour intrapoler entre les graduations indiquées sur l'abaque, on remarquera que les échelles utilisées possèdent une base de 50 mm (distances 1 — 10 ou 10 — 100, par exemple). Elles correspondent donc au 1/5 de l'échelle inférieure de la règle à calculs normale (base 250 mm).

membrane, nous aurions trouvé les valeurs suivantes (formules (4) et (6) du § 3.1).

$$n=0{,}347 \sqrt[3]{7700 \left(\frac{0{,}01 \cdot 300}{2}\right)^2} = 8{,}98 \text{ kg/mm}^2 \text{ (traction pure)}$$

$$f=0{,}360 \cdot 300 \sqrt[3]{\frac{0{,}01 \cdot 300}{7700 \cdot 2}} = 6{,}26 \text{ mm.}$$

La rigidité de flexion de la plaque *diminue* donc (faiblement) sa contrainte de traction pure et influe très peu sur sa déformabilité, dans le cas particulier ci-dessus. Mais la plaque atteint une contrainte résultante maximum nettement *plus élevée* que celle donnée par la théorie des membranes.

Cette dernière conclusion est d'autant plus valable que l'épaisseur e de la plaque s'accroît.

Si, par contre, l'épaisseur e devient très faible, les résultats s'identifient très sensiblement avec ceux de la théorie des membranes. On peut d'ailleurs démontrer cette propriété en effectuant de simples transformations des formules ci-dessus (le paramètre α peut alors se confondre avec le coefficient k ; voir deuxième note du § **4.221**).

4.3 PLAQUES PLANES RECTANGULAIRES ENCASTREES.

4.31 Notations. — Les notations p, b et F sont identiques à celles du paragraphe **4.21** (Voir fig. **10**).

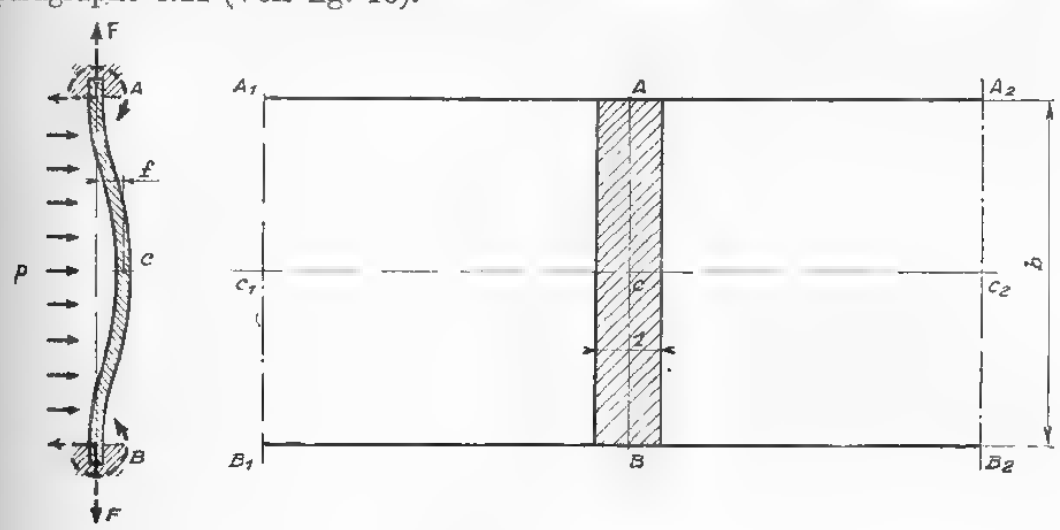


FIG. 10

La *flèche fictive* f'_0 que prendrait (élastiquement) la plaque encastrée librement (pas de traction F) est donnée par la formule (3) du paragraphe **2.1** avec C = 0,0312, soit [1]

$$f_0' = 0{,}0312 \frac{p}{E'} \frac{b^4}{e^3}.$$

4.32 Formules.

4.231 · *Flèche maximum réelle.* — La flèche maximum f, relative à la génératrice $C_1\ C_2$ (fig. **10**) est reliée à f_0' par l'expression

$$\boxed{f = \frac{f_0'}{1+\frac{\beta}{4}}}$$

1. — Il y a lieu d'apporter, au sujet de cette flèche, la même remarque qu'au § 4.21.

Le coefficient β qui désigne le rapport entre la force F et la charge critique d'Euler F_c de la bande AB (supposée articulée en A et B) est donné par l'équation

$$\beta\left(1+\frac{\beta}{4}\right)^2=3\left(\frac{f_0'}{e}\right)^2$$

soit

$$x^3-x^2=k$$

en posant $x=1+\frac{\beta}{4}$ et $k=\frac{3}{4}\left(\frac{f'_0}{e}\right)^2$.

On peut, également, résoudre cette équation du troisième degré en x à l'aide de quelques approximations effectuées en utilisant une table de carrés et cubes (adopter une valeur de départ égale à $\sqrt[3]{k}$). Voir abaque ci-après.

4.322 *Contrainte de traction.* — *La contrainte de traction* n_t est donnée par l'expression

$$\boxed{n_t=0{,}8225\ E'\left(\frac{e}{b}\right)^2\beta.}$$

4.323 *Contrainte de flexion.* — *Le moment fléchissant maximum* M_{max}, s'exerçant sur la bande AB, a lieu *au niveau de ses encastrements* A *et* B. Il est donné par la relation

$$M_{max}=\frac{p\,b^2}{12}\,\Psi \qquad \text{(en valeur absolue)}$$

où le coefficient Ψ représente « *l'influence réductrice* » de la traction F sur le moment fléchissant aux encastrements de la bande AB, considérée comme une poutre librement encastrée à ses deux extrémités (ce moment aurait pour valeur $-\frac{p\,b^2}{12}$; voir planche 35, cas 11).

Le coefficient Ψ s'exprime algébriquement en fonction du paramètre

$$u=\frac{\pi}{2}\sqrt{\alpha},$$

par la relation [1]

$$\Psi=3\,\frac{u-\text{th}\,u}{u^2\cdot\text{th}\,u} \qquad \text{(voir abaque).}$$

La contrainte maximum de flexion, correspondant à M max., est donc

$$n_f=6\,\frac{M_{max}}{e^2} \quad \text{(bande AB de largeur 1)}$$

soit

$$\boxed{n_f=0{,}5\ p\left(\frac{b}{e}\right)^2\Psi.}$$

4.324 *Contrainte résultante maximum.* — Sur les génératrices $A_1\,A_2$ et $B_1\,B_2$ situées au niveau des encastrements (fig. 10), la plaque subit, sur la face où s'exerce la pression p, une contrainte de *traction* résultante

$$\boxed{n=n_t+n_f.}$$

1. — Le symbole : th$u$ se lit : « tangente hyperbolique de u ».

4.33 Abaque pratique. — L'abaque de la **Planche 32** (diagramme n° 3) porte également les courbes de variation des paramètres β et Ψ, en fonction du paramètre $\mu' = \frac{f'_0}{e}$ qui a pour expression, dans le cas des plaques encastrées (voir § **4.31**)

$$\mu' = 0{,}0312\ p \frac{b^4}{E' \cdot e^4}.$$

4.34 Application numérique.

4.341 *Données.* — Utilisons les mêmes données qu'au paragraphe 4.26, soit : plaque AU4G ($E' = 7700$ kg/mm²) ; $b = 300$ mm ; $p = 0{,}01$ kg/mm² ; $e = 2$ mm (bords encastrés au lieu d'être articulés).

4.342 *Calcul des paramètres.*

$$\mu' = 0{,}0312 \cdot 0{,}01 \frac{\overline{300}^2}{7700 \cdot 2^4} = 20{,}6.$$

L'abaque de la planche 32 donne directement

$$\beta = 24{,}6 \qquad \text{et} \qquad 1000\ \Psi = 340 \qquad \text{d'où} \qquad \Psi = 0{,}340.$$

4.343 *Contraintes :*

Traction pure

$$n_t = 0{,}8225 \cdot 7700 \cdot \left(\frac{2}{300}\right)^2 \cdot 24{,}6 = 6{,}93 \text{ kg/mm}^2\ ;$$

Flexion

$$n_f = 0{,}5 \cdot 0{,}01 \left(\frac{300}{2}\right)^2 \cdot 0{,}340 = 38{,}25 \text{ kg/mm}^2\ ;$$

(contrainte fictive, voir remarque ci-après) ;

Traction résultante au niveau des encastrements (contrainte fictive)

$$n = 6{,}93 + 38{,}25 = \mathbf{45{,}18\ kg/mm^2}.$$

4.344 *Flèche maximum* (au niveau de la génératrice médiane C_1 C_2).

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{\beta}{4}} = \mu' \frac{e}{1 + \frac{\beta}{4}} = 20{,}6 \frac{2}{7{,}15}$$

$$\mathbf{f = 5{,}77\ mm.}$$

4.35 Remarques. — La contrainte n_f trouvée ci-dessus est une *valeur fictive*, car elle dépasse notablement la limite élastique du matériau utilisé (Duralumin AU4G : n_e = 26 kg/mm²) et nous savons que les théories ci-dessus ne sont valables qu'en *période élastique* des matériaux.

Il en est donc de même de la contrainte résultante n qui serait d'ailleurs, dans l'exemple ci-dessus, supérieure à la contrainte admissible à la rupture (n_a = 40 kg/mm²).

Cette application permet, néanmoins, de tirer les *conclusions qualitatives* suivantes, valables pour toutes les formes de plaques.

a) La présence d'encastrements rigides sur le pourtour d'une plaque engendre d'*importantes contraintes de flexion* de cette plaque, au niveau de ses encastrements ;

b) Si ces contraintes de flexion dépassent la limite élastique du matériau, *les encastrements perdent leur rigidité pour s'assimiler progressivement à de véritables articulations*. Le phénomène ainsi produit est, en effet, assimilable au *pliage d'une tôle*. On sait que celui-ci s'effectue, à partir de déformations très faibles, sans exiger un accroissement notable des efforts appliqués et sans engendrer la rupture, contrairement aux résultats qui

seraient donnés par un calcul d'élasticité. L'explication en est fournie par la diminution de E, après limite élastique, qui a une influence particulièrement grande sur la répartition des contraintes de flexion, dans le cas des éléments minces ;

c) Il y a lieu, en résumé, d'utiliser les formules ci-dessus, dans le cas des plaques encastrées, pour s'assurer qu'elles n'atteignent pas trop tôt leur limite élastique au niveau de ces encastrements.

Il faudrait, par exemple, que, dans l'application précédente, la pression de calcul soit affectée d'un *coefficient de sécurité* au moins égal à

$$\frac{n}{n_e} = \frac{45{,}18}{26} = 1{,}74$$

pour que la limite élastique ne soit pas atteinte au cours de l'utilisation normale.

Cette conclusion est particulièrement importante dans le cas des plaques assujetties à subir des *alternances de pressions* (par suite de la limite de fatigue aux efforts alternés) ;

d) Il convient, enfin, de remarquer qu'il existe peu, en pratique, *d'encastrements parfaits* (c'est-à-dire infiniment rigides) qui servent de base à l'établissement de la théorie ci-dessus.

5. PLAQUES COURBES

6.1 GENERALITES.

L'influence de la courbure initiale d'une plaque est particulièrement sensible dans le cas des plaques prenant des réactions de traction sur leurs encadrements (membranes ou plaques minces).

Il existe une théorie relative à des plaques rectangulaires possédant une faible déformation initiale cylindrique [1]. Les résultats auxquels elle conduit ne peuvent être traduits d'une façon aussi simple que pour les plaques planes. Nous nous contenterons seulement de signaler qu'une courbure initiale, même très faible, a une *influence très favorable* sur la tenue d'une plaque, pourvu que cette courbure initiale soit effectuée dans le sens de la déformation que la plaque tend à acquérir sous l'action de la pression appliquée [2].

On constate que la plaque tend vers un *mode de travail en traction pure* (les moments fléchissants diminuent).

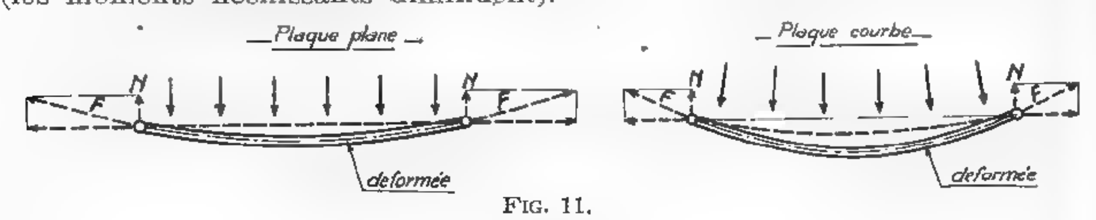


FIG. 11.

Cette constatation s'explique très naturellement si l'on considère que la pente des efforts F engendrés sur les bordures s'accroît par rapport au cas des plaques initialement planes (où cette pente n'était due qu'à la déformation élastique). Or, plus cette pente est forte et moins F a besoin d'être grand pour équilibrer le même effort normal N à l'encadrement (fig. 11) qui reproduit l'effort tranchant dû à la pression *p*.

1. — Résistance des matériaux, par S. TIMOSHENKO, Librairie Polytechnique Ch. Béranger.

2. — Pour une flèche égale à l'épaisseur de la plaque on trouve une réduction de contrainte de l'ordre de 30 %.

Le travail en traction étant favorisé, il est normal que les efforts de flexion diminuent.

6.2 CAS PARTICULIER DES MEMBRANES DE COURBURE IMPORTANTE.

5.21 **Données.** — Considérons (fig. 12) une plaque très mince, assimilable à une *membrane* de largeur projetée b, possédant une courbure initiale de flèche y importante vis-à-vis de la flèche complémentaire f due à la pression appliquée p.

Le rayon de courbure moyen R de la déformée initiale est tel que l'on ait

$$\overline{OA}^2=\overline{OH}^2+\overline{AH}^2$$

soit

$$R^2=(R-y)^2+\frac{b^2}{4}$$

d'où l'on tire

$$R=\frac{y}{2}+\frac{b^2}{8\,y}\,.$$

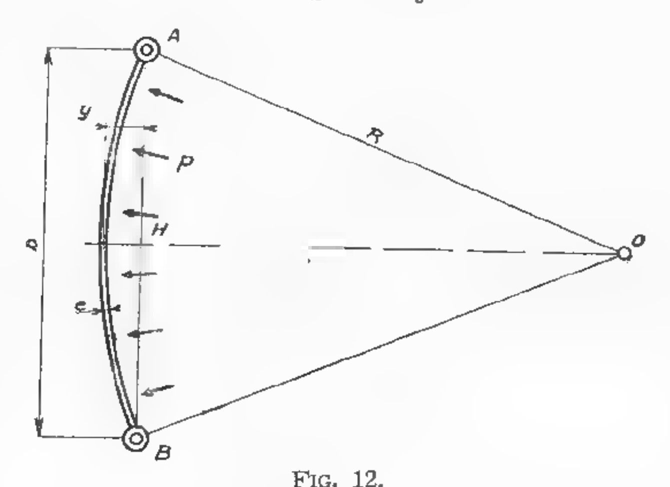


Fig. 12.

5.22 **Contraintes.** — Assimilons la plaque à un fragment de paroi d'une enveloppe cylindrique mince de rayon R. Nous savons, d'après la théorie simplifiée de ces enveloppes (chap. VI, § 5.4) que la plaque est soumise à une *contrainte de traction* transversale donnée par l'expression simple

$$\boxed{n=\frac{p\,R}{e}\,.}$$

Cette formule simple donne une approximation suffisante dans le cas envisagé.

5.23 **Application numérique.** — Supposons que la plaque très mince étudiée au paragraphe **3.3** (membrane plane, $b=300$ mm, $p=1$ kg/cm², $E'=7700$ et $e=0{,}8$ mm) possède une courbure cylindrique initiale de flèche $y=20$ mm.

Rayon de courbure initial moyen

$$R=\frac{20}{2}+\frac{\overline{300^2}}{8\cdot 20}=527{,}5 \text{ mm.}$$

Contrainte de traction

$$n=\frac{0{,}01\cdot 1328}{0{,}8}=7{,}16 \text{ kg/mm}^2.$$

Pour la même membrane plane nous avions trouvé une contrainte de traction de 14,9 kg/mm² (§ 3.32). La flèche envisagée, qui ne représente que 6,66 % de la largeur de la plaque, a donc réduit sa contrainte de 52 %.

5.24 Remarque. — Nous avions trouvé au paragraphe 3.33 que la plaque plane de 0,8 mm d'épaisseur acquérait une flèche élastique de 8,5 mm. Supposons que la théorie ci-dessus s'applique à cette plaque ainsi déformée. Son rayon de courbure moyen a pour valeur

$$R = \frac{8,5}{2} + \frac{\overline{300^2}}{8 \cdot 8,5} = 1328 \text{ mm}$$

d'où une contrainte de traction

$$n = \frac{0,01 \cdot 572,5}{0,8} = 16,6 \text{ kg/mm}^2$$

valeur ne différant que de 11,4 % par excès, de celle trouvée en utilisant la théorie des membranes ($n = 14,9$ kg/mm²).

Si la plaque plane avait eu une flèche élastique supérieure (b plus grand ou e plus faible, par exemple), les résultats auraient été plus voisins.

Cette concordance approximative montre qu'une plaque plane très souple tend, à la limite, à travailler comme une paroi d'enveloppe mince cylindrique, c'est-à-dire de la façon la plus favorable possible en période plastique.

Cette considération explique les divergences énormes constatées expérimentalement entre les pressions produisant la rupture des plaques minces et les pressions admissibles calculées en extrapolant brutalement les résultats des théories d'équilibres élastiques.

CHAPITRE XVIII

CALCUL DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES

0. INTRODUCTION

Il existe de nombreuses méthodes de résolution des systèmes hyperstatiques.

Certaines sont essentiellement algébriques et d'autres, au contraire, presque exclusivement géométriques.

Contrairement aux principes généraux de cet ouvrage, il nous a paru intéressant de développer particulièrement un procédé de calcul s'apparentant plus aux méthodes algébriques qu'aux méthodes géométriques.

Ce procédé, connu sous le nom de « *méthode des dérivées du potentiel interne* » (ou « *méthode du travail minimum* »), présente, en effet, l'avantage d'être entièrement général et d'une très grande facilité de mise en œuvre pour la plupart des problèmes courants. Nous verrons que son emploi ne nécessite, pratiquement, aucune connaissance mathématique élevée, sous réserve de quelques notations particulières que nous présenterons sous la forme d'un « formulaire mathématique ».

Les deux premiers paragraphes du présent chapitre sont réservés à l'exposé, sous une forme générale, des différentes propriétés et des méthodes de résolution des systèmes hyperstatiques. Les paragraphes suivants traiteront de quelques applications particulières orientées vers un but d'utilisation pratique.

Il paraît utile de signaler, avant tout exposé, que les méthodes ci-après ne concerneront toujours que des éléments longs et réguliers, c'est-à-dire des *poutres prismatiques*. Il serait superflu de les appliquer dans le cas d'éléments courts soumis à des liaisons surabondantes. Ces éléments appartiennent plutôt à une catégorie de pièces dites « incalculables » (à l'aide des théories usuelles de la résistance des matériaux). Il vaut mieux lever leur indétermination par une ou plusieurs hypothèses simples et défavorables, plutôt que de leur appliquer les théories ci après, sous prétexte d'un calcul apparemment rationnel... ou spectaculaire.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1 RAPPEL DE DEFINITIONS.

1.11 Systèmes hyperstatiques extérieurs. — En étudiant l'équilibre statique extérieur des systèmes matériels, nous avons été conduits, au chapitre III, paragraphe **4.**, à désigner par *système hyperstatique* (ou *surabondant*) tout système pour lequel les équations d'équilibre extérieur sont en nombre insuffisant pour permettre le calcul de toutes les liaisons extérieures appliquées à ce système.

Exemples : Poutre droite continue reposant sur plus de deux appuis, poutre encastrée et appuyée, arc sur deux articulations, etc...

Nous avons également précisé au chapitre III, paragraphe **4.6**, que cette définition ne concernait qu'un premier genre de systèmes hyperstatiques, désignés par *systèmes hyperstatiques extérieurs.* Les liaisons statiquement indéterminées étaient, en effet, des *liaisons extérieures* (forces ou moments de réaction).

1.12 Systèmes hyperstatiques intérieurs. - Nous avons fait suivre cette précision de la notion d'un autre genre de systèmes hyperstatiques : les *systèmes hyperstatiques intérieurs* (ou *systèmes hyperstatiques de structure*). Cette notion a été donnée par l'exemple simple d'un anneau chargé (dissymétriquement) par un système simple de forces extérieures en équilibre (fig. 11 du chap. III, reproduite ici fig. 1).

On se rend compte aisément de ce que tous les systèmes ne présentant pas d'*extrémité libre* (systèmes se refermant sur eux-mêmes) constituent des systèmes hyperstatiques intérieurs. En effet, on ne peut, pour ces systèmes, définir quelles sont les charges à considérer pour calculer les *efforts internes* appliqués au niveau d'une section quelconque (section S, fig. 1, par exemple), puisque ces efforts internes doivent être ceux situés *d'un même côté* de cette section et que cette désignation perd ici tout son sens. Il manque, donc, pour ces systèmes hyperstatiques intérieurs, un « *point de départ connu* », c'est-à-dire une section où les efforts internes sont *statiquement déterminés.* Les inconnues seront donc des *forces de liaisons intérieures* agissant au niveau d'une section, arbitrairement choisie, désignée par « *section de coupure* ».

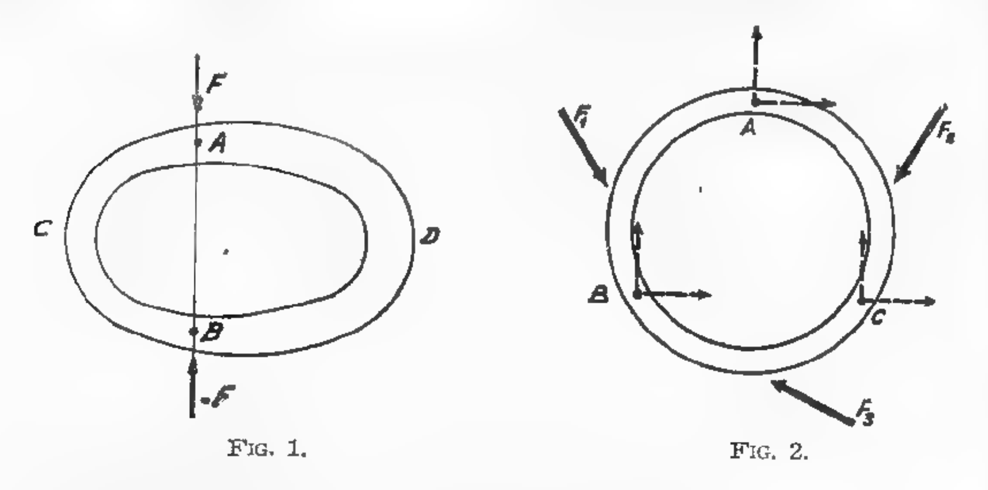


FIG. 1. FIG. 2.

1.13 Systèmes hyperstatiques mixtes. — En supplément à ces définitions, signalons qu'il existe des *systèmes hyperstatiques mixtes*, c'est-à-dire surabondants *extérieurement et intérieurement* à la fois.

C'est, par exemple, le cas d'un *anneau plan reposant sur trois articulations* A, B et C (fig. 2), chargé par un système de forces F_1, F_2, F_3 situées dans son plan.

Nous avons, en effet

extérieurement : trois équations d'équilibre (système plan) avec un « degré d'efficacité » des liaisons égal à $2 \times 3 = 6$ (chap. III § 3.7) ;

intérieurement : système se refermant sur lui-même et, par suite, surabondant.

Voir, ci-après, le nombre total d'inconnues.

1.2 DEGRÉ DE SURABONDANCE D'UN SYSTÈME HYPERSTATIQUE.

1.21 Cas des systèmes hyperstatiques extérieurs. — Nous avons également été conduits à définir dans un cas particulier, au chapitre III (§ 4.31) le *degré de surabondance d'un système hyperstatique extérieur*. Nous avons vu que ce degré était donné par le *nombre de liaisons extérieures statiquement indéterminées*, c'est-à-dire, selon nos conventions, par la différence entre le « degré total d'efficacité » des liaisons et le nombre total d'équations dont on dispose pour les déterminer.

Exemples

Poutre droite sur 3 appuis : 1[er] degré de surabondance (une réaction inconnue) ;
Poutre droite sur 4 appuis : 2[e] degré de surabondance (2 réactions inconnues) ;
Arc sur deux articulations : 1[er] degré de surabondance (poussée inconnue).

1.22 Cas des systèmes hyperstatiques intérieurs. — Pour les *systèmes hyperstatiques intérieurs*, le degré de surabondance est donné par le *nombre d'efforts intérieurs de liaison, nécessaires pour rétablir la continuité du système à travers la section de coupure envisagée* [1].

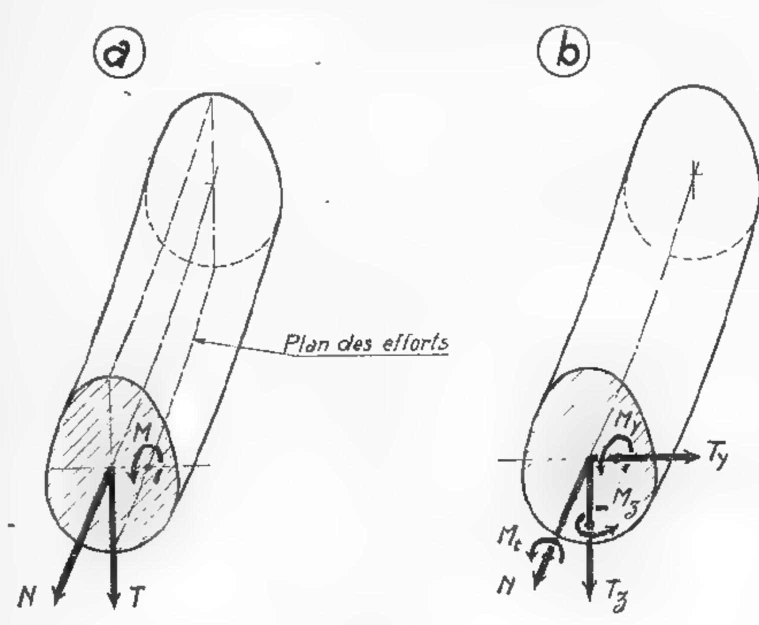


FIG. 3.

Ces efforts intérieurs peuvent comprendre, *au maximum* :

a) Pour un *système plan* (chargé par un système d'efforts n'engendrant pas de torsion ; fig. 3 *a*) :

un effort tranchant T,
un effort normal N,
un moment fléchissant M,

soit, *trois inconnues au maximum* [2].

---

1. — C'est-à-dire par le nombre d'efforts internes existant réellement au niveau de cette section de coupure.

2. — Nous verrons, qu'en pratique, pour tous les systèmes symétriques, ce nombre d'inconnues peut être réduit en envisageant des sections de coupure judicieusement choisies.

b) Pour un *système à trois dimensions* (charges quelconques, fig. 3 *b*) :

deux composantes d'effort tranchant T_y et T_z,
un effort normal N,
deux composantes de moment fléchissant M_y et M_z,
un moment de torsion M_t,

soit six *inconnues au maximum.*

1.23 Règle générale. — Pour discriminer le degré de surabondance d'un système hyperstatique quelconque, il y a lieu d'effectuer les opérations suivantes [1].

a) *Rendre le système isostatique*, ce qui s'opère en supprimant, par la pensée, autant de *liaisons extérieures*, et en effectuant autant de *sections de coupure* qu'il est nécessaire ;

b) Appliquer en ces points de liaison supprimés et en ces sections de coupures, autant *d'efforts de liaison* (forces ou moments extérieurs ou intérieurs) qu'il est nécessaire pour *rétablir la continuité interrompue ;*

c) Faire la *somme* de tous ces efforts de liaison qui donne le *degré de surabondance* général du système.

1.24 Application. — Reprenons l'exemple de l'*anneau sur trois articulations chargé dans son plan* (§ 1.13 et fig. 2 reproduite ci-dessous fig. 4 *a*). [2]

Pour rendre le système *isostatique extérieurement*, il faut supprimer une articulation (B par exemple) et transformer une autre articulation en appui simple (articulation C, par exemple).

Nous obtenons le système de la figure 4 *b* et nous avons ainsi mis en évidence, *trois inconnues extérieures :* R_{By}, R_{Bz} et R_{Cy} [3].

Pour le rendre *isostatique intérieurement*, effectuons une section de coupure quelconque S. Nous aurons ainsi affaire à une *poutre courbe isostatique* (fig. 4 *c*). Pour rétablir la continuité interrompue par la section S, il faut lui appliquer (système plan) : un effort tranchant T, un effort normal N et un moment fléchissant M, soit *trois efforts de liaison intérieurs inconnus.*

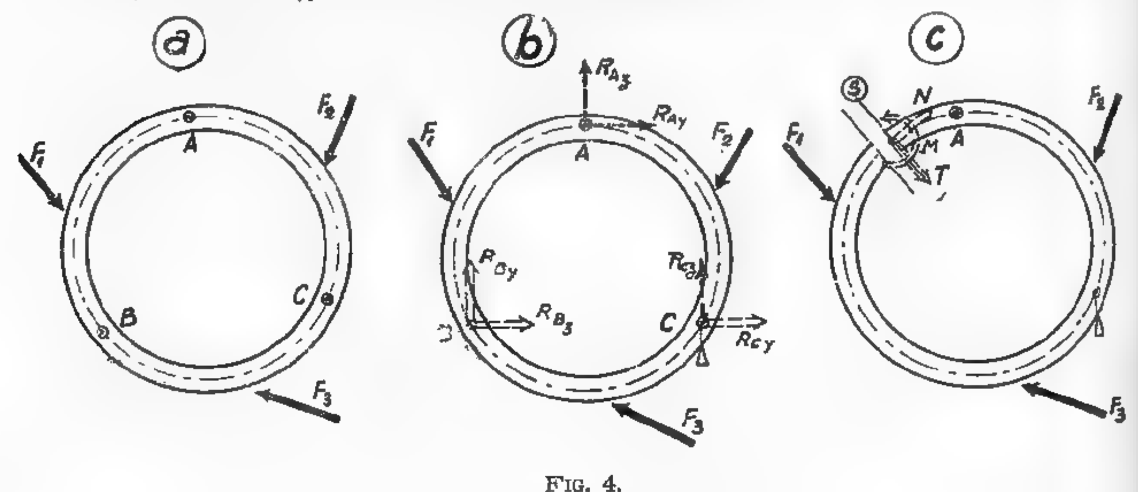


Fig. 4.

Le *degré de surabondance* de ce système est donc :

$$3+3=6.$$

Remarque. — Les efforts T, N et M appliqués, figure 4 *c*, à la partie supérieure de l'anneau sont équilibrés, sur l'autre bord de la coupure S, par des efforts égaux et de sens inverses provenant de la partie inférieure, puisque ce sont des *efforts de liaison internes.*

1. — Cette discrimination du degré de surabondance est toujours l'opération à effectuer *en premier lieu*, dans la résolution d'un système hyperstatique.

2. — Ce serait, par exemple, le cas d'une couronne de bâti-moteur en étoile, chargée de transmettre les efforts tranchants agissant dans son plan et le couple-moteur.

3. — Ce raisonnement confirme le résultat obtenu directement en considérant les « degrés d'efficacité » des liaisons (§ 1.13).

1.3 PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES.

Nous avons vu, au chapitre III, que l'indétermination apparente d'un système hyperstatique devait se lever à l'aide de *considérations de déformations* du système étudié.

Nous allons, ci-après, étudier un *exemple simple*, où n'entreront en jeu que des déformations de traction pure. Cet exemple nous permettra de dégager les *propriétés générales* essentielles des systèmes hyperstatiques.

1.31 Exemple simple de système hyperstatique. — Considérons (fig. 5 *a*) un système constitué par les deux éléments concentriques suivants:

élément (**1**) : barre rectiligne AB de section constante S_1, de longueur libre L_1 et de module d'élasticité E_1 ;

élément (**2**) : tube, de section constante S_2, dans sa région déformable AC de longueur L_2 et de module d'élasticité E_2.

La barre (**1**) est maintenue rigidement à son extrémité B et le tube (**2**) s'appuie, au niveau de son extrémité C, sur une couronne rigide D D'.

Les deux éléments sont reliés intimement l'un à l'autre en A où ils sont sollicités par une force F produisant une *traction* de l'ensemble.

Ce système est évidemment *hyperstatique*, car on ignore, *à priori*, quelle est la participation de l'un et de l'autre élément pour la transmission de F.

Pour le rendre isostatique, il suffit, par exemple, de supposer la barre (1) coupée. Effectuons cette *section de coupure* en B_1 (fig. 5 *b*) située immédiatement au niveau de l'extrémité B.

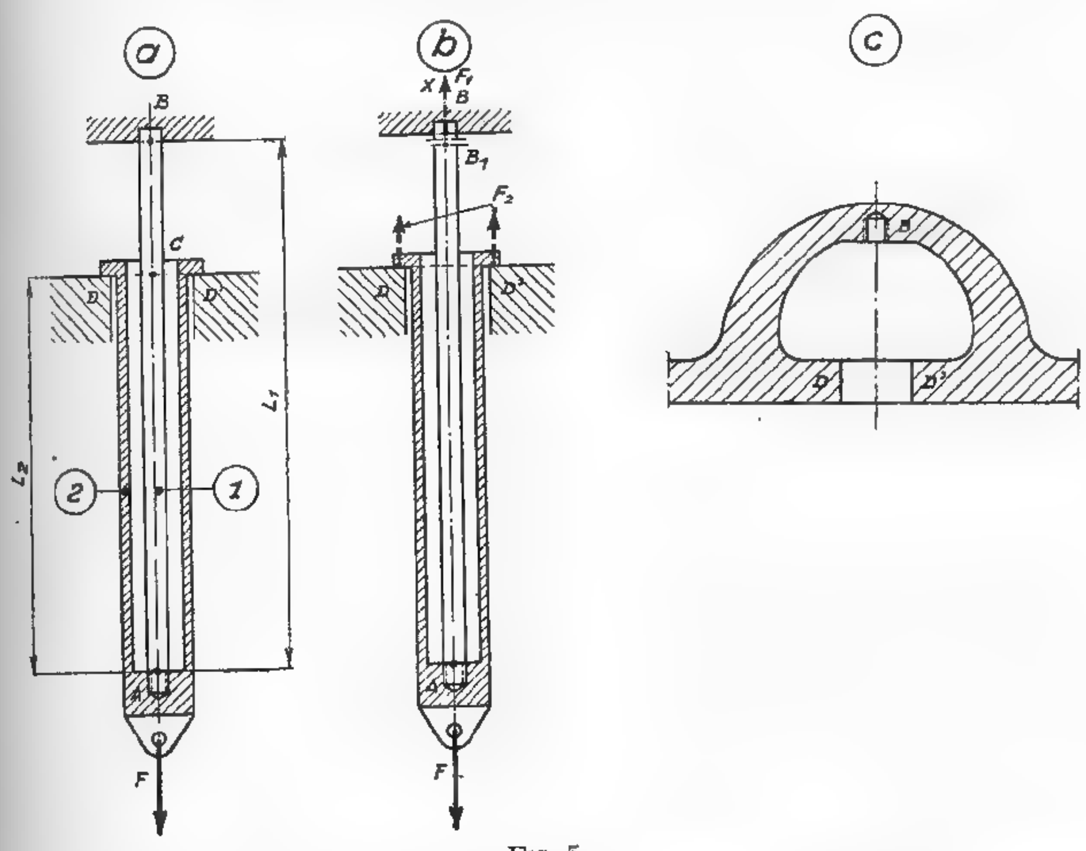


Fig. 5.

Les *liaisons internes* rétablissant, à travers cette section, la continuité du système ne comprennent évidemment, dans ce cas particulier, qu'un effort normal représentant la traction pure qui existe, en réalité, dans la

barre [1]. Désignons par F_1 cet effort, inconnu, de traction dans l'élément (1).

L'élément (2) subit donc un effort de traction réel :

$$F_2 = F - F_1$$

Pour déterminer F_1 il suffit d'écrire que *les deux éléments doivent subir le même allongement*, sous l'action de leurs efforts respectifs, puisqu'ils sont reliés intimement l'un à l'autre et que, par hypothèse, leurs extrémités B et C sont reliées à des supports rigides [2].

D'après l'équation de déformation en traction simple établie au chapitre VI (§ 1.3), ces allongements ont, respectivement, pour expressions :

élément (1) : $l_1 = \dfrac{F_1 L_1}{E_1 S_1}$;

élément (2) : $l_2 = \dfrac{F_2 L_2}{E_2 S_2} = \dfrac{(F - F_1) L_2}{E_2 S_2}$.

On a donc : $l_1 = l_2$, soit

$$F_1 E_2 S_2 L_1 = F E_1 S_1 L_2 - F_1 E_1 S_1 L_2.$$

On déduit directement de cette *équation de compatibilité d'allongements*, l'expression de l'*effort inconnu* F_1 *dans l'élément* (1)

$$F_1 = F \frac{E_1 S_1 L_2}{E_1 S_1 L_2 + E_2 S_2 L_1}$$

soit

$$\boxed{F_1 = \frac{F}{1 + \dfrac{E_2 S_2 L_1}{E_1 S_1 L_2}}}.$$

De la relation $F_2 = F - F_1$ on déduit immédiatement l'expression de l'effort F_2 dans l'élément (2)

$$\boxed{F_2 = \frac{F}{1 + \dfrac{E_1 S_1 L_2}{E_2 S_2 L_1}}}$$

Ce système hyperstatique simple est donc *résolu*.

1.32 Propriétés générales, déduites de cet exemple simple.

1.321 *La résolution d'un système hyperstatique n'est valable qu'en période élastique des matériaux qui le constituent.* — Nous avons, en effet, appliqué ci-dessus une formule *d'allongement élastique* liée aux valeurs des modules d'élasticité E_1 et E_2 qui ne sont valables qu'en période élastique [3].

Il découle immédiatement, de cette propriété, la conséquence suivante: *Un essai statique à rupture ne peut, à priori, donner aucune justification d'un calcul hyperstatique.*

Remarque. — Il n'en subsiste pas moins que les calculs peuvent être

---

1. — Le système est donc *surabondant au premier degré.*

2. — C'est-à-dire, plus précisément, à des supports aussi rigides l'un que l'autre. Voir ci-après.

3. — Nous avons vu au chapitre XVI (§ 3.1) qu'en réalité, le module d'élasticité n'est constant qu'en *période de proportionnalité.* Rappelons que, pour les problèmes courants de résistance des matériaux, on admet une valeur moyenne de E valable jusqu'à la limite élastique conventionnelle. Signalons qu'au surplus, dans ce cas simple, on obtiendrait une solution exacte en *période plastique*, en utilisant les *modules tangents* (diagrammes de traction) qui correspondraient aux contraintes atteintes.

conduits avec des charges dites « à la rupture ». Ne voir alors, dans ces charges, que l'influence d'un simple jeu de coefficient affectant celles de limite élastique.

1.322 *En général, un système hyperstatique ne peut pas être d'égale résistance.* — En effet, désignons par n_1 et n_2 les contraintes respectives des éléments (1) et (2)

$$n_1 = \frac{F_1}{S_1} \qquad \text{et} \qquad n_2 = \frac{F_2}{S_2}.$$

L'équation de comptabilité $l_1 = l_2$ s'écrit directement

$$\frac{n_1 L_1}{E_1} = \frac{n_2 L_2}{E_2}$$

d'où

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{E_1}{E_2}\frac{L_2}{L_1} = k\frac{L_2}{L_1}$$

en désignant par k le rapport des modules d'élasticité E_1 et E_2.

Pour que le système soit *d'égale résistance*, il faudrait que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit *constant* et égal au rapport : $\frac{n_{1a}}{n_{2a}}$ des *contraintes admissibles* des deux matériaux. Cette circonstance ne peut se produire que pour une *valeur particulière* du rapport des longueurs des deux éléments, telle que

$$\frac{L_1}{L_2} = k\frac{n_{2a}}{n_{1a}}.$$

C'est un cas particulier de construction.

Donc, en général, la matière n'est pas utilisée au maximum dans un système hyperstatique qui apparaît ainsi, *à priori*, comme devant être plus lourd qu'un système isostatique [1].

1.323 *Le dimensionnement d'un système hyperstatique ne peut se faire, en général, que par approximations successives.* — Nous voyons, en effet, d'après les expressions de F_1 et F_2 ci-dessus, qu'il faut connaître les dimensions des différents éléments pour déterminer les efforts et les contraintes qu'ils supportent. Si l'on recherche justement la détermination de ces dimensions, on ne pourra le faire que par approximation, à moins qu'on puisse mettre le problème en équation générale, ce qui n'est pas toujours possible.

1.324 *Dans un système hyperstatique, la participation d'un élément à la transmission des efforts généraux est proportionnelle à la rigidité de cet élément.* — En effet, considérons toujours l'exemple précédent. L'effort dans l'élément (1) a pour expression

$$F_1 = \frac{F}{1 + \frac{E_2 S_2 L_1}{E_1 S_1 L_2}}.$$

Si l'on *augmente* la section S_1 de cet élément, on diminue le dénominateur, donc on augmente l'effort F_1. Inversement, si l'on *diminue* la section S_1, on *diminue* l'effort F_1 dans l'élément.

On verrait, de même, que l'effort dans l'élément (2) augmente avec sa section.

1. — Cette conclusion est une de celles qui permettent de proscrire l'emploi des systèmes hyperstatiques quand leur emploi n'est pas absolument nécessaire.

Donc, *l'effort supporté par un élément du système varie dans le même sens que sa section, c'est-à-dire que sa rigidité.*

Remarques. — *a*) d'une façon plus générale, il faudrait raisonner avec les *paramètres de rigidité des éléments* qui sont $E_1 S_1$ et $E_2 S_2$ dans l'exemple précédent.

On désigne, en effet, par *paramètres de rigidité* les produits suivants :

en traction ou compression : E S,
en cisaillement : G S,
en flexion : E I,
en torsion : G I_0 ou, plus généralement, G J.

On peut remarquer, en effet, que ces produits entrent au même titre dans les équations de déformations établies au cours des chapitres VI à XIII.

b) La *contrainte* de la barre a pour expression

$$n_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F}{S_1 + \frac{E_2 S_2 L_1}{E_1 L_2}}.$$

Si S_1 *augmente,* le dénominateur augmente, donc la *contrainte diminue.*

On *renforce* donc toujours un élément d'un système hyperstatique *en augmentant sa section,* contrairement à ce qu'un examen superficiel de la conclusion ci-dessus pourrait laisser croire.

1.325 *Les conditions de rigidités relatives des liaisons extérieures sont très importantes dans un calcul hyperstatique.* — Pour résoudre l'exemple simple précédent, nous avons dû supposer égales les *rigidités* des appuis des deux éléments.

D'une façon imagée, nous avons admis qu'un « bloc rigide » tel que celui représenté figure 5 *c* réunissait les supports B et D D′.

Si, par contre, le support de la barre avait été élastique par rapport à celui du tube, il aurait fallu tenir compte de sa déformation dans l'équation d'allongement de la barre, ce qui aurait modifié les résultats.

Il faut donc faire attention aux *conditions de rigidités relatives des liaisons extérieures d'un système hyperstatique.*

On se rend compte de ce que le calcul d'un tel système est beaucoup plus complexe que celui d'un système isostatique, où les déplacements des points de liaison influent, en général, d'une façon peu sensible sur les efforts (simples variations de bras de levier le plus souvent négligeables).

On voit également, qu'à cet égard, la résolution d'un système hyperstatique *exclusivement intérieur* sera toujours plus précise que celle d'un système hyperstatique extérieur, puisque ce premier système n'est pas influencé par des conditions de rigidité extérieures toujours délicates à estimer.

2. DIFFÉRENTES MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES

2.1 RÈGLES GÉNÉRALES.

Pour résoudre un système hyperstatique, il y a lieu, d'une façon générale, d'effectuer successivement les opérations suivantes :

a) *Rendre le système isostatique* en supprimant autant de liaisons

extérieures et en effectuant autant de coupures fictives (liaisons intérieures) qu'il est nécessaire [1].

Nous savons (§ **1.23**) que cette opération préliminaire permet de connaître le *degré de surabondance du système étudié.*

Nous désignerons, d'une façon générale, par « *système coupé* » ce système ainsi rendu isostatique.

b) *Déterminer les efforts agissant sur le système coupé* (efforts tranchants ; moments fléchissants, moments de torsion).

Cette détermination s'opère sans difficulté à l'aide des méthodes usuelles de calcul des systèmes isostatiques.

c) Remplacer les efforts de liaison (forces ou moments) supprimés pour rendre le système isostatique, par des *efforts inconnus.*

d) Ecrire que les *déformations* du système coupé sous l'action *des charges extérieures* (efforts déterminés en *b* ci dessus), d'une part, et sous l'action des *efforts inconnus seuls*, d'autre part, sont *compatibles.*

On obtient ainsi une *condition de compatibilité de déformations* qui s'exprime par une ou plusieurs équations, ou parfois par un simple raisonnement et qui permet de connaître les inconnues cherchées.

C'est précisément dans la manière d'écrire cette compatibilité de déformations que les diverses méthodes de résolution diffèrent entre elles.

Nous allons, ci-après, exposer succinctement les méthodes les plus usuelles et en effectuer, *à priori*, un examen critique.

2.2 METHODE DES DEPLACEMENTS.

C'est celle qui vient le plus naturellement à l'esprit.

On calcule le déplacement du système coupé, sous l'action des forces extérieures seules, au niveau des points où l'on a supprimé des liaisons surabondantes. On détermine ensuite, en ces mêmes points, les déplacements dus aux efforts de liaison inconnus seuls. Ces derniers déplacements s'expriment donc en fonction des inconnues. En *égalant les déplacements* qui correspondent à un même point, on obtient une équation, ou un système d'équations, qui permet de connaître les inconnues cherchées.

Exemple. — Considérons une *poutre rectiligne continue reposant sur trois appuis* A, B et C (fig. 6 *a*) chargée par un système de forces normales à sa direction.

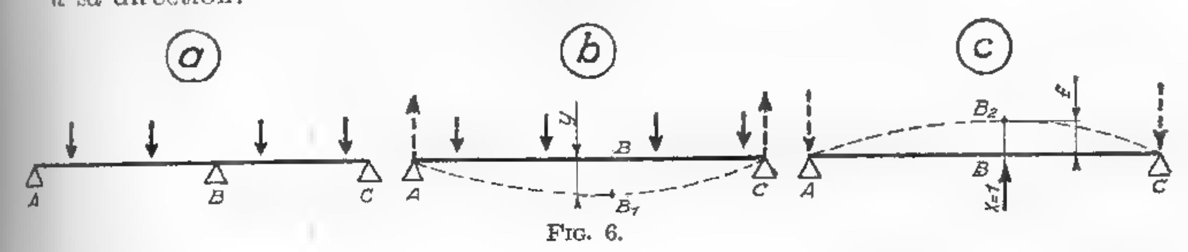


Fig. 6.

Supposons, par exemple, l'appui médian B supprimé. Nous obtenons ainsi un système isostatique (poutre sur deux appuis). Nous pouvons donc déterminer sa flèche y au niveau du point B (calcul algébrique ou graphique, chap. X, § **3.** ou **4.**). Désignons par X la réaction réelle inconnue de l'appui B. Appliquons en B une force unitaire $x=1$ dirigée dans le sens de X. Elle produit, à elle seule, une flèche f facile à déterminer (chap. X, § **4.6**).

La force X produit donc, fictivement, dans ce « système coupé » une

1. — Les applications données aux paragraphes suivants montreront, dans chaque cas particulier, le choix le plus élégant de ces sections de coupure.

flèche X fois supérieure à f, c'est-à-dire : fX. Comme la flèche réelle en B doit être nulle (appui) on a donc en valeur absolue

$$y = f\,X$$

d'où

$$X = \frac{y}{f}.$$

Remarques. — Cette méthode, très simple en apparence, se complique sérieusement quand on a affaire à des systèmes moins simples que celui ci-dessus [1]. Elle exige le calcul de déplacements qui ne sont, en réalité, que des valeurs fictives puisqu'ils concernent le système supposé coupé. Elle présente de sérieux risques d'erreurs dus aux sens des déplacements.

2.3 METHODE ALGEBRIQUE BASEE SUR L'ÉQUATION DE LA LIGNE ELASTIQUE DEFORMEE DES POUTRES DROITES.

Nous avons vu au chapitre V, paragraphe **1.**, que *l'équation générale de la ligne élastique déformée* d'une poutre fléchie, initialement rectiligne, était donnée par la relation

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}.$$

(Dans le cas d'une poutre hyperstatique, les inconnues entrent dans l'équation de M, en supplément à la variable x : abscisse des sections comptée suivant la longueur de la poutre.) La méthode revient à déterminer les *constantes d'intégration* de cette équation différentielle, en tenant compte des conditions de déformations (flèches ou angles nuls) imposées par les liaisons surabondantes. On obtient ainsi les *équations complémentaires* des équations d'équilibre statique qui permettent de lever l'indétermination du système et de calculer directement ses efforts appliqués et flèches réelles.

Cette méthode est la plus utilisée dans la plupart des ouvrages courants où ne sont envisagés que des cas simples. Elle présente l'inconvénient d'exiger la connaissance du calcul différentiel qui devient vite très ardu pour des systèmes de charges non simples. De plus, cette méthode qui ne s'applique qu'aux poutres *rectilignes* et soumises uniquement à de la *flexion* [2] n'est pas générale.

2.4 METHODE DITE DES « SURFACES DE MOMENTS » [3].

C'est également une méthode de résolution applicable aux *poutres fléchies*, ces poutres pouvant être *rectilignes ou courbes*.

Elle repose sur des *propriétés géométriques* simples de la courbe $\frac{M}{EI}$ tracée le long de la poutre elle-même (poutres rectilignes) ou le long de la développée de cette poutre (poutres courbes ou portiques). Ces propriétés sont les suivantes :

2.41 Première propriété : ou théorème des surfaces de moments. — *Pour toute poutre fléchie, la rotation élastique relative des deux sections est mesurée par l'aire du diagramme* $\frac{M}{EI}$ *comprise entre ces deux sections.*

---

1. — En particulier quand il faut envisager des déplacements en rotation (influences d'encastrements, par exemple).

2. — Il est à remarquer que cette méthode néglige les flèches complémentaires de cisaillement.

3. — Cette méthode fait l'objet d'un exposé très complet dans la Note n° 15 STAé/EG du 11-1-43. Elle est reproduite dans l'ouvrage « Leçons sur la résistance des matériaux », par J. GÉRARDIN.

Nous avons démontré et utilisé cette propriété au chapitre X, paragraphe 1.3 et 2.3), lors du calcul des rotations relatives des sections des poutres isostatiques.

Exemple (fig. 7 *a*). — La rotation relative α_{ba} de la section *b* par rapport à la section *a* d'une poutre sur deux appuis est donnée, à une échelle près, par l'aire hachurée S.

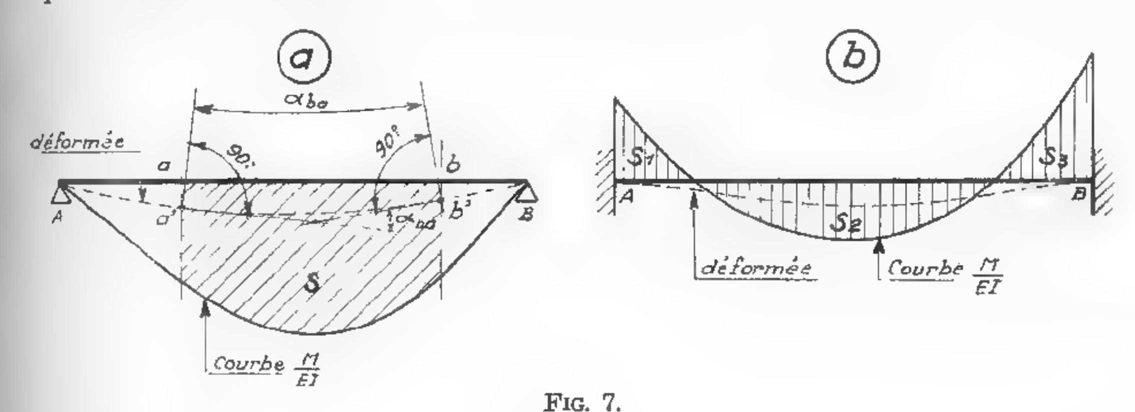


Fig. 7.

Utilisation de cette propriété. — Les encastrements d'une poutre bi-encastrée, par exemple (fig. 7 *b*), imposent à la déformée des tangentes dirigées suivant AB. On a donc une *rotation relative nulle* entre A et B. On doit, par suite, avoir une courbe M/EI telle que (en valeurs absolues)

$$S_1 - S_2 + S_3 = 0.$$

2.42 Deuxième propriété : ou théorème des moments de surface des moments. — *La flèche en un point b comptée à partir de la tangente en un point a à la fibre moyenne déformée d'une poutre fléchie est mesurée par le moment statique par rapport à la section b de l'aire du diagramme* $\frac{M}{EI}$ *comprise entre les ordonnées des deux points a et b.*

Exemple (fig. 8 *a*). — La *flèche relative* y_{ba}, c'est-à-dire la distance $b'c$ comptée normalement à la direction initiale AB de la poutre, est donnée, à une échelle près, par

$$y_{ba} = S\ d.$$

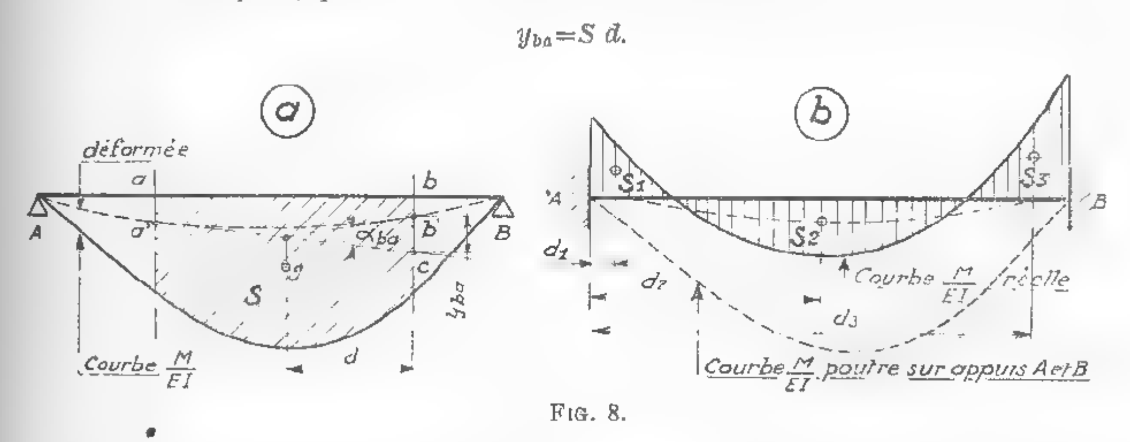


Fig. 8.

Remarque. — Les tangentes en a' et b' à la déformée se coupent sur la verticale du centre de gravité *g* de S (statique graphique). On démontre ainsi la propriété ci-dessus, puisque

$$S = \alpha_{ba} \quad \text{(en radians)}$$

et que

$$y_{ba} = \alpha_{ba} \cdot d$$

(en assimilant la corde *b c* à l'arc de cercle de centre *g* passant par ses extrémités).

Utilisation de cette propriété. — Les extrémités A et B de la poutre bi-encastrée, figure 8 *b*, doivent avoir une flèche relative nulle donc, la courbe $\frac{M}{EI}$ doit être telle que (surfaces en valeurs absolues).

$$S_1\ d_1 - S_2\ d_2 + S_3\ d_3 = 0.$$

Cette condition, jointe à celle du paragraphe précédent, permet de déterminer l'allure réelle de la courbe $\frac{M}{EI}$ et, par suite du moment M cherché.

On commencera donc, pratiquement, par tracer la courbe $\frac{M}{EI}$ du système rendu isostatique (deux appuis simples en A et B par exemple (fig. 8 *b*) ; puis on « redressera » cette courbe de façon à satisfaire aux conditions ci-dessus [1].

2.43 **Remarques.** — Cette méthode, qui donne lieu à des solutions purement *géométriques* des systèmes hyperstatiques, est très séduisantes, par suite des raisonnements qu'elle implique ; mais ces raisonnements deviennent vite très ardus dans les cas non simples.

Elle exige la *connaissance préalable de l'allure de la déformée*, ce qui n'est pas toujours très simple, notamment pour les poutres courbes [2].

Elle ne s'applique qu'exclusivement aux poutres fléchies, en négligeant toujours leurs flèches complémentaires de cisaillement.

2.5 MÉTHODE DES DÉRIVÉES DU POTENTIEL INTERNE DE DÉFORMATION (OU MÉTHODE DU TRAVAIL MINIMUM).

Nous avons signalé, en introduction au présent chapitre, paragraphe **0.**, que nous utiliserions, de préférence, la méthode exposée ci-après, pour résoudre les systèmes hyperstatiques.

Nous serons conduits, pour son exposé, à admettre, sans démonstration générale, son principe fondamental. Nous le vérifierons, par contre, dans un cas particulier simple. Nous constaterons également, au cours des chapitres suivants l'équivalence de ses résultats avec ceux procurés, avec des raisonnements plus longs, par l'une ou l'autre des méthodes ci-dessus.

2.51 **Travail élastique, ou potentiel interne, de déformation.** — Au cours de l'étude des différentes sollicitations des poutres, nous avons établi les expressions du travail élastique de déformation dans chaque cas particulier.

Rappelons ces expressions, avec leurs références :

Traction ou compression (effort normal désigné, d'une façon générale, par N)

$$\mathcal{E}_N = \sum \frac{N^2}{2\ E\ S} \Delta L. \qquad \text{(chap. VI, § 1.4 et 2,2)}$$

Flexion (moment fléchissant M).

$$\mathcal{E}_F = \sum \frac{M^2}{2\ E\ I} \Delta L. \qquad \text{(chap. IX, § 3.4)}$$

1. — Cette méthode se désigne encore sous le vocable de « méthode du balancement des aires ».

2. — Des conventions de signes, peuvent suppléer à cette connaissance, mais leur emploi reste, généralement, difficile à observer.

Cisaillement (effort tranchant T).

$$\mathscr{E}_C = \sum \frac{T^2}{2\ G\ S'} \Delta L \qquad \text{(chap. VIII, § 4.3)}$$

(S′ étant une section fictive telle que $\frac{T}{S'}$ soit égal à la valeur moyenne de la contrainte le long de la section).

Torsion (moment de torsion M_t)

$$\mathscr{E}_T = \sum \frac{M_t^2}{2\ G\ J} \Delta L. \qquad \text{(chap. XIII, § 2.3)}$$

Le travail élastique total ou potentiel interne d'une poutre subissant tous ces efforts est la somme de tous ces travaux, soit

$$U = \mathscr{E}_N + \mathscr{E}_F + \mathscr{E}_C + \mathscr{E}_T$$

Remarque. — Généralement, un de ces termes est prépondérant par rapport aux autres. On le désigne alors par *travail de déformation principal ou potentiel interne principal* et l'on peut, généralement, négliger les autres avec une approximation suffisante. C'est ce que nous ferons dans la plupart des cas.

2.52 Théorème de Castigliano ou des dérivées du potentiel interne.

2.521 *Enoncé.* — Ce théorème, sur lequel repose toute la théorie ci-après, s'énonce ainsi :

Soit un système quelconque, isostatique ou hyperstatique, soumis à un système de forces extérieures. La projection λ, sur la direction d'une force quelconque X (force appliquée ou force de liaison), du déplacement élastique du point d'application de cette force est égale à la dérivée partielle par rapport à X du potentiel interne de déformation du système

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial X}.$$

De même, la projection θ de la rotation d'un moment μ est égale à la dérivée partielle du potentiel par rapport à μ

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial \mu}.$$

2.522 *Interprétation physique.* — Considérons une poutre quelconque, par exemple la poutre en arc représentée figure 9 *a*. Cette poutre est soumise à un certain système de charges extérieures. Supposons que la force X représente l'une de ces charges qui agit en un point A suivant la direction MN. Si la force X varie d'intensité, la flèche de la poutre, et donc son travail interne (dû à l'ensemble des charges), vont également varier. Supposons que la courbe (1), figure 9 *b*, représente la variation de cette fonction

$$U = f\,(X).$$

Traçons la courbe (2) représentant la fonction dérivée de la courbe (1) par rapport à X, c'est-à-dire la fonction

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial X} = f'\,(X) \qquad \text{(chap. I, § 4.1).}$$

Le théorème de Castigliano signifie que cette courbe (2) fournira, pour chaque valeur de X, la projection λ sur la direction MN du déplacement élastique AA′ de A (ce déplacement étant dû à l'ensemble des sollicitations appliquées, y compris la force X).

Exemple figure 9 *b* : Pour $X=X_1$, l'ensemble des forces appliquées, y compris la force X_1, donne lieu à un déplacement de projection $\lambda_1=PP'$.

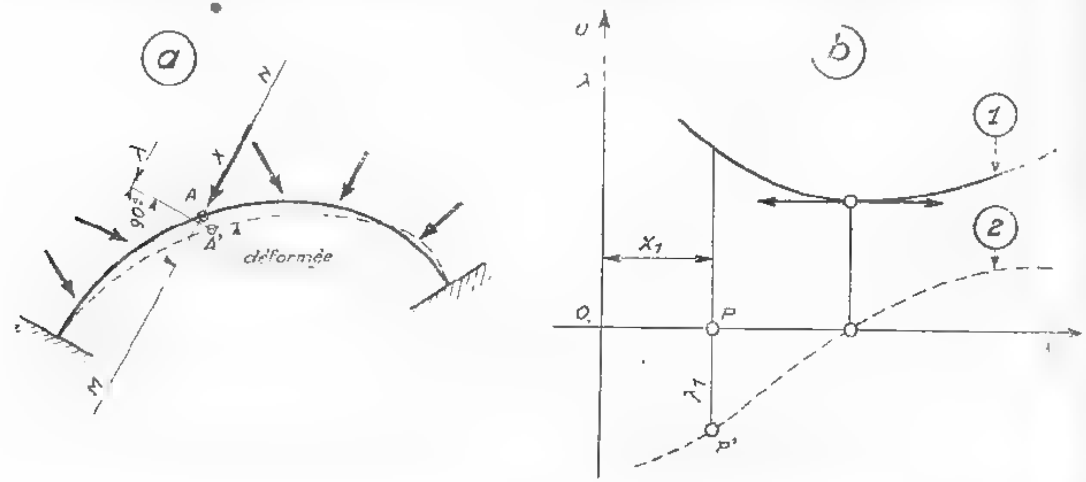


Fig. 9.

2.523 *Vérification dans un cas simple.* — Considérons une barre rectiligne soumise à une *traction pure* d'intensité X. Nous savons que son allongement l est donné par

$$l=\frac{XL}{ES}$$

(avec L = longueur et ES = paramètre de rigidité en traction de la barre. Chapitre VI, paragraphe 1.3).

D'autre part son travail élastique a pour expression

$$\mathscr{E}_T=U=\frac{X^2}{2}\frac{L}{ES}.$$

Dérivons U par rapport à X ; nous devons obtenir la projection de l'allongement de la barre sur la direction de X, c'est-à-dire dans ce cas particulier, l'allongement l lui-même. Or

$$\frac{dU}{dX}=\frac{2}{2}\frac{XL}{ES}=\frac{XL}{ES}=l.$$

2.53 Théorème de Ménabréa ou du travail minimum.

2.531 *Enoncé. — Soit un système hyperstatique soumis à un système quelconque de charges extérieures. Si les points d'application de ses liaisons surabondantes sont immobiles, les valeurs de ces liaisons sont telles que chacune d'elles rende minimum le potentiel interne de déformation du système.*

2.532 *Démonstration.* — Supposons que la force X soit une *force de liaison immobile*. Ce serait, par exemple, le cas d'une *réaction* provenant d'un *appui fixe* (*liaison extérieure rigide*). C'est également le cas d'une *force de liaison intérieure* assurant la continuité à travers une coupure fictive, puisque cette force s'équilibre directement sur l'autre bord de la coupure et, par suite, n'a aucun *déplacement relatif* par rapport à la poutre à laquelle elle est intimement liée [1].

1. — Il y a lieu, en effet, pour les forces intérieures, d'envisager uniquement leur *déplacement relatif par rapport à la poutre*, puisqu'elles n'engendrent qu'exclusivement, un *travail intérieur*, c'est-à-dire un travail de la matière de la poutre. Par contre une liaison extérieure mobile (appui dénivelable, par exemple) engendre un travail extérieur dû à son déplacement.

D'après le théorème de CASTIGLIANO, nous avons donc

$$\lambda = \frac{\partial U}{\partial X} = 0.$$

Or, nous savons qu'une fonction dont la dérivée s'annule passe par un maximum ou un minimum (Chap. 1, § 4.). On démontre ici que la fonction primitive, c'est-à-dire le potentiel interne, passe par un *minimum*.

Le raisonnement est identique pour un moment μ.

2.533 *Remarques.* — *a)* Le théorème de MÉNABRÉA est d'un emploi plus restreint que le théorème de CASTIGLIANO dont il constitue un *cas particulier*. Il ne s'applique, en effet, qu'aux *liaisons* (forces ou moments) *surabondantes* et *immobiles*. Rappelons que c'est le cas de toutes les *liaisons intérieures surabondantes de continuité* (Note [1] précédente), mais seulement le cas des *liaisons extérieures indéformables* par rapport aux autres liaisons extérieures du système auquel elles appartiennent. (Voir ci-après paragraphe **4.** calcul des poutres continues sur appuis.)

b) On peut imager physiquement le théorème de MÉNABRÉA en considérant que la matière travaille toujours le moins possible, c'est-à-dire au « rendement optimum ».

2.54 **Conclusion.** — Pour résoudre un système hyperstatique par la méthode des dérivées du potentiel interne, on commencera donc par écrire l'*expression algébrique de ce potentiel interne* U, en fonction des forces appliquées et des liaisons surabondantes inconnues X, Y, Z...

Si ces liaisons surabondantes sont immobiles, on écrira que les *dérivées partielles* de U par rapport à X, Y, Z... sont *nulles* (théorème de MÉNABRÉA).

Si les liaisons sont mobiles, on écrira que les *dérivées partielles* de U sont respectivement égales aux *déplacements* des inconnues auxquelles elles se rapportent (théorème de CASTIGLIANO). On obtiendra ainsi un système d'équations du premier degré en nombre égal à celui des inconnues.

L'ensemble de ces deux théorèmes fournit donc une méthode de résolution absolument *générale* de tous les systèmes hyperstatiques. Nous verrons qu'il permet, au surplus, un calcul particulièrement élégant des déplacements élastiques des systèmes quelconques.

2.55 **Formulaire mathématique.**

2.551 *Hypothèses et notations générales.* — L'application de cette méthode nécessite donc la connaissance de l'expression algébrique du *potentiel interne* et de ses *dérivées partielles*.

Nous allons, ci-après, donner l'allure de ces expressions en nous limitant au cas, le plus usuel, où le potentiel interne U ne comprend qu'un seul mode de travail (*travail de déformation principal*, voir ci-dessus § **2.51**).

Nous verrons, au cours des applications suivantes, que le *potentiel interne* affecte, dans ce cas, *l'allure générale* donnée par la formule suivante

$$U = \sum \frac{(A + \alpha X + \beta Y + \gamma Z \quad \ldots)^2}{2B} \Delta l.$$

Dans cette formule : A représente un effort (force ou moment) ; B un paramètre de rigidité propre au mode de travail considéré ; α, β, γ... des paramètres de sections et X, Y, Z... les inconnues hyperstatiques.

Tous ces termes sont fonctions de la variable générale Δl qui représente un élément de longueur du système (longueur développée dans le cas d'un arc).

Nous reproduirons, ci après, l'*allure particulière* de cette expression

et nous indiquerons ses *dérivées partielles* dans le cas des systèmes comprenant une à trois inconnues hyperstatiques.

2.552 *Cas d'une seule inconnue :* X.

$$U = \sum \frac{(A + \alpha X)^2}{2B} \Delta l$$

$$\frac{dU}{dX} = \sum \frac{A\alpha}{B} \Delta l + X \sum \frac{\alpha^2}{B} \Delta l.$$

2.553 *Cas de deux inconnues :* X et Y.

$$U = \sum \frac{(A + \alpha X + \beta Y)^2}{2B} \Delta l$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \sum \frac{A\alpha}{B} \Delta l + X \sum \frac{\alpha^2}{B} \Delta l + Y \sum \frac{\alpha\beta}{B} \Delta l$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \sum \frac{A\beta}{B} \Delta l + X \sum \frac{\alpha\beta}{B} \Delta l + Y \sum \frac{\beta^2}{B} \Delta l.$$

2.554 *Cas de trois inconnues :* X, Y et Z.

$$U = \sum \frac{(A + \alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2}{2B} \Delta l$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \sum \frac{A\alpha}{B} \Delta l + X \sum \frac{\alpha^2}{B} \Delta l + Y \sum \frac{\alpha\beta}{B} \Delta l + Z \sum \frac{\alpha\gamma}{B} \Delta l$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \sum \frac{A\beta}{B} \Delta l + X \sum \frac{\alpha\beta}{B} \Delta l + Y \sum \frac{\beta^2}{B} \Delta l + Z \sum \frac{\beta\gamma}{B} \Delta l$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \sum \frac{A\gamma}{B} \Delta l + X \sum \frac{\alpha\gamma}{B} \Delta l + Y \sum \frac{\beta\gamma}{B} \Delta l + Z \sum \frac{\gamma^2}{B} \Delta l.$$

2.555 *Remarques.* — *a*) Nous nous limiterons au cas de trois inconnues.

Il est d'ailleurs facile de généraliser ces expressions pour un nombre supérieur d'inconnues en remarquant que les différents termes d'une même dérivée partielle se déduisent de ceux de l'expression de U en les multipliant par le paramètre relatif à l'inconnue considérée.

b) Tous les termes affectés du signe Σ qui entrent dans ces expressions générales représentent des *intégrations* de fonctions effectuées le long de la poutre. Nous verrons que, pratiquement, ces intégrations se calculent, soit par *sommes de produits partiels*, soit *par planimétrages* des courbes représentatives de leurs fonctions.

On voit que :

Pour 1 inconnue on a 2 termes différents à calculer.
Pour 2 inconnues on a 5 termes différents à calculer.
Pour 3 inconnues on a 9 termes différents à calculer.

D'une façon générale, pour un système à n inconnues hyperstatiques, on a un nombre N de termes *différents* à calculer, défini par la relation

$$\boxed{N = \frac{n}{2}(n+3).}$$

Exemple $n = 6$, $N = 3 \times 9 = 27.$

Nous voyons, dès maintenant, qu'un calcul hyperstatique comportant

un nombre élevé d'inconnues exigera un calcul matériel important, sinon compliqué [1].

c) L'exposé général de cette méthode a pu paraître un peu ardu. Les applications ci-après la concrétiseront et montreront sa supériorité pratique sur les autres méthodes.

Quant au « formulaire mathématique » ci-dessus, il suffira de s'y reporter dans chaque cas particulier pour obtenir, sans effort, la mise en équation du problème étudié.

3. CALCUL DES SYSTÈMES TRIANGULÉS HYPERSTATIQUES

3.1 RAPPEL DE PROPRIETES.

L'étude des systèmes triangulés isostatiques a été effectuée au chapitre VII, paragraphes **3.** et **4.**).

Nous avions préalablement établi les conditions nécessaires et suffisantes pour que les systèmes triangulés soient *strictement indéformables*, c'est-à-dire *isostatiques*. Ces « *conditions de triangulation* » s'énonçaient par les relations suivantes entre les nombres n de nœuds et b de barres

systèmes plans : $b = 2\,n - 3$,
systèmes à trois dimensions : $b = 3\,n - 6$.

Si le nombre de barres b est supérieur à celui défini par les égalités ci-dessus, on a affaire à des *systèmes hyperstatiques intérieurs* [2].

Le *degré de surabondance* de ces systèmes est précisément donné par la différence qui existe entre le nombre réel b et sa valeur définie par les relations ci-dessus.

3.2 RESOLUTIONS D'UN SYSTEME TRIANGULE PLAN A UNE BARRE SURABONDANTE.

3.21 **Données.** — Considérons, par exemple, la poutre plane triangulée représentée figure 10 *a*. Elle est soumise à l'action des forces P_1, P_2, P_3, P_4 appliquées à ses nœuds et elle s'équilibre extérieurement aux nœuds C et D (articulation en D et appui dirigé en C d'où système isostatique extérieurement).

Le système comporte : $b = 14$ barres et $n = 8$ nœuds. Or, $2n - 3 = 13$. Le système possède donc *une barre surabondante*.

3.22 **Opérations successives.** — Nous suivrons les règles préliminaires générales énoncées au paragraphe **2.1** ci-dessus et nous utiliserons la méthode des dérivées du potentiel interne.

3.221 *Système rendu isostatique.* — Pour rendre le système isostatique, il suffit de supprimer l'une, quelconque, de ses barres.

Choisissons, par exemple, la Barre AB [3] et supprimons son influence

1. — Pratiquement, la « mise en œuvre », c'est-à-dire la disposition matérielle des calculs reste l'un des facteurs prépondérants pour la réussite d'un calcul hyperstatique. Nous insisterons sur ce point dans les applications à suivre.

2. — Un système triangulé, même strictement indéformable, peut également être hyperstatique extérieurement. Il suffirait, par exemple, qu'un système plan repose sur plus de deux appuis simples. Nous ne nous occuperons, ici, que de la surabondance intérieure qui constitue une caractéristique propre aux systèmes eux-mêmes.

3. — On aura toujours intérêt, pour les opérations graphiques à suivre, à choisir une barre située sur le contour extérieur du système.

en supposant que cette barre est simplement « décrochée » du nœud A, ce qui revient à la couper en une section A' très voisine du nœud A (fig. 10 *b*)[1].

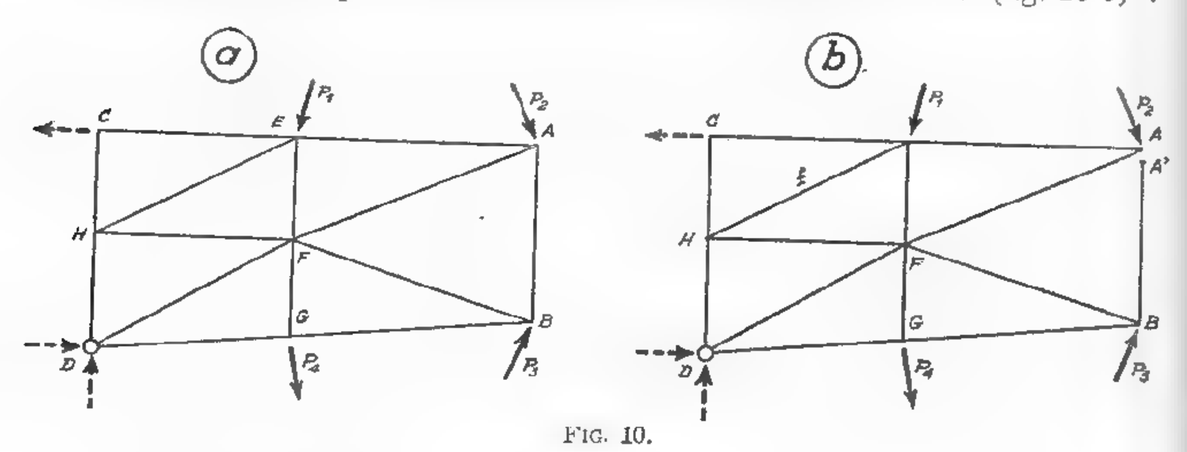


FIG. 10.

3.222 *Efforts dans le système coupé.* — La détermination des efforts, dus aux charges extérieures, qui agissent sur les barres du système coupé (fig. 10 *b*) se fait, sans difficulté, à l'aide des méthodes de résolution des systèmes triangulés plans isostatiques (tracé de Crémona, par exemple, voir Chap. VII, § 3.).

Désignons, d'une façon générale, par *f* l'effort agissant dans une barre quelconque[2] (fig. 10 *b*).

3.223 *Efforts dus à la liaison surabondante.* — Désignons par X l'effort inconnu qui agit réellement dans la barre surabondante AB. Supposons, *à priori*, que cet effort soit une *compression*, c'est-à-dire qu'il soit affecté d'un signe positif, selon nos conventions habituelles (chap. VII, § 3.43).

Appliquons, aux deux bords de la coupure A et A' deux forces égales à ± 1 de sens tel qu'elles tendent également à comprimer la barre AB. (La force appliquée en A' doit donc être dirigée vers B. Voir fig. 11 *a*.)

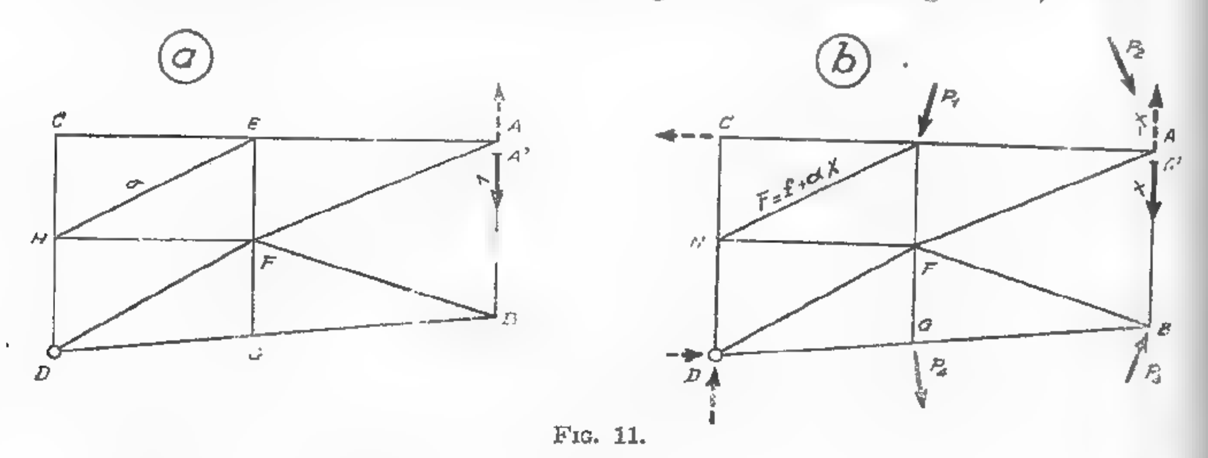


FIG. 11.

Effectuons la détermination des efforts, dans les barres du système coupé, dus à ce système de deux forces unitaires en équilibre (tracé de Crémona par exemple). Remarquons que les réactions extérieures seront nulles puisque le système est équivalent à zéro, extérieurement. Désignons par α l'effort dans une barre quelconque, en ayant soin d'adopter, pour évaluer

1. — On pourrait supposer la barre coupée en un endroit quelconque, mais les opérations à suivre seraient plus compliquées.

2. — L'effort *f* dans la barre coupée AB est évidemment nul.

ces efforts α, la même convention de signes que celles utilisée pour les efforts f.

La force de liaison X produit, dans les barres, un effort X fois supérieur à α c'est-à-dire un effort [1] αX.

3.224 *Expression du potentiel interne.* — L'effort réel F agissant dans une barre quelconque résulte de la superposition de l'effort dû aux charges extérieures seules (système coupé) et de l'effort dû à la force de liaison X. Il a donc pour expression

$$F = f + \alpha X.$$

En désignant par L, E et S, la longueur, le module d'élasticité et la section (constante) de cette barre, son travail élastique a pour valeur (travail de traction simple)

$$\Delta U = \frac{F^2}{2\,ES} L = \frac{(f+\alpha X)^2}{2\,ES} L.$$

Le potentiel interne du système, c'est-à-dire le travail élastique de l'*ensemble des barres* a donc pour expression

$$U = \Sigma \Delta U = \sum \frac{(f+\alpha X)^2}{2\,ES} L$$

le signe Σ s'étendant à *toutes les barres du système* (barre AB comprise).

3.225 *Détermination de l'inconnue* X. — Nous avons bien obtenu une expression du potentiel interne ayant la forme générale donnée au paragraphe **2.552** avec

$$A = f\,; \qquad B = ES\,; \qquad \text{et } \Delta l = L \quad \text{dans ce cas particulier.}$$

Nous avons donc

$$\frac{dU}{dX} = \sum \frac{f\alpha}{ES} L + X \sum \frac{\alpha^2}{ES} L.$$

Comme l'inconnue X est un effort de liaison interne et, par suite, *immobile*, relativement au système, nous pouvons appliquer directement le théorème du travail minimum (§ **2.53**), c'est-à-dire écrire

$$\frac{dU}{dX} = 0$$

soit
$$\sum \frac{f\alpha}{ES} L + X \sum \frac{\alpha^2}{ES} L = 0.$$

Cette équation nous donne immédiatement l'*expression de l'effort inconnu* X *dans la barre surabondante :*

$$\boxed{X = -\frac{\sum \frac{f\alpha}{ES} L}{\sum \frac{\alpha^2}{ES} L}}$$

Remarque importante. – Le résultat trouvé peut être de signe positif ou négatif. Dans le premier cas, cela signifie que le sens *arbitraire* adopté pour X (compression) est conforme au sens réel de l'effort dans la barre. Dans le cas contraire, l'effort est inverse du sens arbitraire adopté ; c'est donc une traction, selon notre convention.

1. — Dans la barre coupée AB, α est égal à $+1$ d'où $\alpha X = X$.

3.226 *Détermination des efforts réels.* — L'effort réel dans une barre quelconque se calcule d'après l'expression générale algébrique ci-dessus

$$F = f + \alpha X$$

avec, toujours, la même convention de signe (quel que soit le signe de X. Voir fig. 11 *b*).

3.23 Disposition pratique des calculs. — Il est commode de disposer les calculs dans un même tableau disposé comme celui-ci ci-dessous

REPÈRE DES BARRES	CARACTÉRISTIQUES				DÉTERMINATION DE X				EFFORTS RÉELS	
	L	S	E	$\frac{L}{ES}$	f	α	$\frac{f\alpha}{ES} L$	$\frac{\alpha^2}{ES} L$	αX	$F = f + \alpha X$
A B	—		-	—	0	1	0	—	X	X
A F	—	—	—	—	.	—	—	—	—	
A E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.										
.										
.										
							$\Sigma = a$	$\Sigma = b$		
							$X = -a/b$			

3.3 RESOLUTION D'UN SYSTEME TRIANGULÉ PLAN A PLUSIEURS BARRES SURABONDANTES.

La marche à suivre est semblable à celle exposée ci-dessus.

Les calculs ne présentent pas plus de difficulté et ne demandent qu'un travail matériel plus important.

Considérons, par exemple, un *cadre triangulé* soumis à un système de forces extérieures et de réactions en équilibre (fig. 12 *a*).

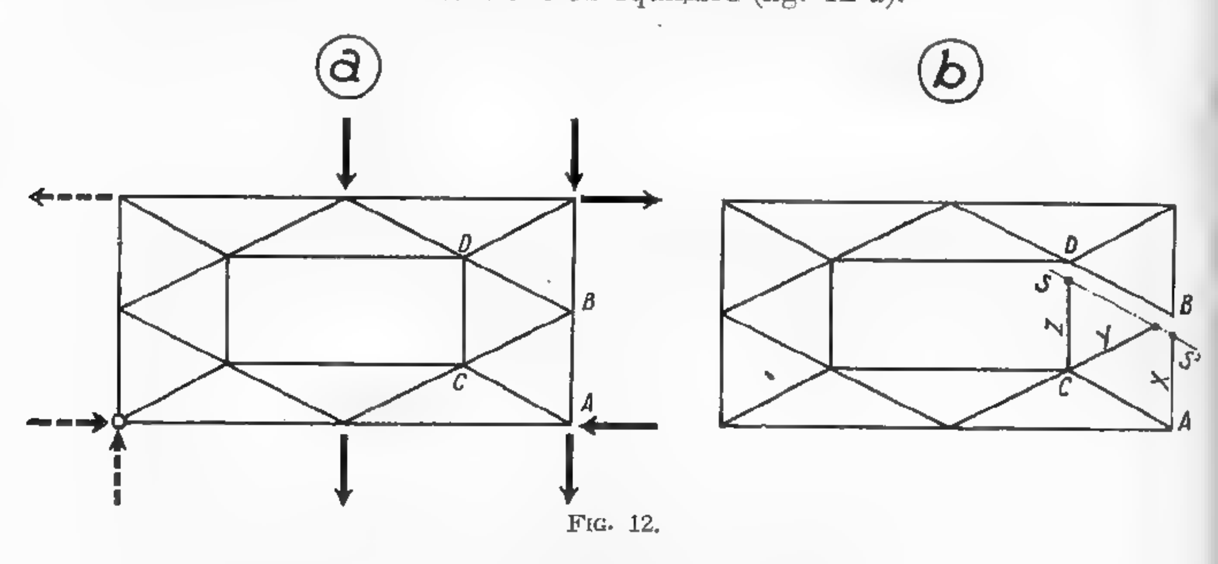


FIG. 12.

Le système comporte $n = 12$ nœuds et $b = 24$ barres.

Or

$$2\,n - 3 = 21.$$

Il y a donc trois barres surabondantes. *Le système est hyperstatique du troisième degré.*

Rendons-le isostatique en coupant trois barres quelconques *par une même section* SS' ; par exemple AB, BC et CD que nous supposerons encore simplement « décrochées » des nœuds B et D (fig. 12 *b*).

Soit f l'effort, dans une barre quelconque du système coupé, dû aux forces extérieures seules et soient X, Y et Z les efforts inconnus agissant respectivement dans les trois barres supprimées AB, BC, CD, que nous supposerons tous dirigés dans le même sens (compression par exemple) [1].

Soit α l'effort dans une barre dû à un seul système de forces unitaires $X=\pm 1$ appliqué en B. De même soient β et γ les efforts dus aux forces unitaires seules $Y=\pm 1$ et $Z=\pm 1$ appliquées respectivement et successivement en B et D.

Ces efforts f, α, β, γ dans chaque barre sont déterminés par des tracés de Crémona, par exemple, effectués, bien entendu, sur le système préalablement coupé. (Il y a donc dans ce cas quatre Crémona à faire.)

Les efforts dans une barre dus aux forces X, Y, Z sont respectivement αX, βY, γZ et l'*effort réel* dans une barre est, par conséquent

$$F=f+\alpha X+\beta Y+\gamma Z.$$

Le *potentiel interne de l'ensemble du système* a donc pour expression

$$U=\sum \frac{(f+\alpha X+\beta Y+\gamma Z)^2}{2\,ES}\,L.$$

Appliquons le théorème du travail minimum (forces X, Y et Z immobiles relativement à la poutre). Nous écrivons

$$\frac{\partial U}{\partial X}=0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial Y}=0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial Z}=0.$$

Nous obtenons trois équations à trois inconnues X, Y, Z, qui sont explicitées dans le « formulaire mathématique » au paragraphe **2.554** (où l'on fait $A=f$ et $B=ES$) dont la résolution fournit les trois efforts inconnus X, Y et Z.

L'effort réel F dans une barre quelconque s'obtient finalement en remplaçant X, Y et Z par leurs valeurs dans l'expression de F donnée ci-dessus.

Les calculs peuvent encore être disposés dans un tableau comme celui du paragraphe précédent. Mais ils sont plus longs car il y a neuf sommes à calculer au lieu de deux.

Remarque. — La résolution du système d'équations en X, Y, Z demande, en général, assez de soins, car il arrive souvent que les coefficients des inconnues aient des valeurs assez voisines.

3.4 APPLICATION DE LA MÉTHODE DES DÉFORMATIONS.

Afin de justifier les résultats ci-dessus, obtenus en utilisant la méthode du travail minimum, nous allons appliquer ci-dessous, la méthode des déplacements exposée succinctement au paragraphe **2.2**.

Nous nous placerons dans le cas simple du système triangulé plan à une barre surabondante que nous avons considéré au paragraphe **3.2** (fig. 10 *a*).

a) Rendons le système isostatique, comme au paragraphe **3.22**, en « décrochant » la barre AB du nœud A (fig. 10 *b*) ;

b) Calculons les efforts dus au système des forces extérieures dans les barres du système coupé (Crémona). Soit f, cet effort dans une barre ;

1. — On a toujours intérêt à supposer, *à priori*, tous les efforts inconnus de sens positif.

c) Calculons le *déplacement relatif de* A *et de* A′, sous l'action des forces extérieures, *dans le système coupé.*

Ce déplacement relatif est égal à la différence des déplacements absolus de A et A′ suivant la direction AB.

Soit φ l'effort dans une barre dû à une force unitaire auxiliaire appliquée en A parallèlement à AB et vers le haut. Nous avons vu au chapitre VII, paragraphe **6.2**, que le déplacement du point A, sous l'action des forces extérieures, a pour expression

$$d = \sum \frac{f\varphi}{ES} L$$

(déplacement dans le sens de la force unitaire auxiliaire).

De même, le déplacement de A′ est

$$d' = \sum \frac{f\varphi'}{ES} L$$

en désignant par φ′ l'effort dans une barre, dû à une force auxiliaire unitaire appliquée en A′, suivant la direction A′B [1].

Le déplacement relatif de A et A′ est donc

$$y = d - d' = \sum \frac{f\varphi}{ES} L - \sum \frac{f\varphi'}{ES} L$$

$$y = \sum \frac{f(\varphi - \varphi')}{ES} L.$$

Or, en appliquant en A et A′ deux forces unitaires opposées, on obtiendrait dans une barre quelconque, un effort φ—φ′ égal à l'effort α déterminé au paragraphe **3.223** ci-dessus.

Le déplacement relatif de A et A′ peut donc s'écrire

$$y = \sum \frac{f\alpha}{ES} L.$$

e) *Calculons le déplacement relatif de* A *et de* A′ *dans le système coupé, sous l'action de la seule force inconnue* X *dans la barre* AB.

L'effort dans une barre, sous l'action de X, est αX et le déplacement dû à X est donc

$$y' = \sum \frac{\alpha X \alpha}{ES} L = X \sum \frac{\alpha^2}{ES} L$$

d) *Ecrivons la comptabilité des déplacements*, c'est-à-dire écrivons que la somme des déplacements y et y' est nulle puisque A et A′ sont confondus.

$$y + y' = 0$$

soit

$$\sum \frac{f\alpha}{ES} L + X \sum \frac{\alpha^2}{ES} L = 0$$

d'où

$$X = -\frac{\sum \frac{f\alpha}{ES} L}{\sum \frac{\alpha^2}{ES} L}.$$

Nous retrouvons bien le résultat obtenu par la méthode de travail minimum, mais après un raisonnement assez ardu, bien que le cas considéré soit particulièrement simple.

1. — La détermination des efforts φ et φ′ doit se faire à l'aide de deux opérations distinctes (tracés de Crémona, par exemple) en équilibrant la poutre en ses points de réactions extérieures (nœuds C et D).

Le raisonnement serait bien plus laborieux dans le deuxième exemple que nous avons étudié (trois barres surabondantes).

3.5 ÉTUDE DES SYSTÈMES TRIANGULÉS A « MOMENTS SECONDAIRES ».

3.51 Définition. — Pour que les barres d'un système triangulé ne subissent que des efforts axiaux, il est nécessaire que les axes des barres d'un même nœud convergent en un même point (nœud théorique) et que les charges extérieures soient appliquées en ce point (chap. VII, § **3.4**).

Si ces deux conditions (ou une seule d'entre elles) ne sont pas satisfaites, il se produit, autour du nœud théorique, un moment, facile à calculer que l'on appelle : *moment secondaire* [1].

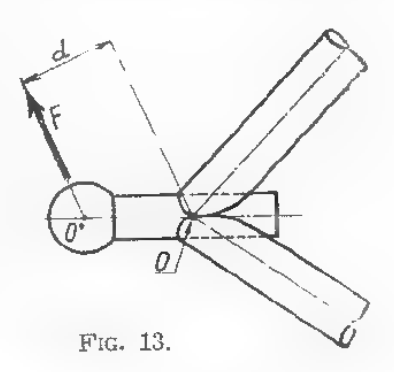


FIG. 13.

Exemple. — Rotule d'attache d'un bâti-moteur, déportée par rapport au nœud théorique O (point de concours des axes des barres). Voir figure 13. Si la force extérieure F est appliquée à la rotule il se crée, par rapport à O, un moment secondaire :

$$\mu = F \cdot d.$$

3.52 Méthode approchée de résolution.

3.521 *Données.* — Considérons deux barres OA et OB convergentes en O et soumises à un moment μ autour de O (fig. 14 *a*).

Soient L_1 la longueur, E_1 le module d'élasticité et I_1 le moment d'inertie de la barre OA ; L_2, I_2, E_2, les caractéristiques correspondantes de OB (I_1 et I_2 étant les moments d'inertie évalués pour une flexion dans le plan où agit le moment μ, c'est-à-dire dans le plan formé par les deux barres).

Nous allons déterminer la *participation de chaque barre à la transmission du moment* μ.

3.522 *Hypothèses.* — *a*) Nous supposerons que les deux barres sont assemblées *rigidement*, c'est-à-dire, que *l'angle* AOB *est indéformable* (la déformée aura, par exemple, l'allure indiquée figure 14 *a*). Cette condition est généralement réalisée, pratiquement, dans la construction soudée, d'autant plus que les nœuds supportant des moments secondaires sont, en général, renforcés.

b) Nous supposerons également que les nœuds A et B ont *même rigidité d'encastrement*. (Nous pourrons avoir, par exemple, en A et B, deux articulations ou deux encastrements de même degré.)

c) Nous négligerons les déformations dues aux efforts axiaux.

3.523 *Cas de deux articulations en* A *et* B (fig. 14 *b*). — Le moment se répartit dans les deux barres en deux moments μ_1 et μ_2, tels que l'on ait au nœud O

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu. \qquad (1)$$

Les moments secondaires appliqués aux deux barres sont nuls aux

1. — Ces moments secondaires peuvent, évidemment, aussi bien exister dans un système isostatique que dans un système hyperstatique. Nous les avons classés dans ce chapitre car ils donnent lieu à une méthode de résolution hyperstatique.

points d'articulation A et B, et ils décroissent linéairement le long de chaque barre de O à A et de O à B[1].

D'autre part, nous savons que l'angle de rotation en O, dû à la déformation de flexion de la barre OA est égal à la réaction d'appui en O quand on considère cette barre comme étant soumise à une charge répartie fictive dont la variation est représentée par la courbe $\frac{M}{EI}$ relative à cette barre (chap. X, § **2.5**).

Le paramètre de rigidité EI étant constant le long de cette barre OA, on a

$$\text{aire de la courbe } \frac{M}{EI} = \text{aire du triangle O A } \mu_1 = \frac{\mu_1}{E_1 I_1} \frac{L_1}{2} .$$

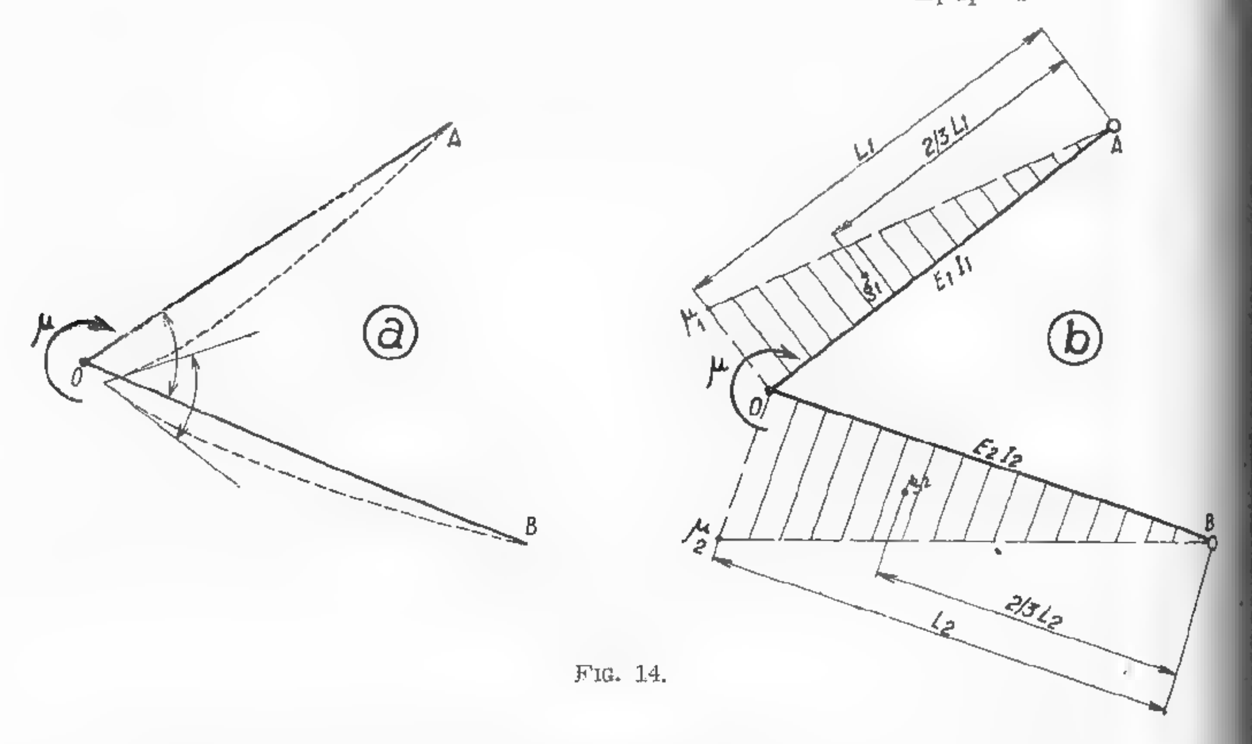


FIG. 14.

Soit α_1 la rotation en O (c'est-à-dire *la réaction* en O). En prenant le moment des forces par rapport à A on a

$$\alpha_1 L_1 = \frac{\mu_1}{E_1 I_1} \cdot \frac{L_1}{2} \cdot \frac{2}{3} L_1 .$$

D'où, la rotation

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{E_1 I_1} \cdot \frac{L_1}{3} .$$

De même, *pour la barre* OB, la rotation de O due à la déformation élastique de flexion de cette barre sera

$$\alpha_2 = \frac{\mu_2}{E_2 I_2} \cdot \frac{L_2}{3} .$$

L'angle AOB étant indéformable, les deux rotations α_1 et α_2 doivent être égales

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

soit

$$\frac{\mu_1 L_1}{E_1 I_1} = \frac{\mu_2 L_2}{E_2 I_2}$$

1. — Il n'y a, en effet, aucune force intermédiaire appliquée entre O et A ou O et B.

d'où

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\dfrac{E_1 \cdot I_1}{L_1}}{\dfrac{E_2 \cdot I_2}{L_2}} = k. \qquad (2)$$

Règle. — La participation de chaque barre à la transmission du moment μ *est donc proportionnelle à son paramètre de rigidité en flexion* EI *et inversement proportionnelle à sa longueur* **L.**

Les valeurs μ_1 et μ_2 sont donc déterminées par les deux équations :

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu \qquad (1)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = k \qquad (2)$$

d'où

$$\mu_1 = k\mu_2$$

$$\mu_2\,(1+k) = \mu$$

et finalement

$$\mu_1 = \frac{k}{1+k}\,\mu = \frac{\mu}{1+\dfrac{E_2\;I_2\;L_1}{E_1\;I_1\;L_2}}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{1+k}\,\mu = \frac{\mu}{1+\dfrac{E_1\;I_1\;L_2}{E_2\;I_2\;L_1}}.$$

Remarques. — *a*) Dans le cas où le moment appliqué μ est dû au décalage d'une force F (fig. 13), il existe, en plus des moments secondaires, deux *efforts normaux* dans les barres. Ces efforts sont à calculer, si l'on utilise cette méthode approchée, en effectuant en O la décomposition de la charge F préalablement transportée en ce point.

Par contre, pour tenir compte de l'influence du moment secondaire μ sur les autres barres du système, (μ se traduit par des réactions normales de flexion des barres OA et OB en A et B), il y a lieu d'effectuer le Crémona d'ensemble de la poutre en supposant le nœud O en O′ (point d'application réel de F, voir fig. 13).

b) Il est à remarquer qu'un résultat exact serait donné en traitant l'ensemble comme un arc sur deux rotules, mais l'application de la règle simple ci-dessus donne, généralement, une approximation suffisante, en pratique.

3.524 *Cas de deux encastrements parfaits en* A *et* B. — La démonstration est analogue à celle ci-dessus.

On trouve que les moments d'encastrement en A et B sont, respectivement, égaux à — 0,5 μ_1 et — 0,5 μ_2.

On aboutit aux mêmes expressions pour les moments μ_1 et μ_2.

3.53 Généralisation à un nœud comportant plus de deux barres. — Cette méthode peut se généraliser à un nœud comportant plus de deux barres, à condition que les axes de ces barres soient dans un même plan.

Si ces axes sont contenus dans des plans différents, le problème se complique, car certaines barres peuvent être sollicitées en torsion.

3.54 Contraintes supplémentaires dues aux moments secondaires. — Les moments secondaires engendrent des contraintes de flexion qu'il faut ajouter aux contraintes axiales déterminées dans les barres sans tenir compte de ces moments (en supposant les barres convergentes et les efforts appliqués aux nœuds théoriques).

Leur importance peut être considérable par rapport aux contraintes axiales (cas de la construction en tubes par exemple).

Leur considération est particulièrement importante pour les barres comprimées, par suite de « l'effet d'amplification » des flèches, qui engendre prématurément la rupture par *flambage* (chap. XVI, § **6.23** et **6.24**). Voir application numérique ci-après.

3.55 Application numérique.

3.551 *Données.* — Considérons le système de la figure 15, composé par deux tubes ronds OA et OB en acier 20CD4 traité à R=85 kg/mm². Ces tubes sont soudés entre eux en O et soumis à une force F=10000 kg possédant, par rapport au nœud O, une excentricité $d = 30$ mm.

La décomposition de la force F, transportée au nœud O, donne (voir triangle des forces) les *efforts axiaux* suivants dans les deux barres :

$$\text{barre OA : traction : } F_1 = -12500 \text{ kg},$$
$$\text{barre OB : compression : } F_2 = +10500 \text{ kg}.$$

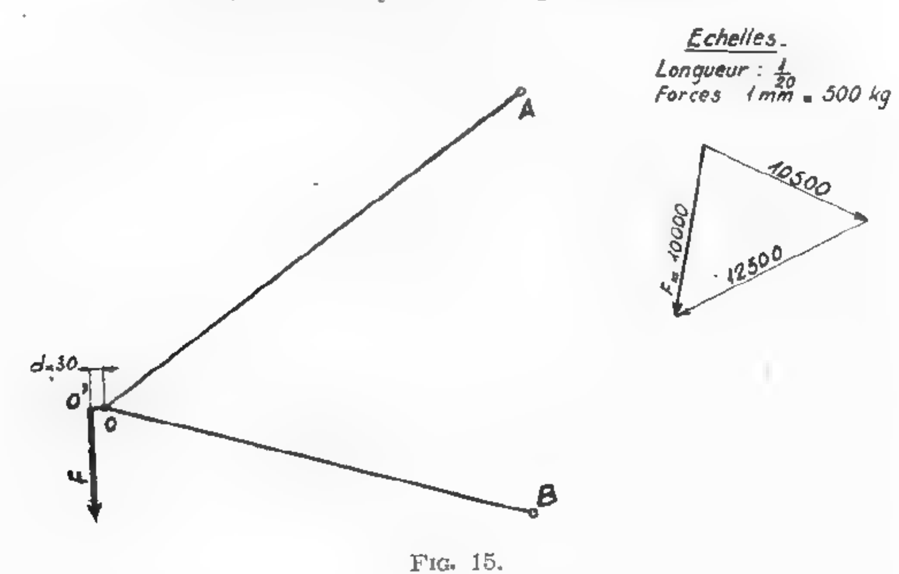


Fig. 15.

Les caractéristiques des tubes et leurs contraintes axiales pures n_1 (en négligeant d) sont données dans le tableau suivant :

TUBES	CARACTÉRISTIQUES						EFFORTS AXIAUX	n_1
	D mm	e mm	S mm²	I mm⁴	$\frac{I}{V}$ mm³	L mm	kg	kg/mm²
OA	50	2	302	87000	3480	1200	— 12550	— 41,4
OB	50	2,5	373	105490	4220	1000	+ 10500	+ 28,2

3.552 *Répartition du moment secondaire.* — Le moment secondaire global a pour valeur

$$\mu = Fd = 10000 \cdot 30 = 300000 \text{ mmkg} = 300 \text{ mkg}.$$

Le coefficient de répartition k, défini au paragraphe 3.523 a pour expression dans ce cas particulier où $E_1 = E_2$:

$$k = \frac{I_1}{I_2} \frac{L_2}{L_1}.$$

Il vaut donc

$$k=\frac{87000}{105490}\cdot\frac{1000}{1200}=0,688$$

d'où les moments agissant en O sur chaque barre

$$\text{barre OA : } \mu_1=\mu\,\frac{k}{1+k}=300\,\frac{0,688}{1,688}=122,2 \text{ mkg,}$$

$$\text{barre OB : } \mu_2=\mu\,\frac{1}{1+k}=300\,\frac{1}{1,688}=177,8 \text{ mkg.}$$

3.553 *Contraintes résultantes maxima.* — Nous supposerons que les barres sont articulées aux nœuds A et B, d'où une variation triangulaire des moments secondaires, le long de ces barres.

Barre tendue OA. — La contrainte résultante maximum a lieu au voisinage immédiat du nœud O. Elle a pour valeur théorique en ce point [1] O

$$n_r=n_1-\frac{\mu_1}{\left(\frac{I}{V}\right)}=-41,4-\frac{122200}{3480}=-41,4-35,1=-76,5 \text{ kg/mm}^2.$$

Barre comprimée OB

a) Contrainte au voisinage immédiat du nœud O

$$n_r=+28,2+\frac{177800}{4220}=28,2+42=+70,2 \text{ kg/mm}^2.$$

b) Contrainte au niveau de la « flèche amplifiée » maximum (combinaison flambage + flexion).

Nous avons vu, au chapitre XVI (§ 6.33), que la flèche maximum de flexion, due au moment secondaire de variation linéaire avait lieu à une distance de l'extrémité O, sensiblement égale à 0,4 L. Le moment secondaire, non amplifié, existant en cet endroit a pour valeur

$$\mu'_2=0,6\ \mu_2=106,6 \text{ mkg}$$

d'où un moment amplifié (chap. XVI, § 6.32)

$$\mu''_2=\mu'_2\left(1+1,03\,\frac{F_2}{F_c-F_2}\right)$$

avec F_c = charge critique d'Euler $=\dfrac{\pi^2\cdot 20000\cdot 105490}{1000^2}$

$$F_c=20820 \text{ kg}$$

d'où $\mu''_2=106,6\left(1+1,03\,\dfrac{10500}{20820-10500}\right)=106,6\cdot 2,048=218,2$ mkg.

Contrainte résultante maximum, en cette section

$$n_c=28,2+\frac{218200}{4220}=28,2+51,8=80 \text{ kg/mm}^2.$$

3.554 *Conclusion.* — L'excentricité *d* envisagée, qui ne correspondait qu'à 60 % du diamètre des tubes, a donc accru leurs contraintes de 85 %, pour le tube tendu et de 184 % pour le tube comprimé.

Cette application suffit à prouver l'influence désastreuse d'une excentricité des charges par rapport aux nœuds théoriques des systèmes triangulés.

---

1. — Il y aurait lieu, en réalité, d'effectuer cette combinaison au sortir du gousset de liaison des deux barres au nœud O. La valeur calculée est donc légèrement défavorable, d'autant plus que la traction produit un « effet réducteur » sur le moment fléchissant entre les nœuds O et A (chap. XVI, § 6.11).

4. CALCUL DES POUTRES RECTILIGNES HYPERSTATIQUES

4.0 REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Nous avons vu, au chapitre III, paragraphes **4.2** et **4.3**, qu'une poutre rectiligne constitue un système isostatique dans les cas particuliers suivants de *liaisons extérieures :*

poutre sur deux appuis simples soumise à des charges normales,
poutre sur une articulation (point fixe) et un appui dirigé soumise à des charges quelconques,
poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre (charges quelconques).

Si une poutre est assujettie à des liaisons extérieures supplémentaires elle devient un *système hyperstatique extérieur* dont le degré de surabondance est égal au « degré d'efficacité » total des liaisons ajoutées.

Nous ne traiterons ici que le cas simple des poutres rectilignes soumises à des *charges situées dans un même plan* (plan de flexion adopté comme plan des figures) et *orientées perpendiculairement aux axes longitudinaux des poutres, avant déformation* (charges transversales normales).

La présence de charges longitudinales complique, en effet, les problèmes par suite des « effets amplificateurs ou réducteurs » de ces charges sur les flèches et moments de flexion (chap. XVI, § **6.1**) [1].

Nous exposerons d'abord, sans démonstration, une méthode classique principalement applicable aux poutres continues sur appuis simples, connue sous le nom de « formule des trois moments » ou « équation de Clapeyron ».

Nous étudierons, ensuite, des méthodes générales de résolution, basées sur le théorème de Castigliano, appliquées aux cas des poutres continues sur appuis, des poutres encastrées et appuyées et des poutres bi-encastrées.

4.1 FORMULE DES TROIS MOMENTS OU EQUATION DE CLAPEYRON.

4.11 Principes d'établissement et conventions de signes. —Cette formule exprime une *relation qui existe entre les moments fléchissants au niveau de trois appuis consécutifs d'une poutre continue sur appuis.*

Elle s'établit, généralement, à partir de l'équation générale de la fibre moyenne déformée des poutres droites

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad \text{(chap. X, § 1.4)}$$

en déterminant les *constantes d'intégration* propres au cas particulier des poutres continues sur appuis (valeurs particulières connues de y au niveau des appuis).

On peut également l'établir à l'aide de la méthode de la courbe $\frac{M}{EI}$ ou à l'aide du théorème de Castigliano.

Il est à remarquer que l'on néglige toujours, pour arriver aux expressions ci-après, les flèches de cisaillement des poutres. Nous donnerons, d'abord, l'expression de la formule des trois moments dans le *cas général* d'une poutre d'inertie variable, chargée par un système de charges normales quelconque, et reposant sur des appuis dénivelables.

Nous verrons, ensuite, les simplifications apportées à cette expression générale, dans quelques cas particuliers usuels.

1. — Remarquons, cependant, que si les charges longitudinales sont faibles vis-à-vis des charges critiques d'Euler des poutres, les méthodes ci-après restent, pratiquement applicables.

Conventions de signes. — L'observation stricte de conventions de signes est indispensable, pour utiliser la formule des trois moments.

Nous adopterons les conventions générales suivantes schématisées sur la figure 16.

Les *forces appliquées et les réactions* seront comptées positivement *de haut en bas.*

Les *flèches* et les *dénivellations des appuis* seront également positives *de haut en bas.*

Les *moments fléchissants* seront positifs *dans le sens des aiguilles d'une montre,* ces moments étant toujours évalués en considérant les forces situées *à gauche* des sections envisagées. Une force positive F située à gauche d'une section S (fig. 16) donnera donc, en cette section, un moment négatif

$$M = -F\,d.$$



Fig. 16.

Pour la représentation graphique des courbes de variations des efforts tranchants et moments fléchissants, nous conviendrons de porter leurs *valeurs positives en dessous des poutres* et leurs valeurs négatives au-dessus de celles-ci.

4.12 Expression générale.

4.121 *Notations* (fig. 17). — Nous désignerons par :

A_1, A_2 et A_3 trois appuis *successifs* d'une poutre continue, délimitant les travées n° 1 (intervalle A_1-A_2) et n° 2 (intervalle A_2-A_3),

L_1 et L_2 les longueurs de ces deux travées.

M_1, M_2 et M_3 les *moments fléchissants* agissant, respectivement, *au niveau des appuis* A_1, A_2 et A_3,

y_1, y_2 et y_3 les *dénivellations respectives* des appuis A_1, A_2, A_3, c'est-à-dire leurs déplacements élastiques sous l'action des charges qu'ils équilibrent, ces déplacements étant comptés perpendiculairement à la direction initiale A_1 A_3 de la poutre.

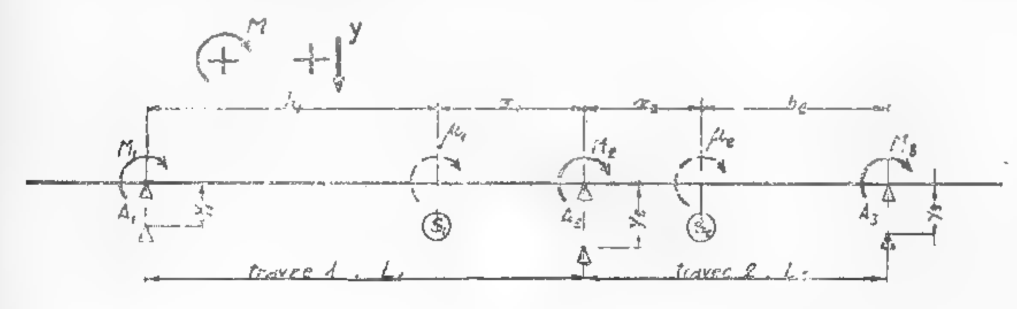


Fig. 17

Supposons la poutre constituée par une succession de *travées indépendantes* entre elles, c'est-à-dire par une succession de poutres sur deux appuis obtenues en négligeant, éventuellement, les porte-à-faux extrêmes (voir fig. 18 ci-après).

Désignons, dans ces conditions, par μ_1 le moment fléchissant agissant dans une *section courante* S_1 de la travée 1 et par μ_2 le moment dans une

section courante S_2 de la travée 2. Ces sections sont, respectivement, repérées par leurs distances x_1 ou x_2 à l'appui médian A_2 et par leurs distances respectives h_1 ou h_2 aux appuis extrêmes A ou A_3 des travées considérées.

Nous avons donc (fig. 17)

$$x_1 + h_1 = L_1 \quad \text{et} \quad x_2 + h_2 = L_2.$$

4.122 *Equation générale de* CLAPEYRON. — L'expression générale de la *formule des trois moments* ou *équation de Clapeyron* s'énonce, avec ces notations, par l'égalité suivante (où nous avons numéroté chaque terme pour en faciliter la discussion ci-après)

$$\overset{(1)}{\frac{y_1 - y_2}{L_1}} + \overset{(2)}{\frac{y_3 - y_2}{L_2}} + \overset{(3)}{\frac{1}{L_1} \sum \frac{\mu_1 h_1}{EI} \Delta x_1} + \overset{(4)}{\frac{M_1}{L_1^2} \sum \frac{x_1 h_1}{EI} \Delta x_1}$$

$$+ \overset{(5)}{\frac{M_2}{L_1^2} \sum \frac{h_1^2}{EI} \Delta x_1} + \overset{(6)}{\frac{1}{L_1} \sum \frac{\mu_2 h_2}{EI} \Delta x_2} + \overset{(7)}{\frac{M_1}{L_2^2} \sum \frac{x_2 h_2}{EI} \Delta x_2} + \overset{(8)}{\frac{M_2}{L_2^2} \sum \frac{h_2^2}{EI} \Delta x_2} = 0.$$

Dans cette relation, les *limites* des sommes (ou intégrations) figurées par les signes Σ sont les suivantes

termes (3) (4) et (5) : de $x_1 = 0$ à $x_1 = L_1$, c'est-à-dire de A_2 à A_1 (travée 1)
termes (6) (7) et (8) : de $x_2 = 0$ à $x_2 = L_2$, c'est-à-dire de A_2 à A_3 (travée 2).

4.123 *Significations géométriques des différents termes.* — Les termes (1) et (2) tiennent compte des *dénivellations relatives* des appuis.

Les sommes figurant aux termes (3) et (6), qui sont de la forme $\sum \frac{\mu h}{EI} \Delta x$ représentent, respectivement, les *moments statiques* de la surface de la courbe $\frac{\mu}{EI}$ par rapport à l'appui extrême de la travée considérée. Dans l'exemple de la figure 18, on aurait donc [1]

$$\text{terme (3)} = \frac{1}{L_1} \Omega_1 d_1 \, ; \qquad \text{terme (6)} = \frac{1}{L_2} \Omega_2 d_2.$$

Les sommes figurant aux quatre autres termes (termes (4), (5), (7) et (8)) sont des « *paramètres élastiques* » propres à chaque travée et indépendants des charges appliquées (qui ne figurent pas sous le signe Σ).

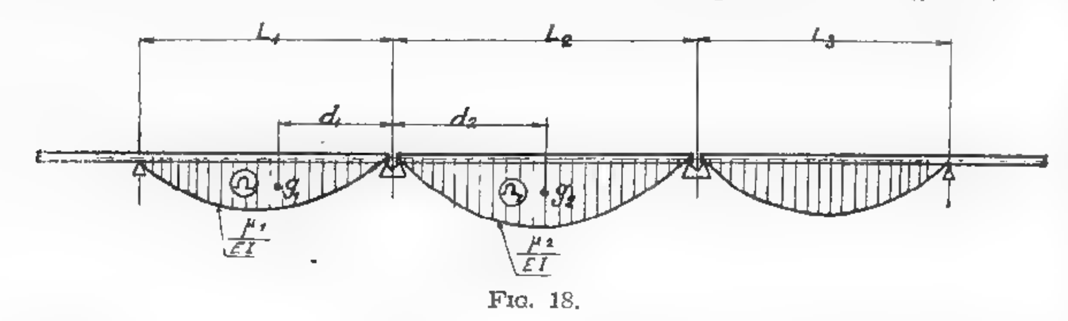


FIG. 18.

4.124 *Remarques.* — *a*) Il ne rentre en jeu, dans les termes (1) et (2), que les dénivellations *relatives* des trois appuis A_1, A_2 et A_3 ainsi que nous le verrons ci-dessous au paragraphe 4.231.

b) Ces dénivellations étant dues aux réactions, inconnues, des appuis,

1. — Les surfaces Ω positives sont celles situées du côté de M positif, c'est-à-dire en dessous de la poutre (§ 4.11).

on voit que le calcul d'une poutre possédant des appuis déformables devra, par cette méthode, s'effectuer *par approximations successives.*

4.13 Cas particuliers.

4.131 *Appuis relativement indénivelables.* — Les dénivellations *relatives* des appuis sont nulles quand ceux-ci restent *alignés* après déformation. Cette circonstance peut se produire dans l'un des trois cas *a*, *b* et *c* de la figure 19. Dans ces trois cas, *l'ensemble des termes* (1) et (2) *de l'expression générale ci-dessus s'annule.*

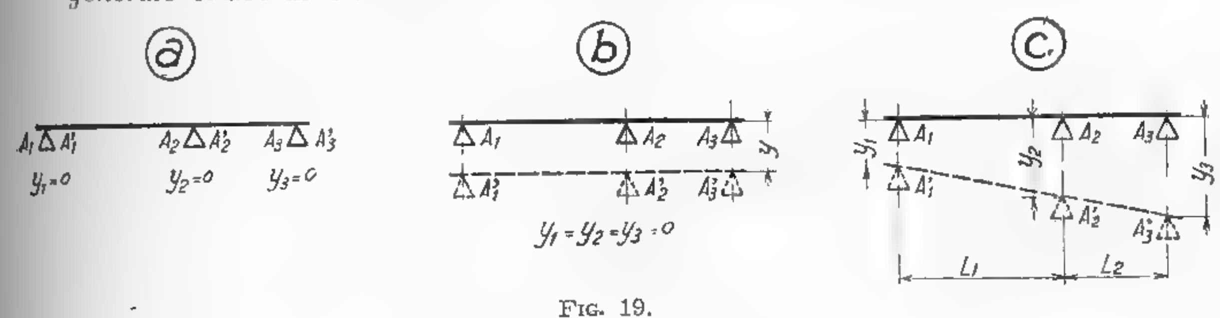


FIG. 19.

La proposition est évidente dans le cas *a* où $y_1=y_2=y_3=0$.

Dans le cas *b*, où $y_1=y_2=y_3=y$, chacun des termes (1) et (2) s'annule également.

Dans le cas *c*, on a (triangles semblables, fig. 19)

$$\frac{y_2-y_1}{L_1}=\frac{y_3-y_2}{L_2} \qquad \text{soit} \qquad \frac{y_1-y_2}{L_1}+\frac{y_3-y_2}{L_2}=0.$$

Le calcul peut alors s'effectuer directement sans approximations, l'inertie de la poutre étant connue.

4.132 *Poutre homogène* (E *constant*) *à inertie constante dans chaque travée.* — En désignant par I_1 et I_2 les moments d'inertie de flexion respectifs des sections droites des travées 1 et 2, l'équation des trois moments s'écrit (avec les mêmes conventions de signes et de limites que celles utilisées ci-dessus)

$$M_1\frac{L_1}{I_1}+2M_2\left(\frac{L_1}{I_1}+\frac{L_2}{I_2}\right)+M_3\frac{L_2}{I_2}+\frac{6}{I_1L_1}\sum\mu_1 h_1\Delta x_1$$
$$+\frac{6}{I_2L_2}\sum\mu_2 h_2\Delta x_2=-6E\left(\frac{y_1-y_2}{L_1}+\frac{y_3-y_2}{L_2}\right).$$

Si les dénivellations relatives des appuis sont nulles, les deux derniers termes disparaissent et le premier membre de l'équation s'égale donc à zéro.

4.133 *Poutre homogène d'inertie constante, sur appuis indénivelables* [1]. — En multipliant tous les termes du premier membre de l'expression précédente par $I=I_1=I_2$, il vient

$$L_1M_1+2M_2(L_1+L_2)+L_2M_3=-\frac{6}{L_1}\sum\mu_1 h_1\Delta x_1-\frac{6}{L_2}\sum\mu_2 h_2\Delta x_2.$$

C'est l'expression particulière la plus utilisée de la formule des trois moments.

1. — Nous utiliserons cette dénomination simplifiée « d'appuis indénivelables » qui signifie, d'une façon plus précise, appuis possédant des dénivellations *relatives* nulles.

4.134 *Poutre homogène d'inertie constante, sur appuis indénivelables, soumise à une charge uniformément répartie.* — En désignant par p l'ordonnée, constante, de la charge répartie, et en calculant les deux derniers termes de l'expression précédente, il vient

$$L_1 M_1 + 2 M_2 (L_1 + L_2) + L_2 M_3 = -\frac{p}{4} (L_1^3 + L_2^3).$$

C'est l'expression particulière la plus simple de la formule des trois moments.

4.14 Utilisation pratique de la formule des trois moments, pour le calcul des poutres droites continues sur appuis.

4.141 *Calcul des moments fléchissants.*

a) Poutre sur trois appuis (fig. 20). — Les moments M_1 et M_3 au niveau des appuis extrêmes A_1 et A_3 sont connus directement. Ils ne dépendent, en effet, que des charges situées sur les porte-à-faux correspondants, et sont donc nuls dans le cas particulier d'une poutre sans porte-à-faux chargés. Il ne subsiste qu'une inconnue M_2 (système hyperstatique du premier degré)

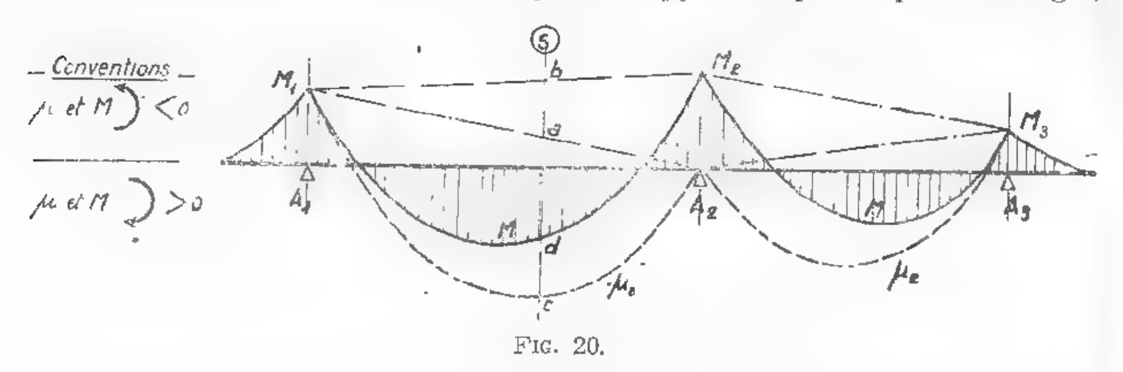


Fig. 20.

On détermine les moments μ_1 et μ_2 en supposant les *travées indépendantes* (moments nuls en A_1, A_2 et A_3).

Cette détermination peut s'effectuer, par exemple, à l'aide de la statique graphique (chap. IV, § 6.) en supposant la poutre coupée en A_2 (fig. 20) [1].

Les termes figurant sous les signes Σ des expressions précédentes se calculent, soit algébriquement (cas de charges simples), soit en déterminant les valeurs correspondantes de leurs expressions au niveau de sections intermédiaires et en effectuant leur somme (tableaux), soit encore en planimétrant leurs courbes représentatives.

La formule des trois moments permet de connaître l'inconnue M_2. La courbe représentative du moment réel M s'obtient en « *redressant* » les courbes μ_1 et μ_2, c'est-à-dire en décalant *verticalement* [2] les ordonnées de ces courbes des intervalles compris entre les droites $M_1 A_2$ et $M_1 M_2$ (travée 1) ou $A_2 M_3$ et $M_2 M_3$ (travée 2).

Exemple (fig. 20) : A la section S, décaler μ_1 d'une quantité

$$cd = ab.$$

Voir ci-après, le calcul des réactions aux appuis.

1. — Notons que les moments μ_1 et μ_2 doivent se lire, dans ce cas, à partir des lignes de fermeture $A_2 M_1$ et $A_2 M_3$ (moments nuls en A_1 et en A_3).

2. — Cette opération de redressement ne correspond, nullement, à une rotation des courbes μ_1 et μ_2 autour de M_1 et M_2. Elle peut s'effectuer par la statique graphique à l'aide d'un décalage convenable des pôles des dynamiques.

b) *Poutre sur* N *appuis.* — Les moments aux appuis extrêmes sont toujours connus. Il reste N—2 moments inconnus (degré de surabondance N—2). On applique la formule des trois moments aux (N—2) poutres sur trois appuis obtenues en considérant les différents groupes de trois appuis successifs.

On obtient ainsi (N — 2) équations qui permettent la détermination des (N — 2) inconnues.

L'opération de redressement des courbes de moments est analogue à celle décrite ci-dessus.

4.142 *Calcul des efforts tranchants et des réactions aux appuis.*

a) *Notations.* — Considérons, par exemple, le cas de la poutre sur trois appuis représentée figure 21.

Dans le système rendu isostatique, en supprimant la continuité de flexion en A_2, désignons par :

t_1 et t_2 les efforts tranchants agissant respectivement dans une section courante des travées 1 et 2 ;
r_1 la réaction d'appui en A_1 ;
r_2 la réaction d'appui en A_2, comprenant :
r'_2 due à la travée 1 et r''_2 due à la travée 2 : $r_2 = r'_2 + r''_2$
r_3 la réaction d'appui en A_3,

ces différents efforts étant évalués selon les conventions de signes générales données au paragraphe **4.11**, c'est-à-dire positifs de haut en bas.

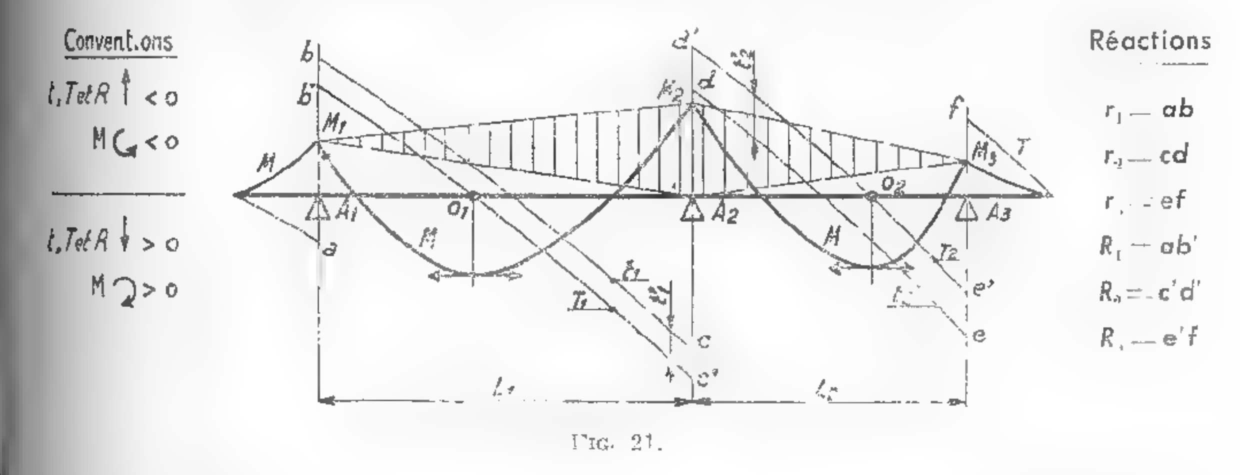


FIG. 21.

b) *Efforts tranchants.* — L'adjonction, au système coupé, du moment de liaison M_2 a fait naître des moments supplémentaires ΔM représentés par les triangles $M_1 A_2 M_2$ et $M_3 A_2 M_2$ (fig. 21).

Ces moments supplémentaires de variations *linéaires* correspondent donc à des *efforts tranchants correcteurs* t'_1 et t'_2 *constants* dans chaque travée et tels que (chap. IX, § **2.1**) :

$$t'_1 = \frac{\Delta M}{\Delta x_1} = \frac{M_1 - M_2}{L_1} \qquad \text{(travée 1)}$$

$$t'_2 = \frac{\Delta M}{\Delta x_2} = \frac{M_2 - M_3}{L_2} \qquad \text{(travée 2).}$$

Les efforts tranchants réels ont donc pour expressions algébriques :

$$\text{travée 1 :} \qquad T_1 = t_1 + \frac{M_1 - M_2}{L_1}$$

$$\text{travée 2 :} \qquad T_2 = t_2 + \frac{M_2 - M_3}{L_2}.$$

Leurs courbes représentatives sont simplement *décalées* des quantités t'_1 et t'_2 par rapport aux courbes t_1 et t_2 (fig. 21).

c) *Réactions d'appui.* — Les réactions réelles aux appuis se déduisent directement des courbes d'efforts tranchants et ont pour expressions algébriques (fig. 20) :

$$\text{en } A_1 : R_1 = r_1 + t'_1 = r_1 + \frac{M_1 - M_2}{L_1}$$

$$\text{en } A_2 : R_2 = r_2 - t'_1 - t'_2 = r_2 - \frac{M_1 - M_2}{L_1} - \frac{M_2 - M_3}{L_2}$$

$$\text{en } A_3 : R_3 = r_3 + t'_2 = r_3 + \frac{M_2 - M_3}{L_2}.$$

d) *Généralisation.* — Il est aisé de généraliser les relations ci-dessus au cas d'une poutre sur N appuis en l'assimilant, toujours, à une succession de poutres sur trois appuis.

4.143 *Remarque.* — Une *vérification visuelle* rapide des résultats obtenus consiste à obtenir une allure concordante entre les courbes d'efforts tranchants et de moments fléchissants finales (chap. IX, § **2.132**). En particulier, les courbes d'efforts tranchants doivent s'annuler au niveau des maxima de celles des moments fléchissants (point O_1 et O_2, fig. 21).

4.15 Observations générales. — La méthode de résolution basée sur la formule des trois moments est à conseiller dans les *cas simples*, c'est-à-dire dans ceux donnant lieu aux expressions simplifiées du paragraphe **4.13**

Dans les cas compliqués (inertie variable, appuis dénivelables), elle conduit à un travail matériel considérable et offre de nombreux risques d'erreurs dus, en particulier, aux conventions de signes.

Il est préférable d'utiliser, alors, la méthode générale exposée au paragraphe **4.2.**

Nous verrons ci-après qu'on peut également l'utiliser pour calculer les poutres encastrées et appuyées ou bi-encastrées. Les mêmes observations d'emploi pratique sont valables pour ces poutres.

4.2 CALCUL DES POUTRES DROITES CONTINUES SUR APPUIS PAR LA METHODE DES DERIVEES DU POTENTIEL INTERNE.

4.21 Principe de la méthode. — Cette méthode générale constitue une application directe des théorèmes de CASTIGLIANO ou de MÉNABRÉA énoncés au paragraphe **2.5.**

Les inconnues envisagées seront ici les *réactions des appuis surabondants*. Ces appuis imposent, en effet, des déplacements connus [1] de la poutre au niveau d'eux-mêmes, ce qui permet d'égaler aux valeurs de ces déplacements les dérivées du potentiel interne par rapport aux inconnues.

4.22 Exposé de la méthode.

4.221 *Données* (fig. 22 *a*). — Nous exposerons brièvement la méthode dans le cas d'une poutre sur trois appuis A_1, A_2, A_3 possédant une inertie variable et soumise à un système de charges quelconques, représenté par exemple, par la ligne de charge p de la figure 22 *a*.

4.222 *Système rendu isostatique.* — Rendons le système isostatique

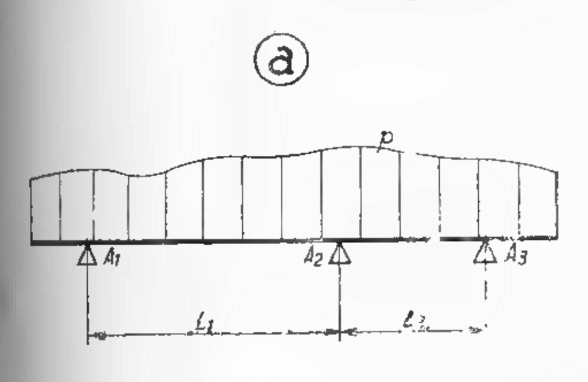
1. — Ces déplacements sont nuls dans le cas d'appuis indénivelables et connus, par approximations, dans le cas général.

en lui supprimant un appui et choisissons, par exemple, l'appui central A_2. Il reste la poutre isostatique sur deux appuis A_1 et A_3 de la figure 22 *b*.

4.223 *Efforts agissant sur le système rendu isostatique.* — Les efforts, dus à la charge extérieure p, se calculent aisément à l'aide des méthodes habituelles applicables aux poutres isostatiques (statique graphique, par exemple). Désignons par (fig. 22 *b*) :

r_1 et r_2 les réactions des appuis A_1 et A_3,

t l'effort tranchant et m le moment fléchissant dans une section courante quelconque.



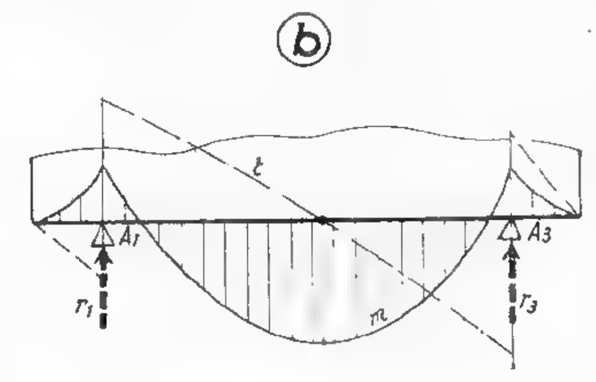


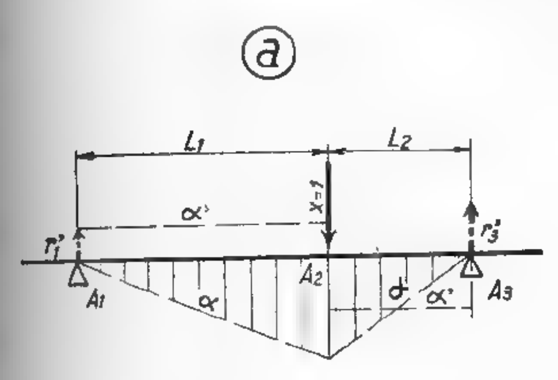
Fig. 22.

4.224 *Efforts dus à la réaction surabondante.* — Désignons par X l'inconnue hyperstatique, c'est-à-dire la réaction de l'appui supprimé A_2.

Donnons-nous pour X un *sens arbitraire*, que l'on choisira donc de la façon la plus commode pour les calculs, c'est-à-dire dans le sens positif des charges appliquées, soit ici, de haut en bas[1]. Appliquons en A_2 (fig. 23 *a*) une force égale à l'unité de mesure des forces et *dirigée dans le sens adopté pour* X. Cette force unitaire produit (sur la poutre rendue isostatique A_1 A_2) des réactions r'_1 et r'_3, un effort tranchant α' et un moment α.

Les efforts dus à X sont X fois supérieurs à ceux-ci, soit

$$Xr'_1, \quad Xr'_3, X\alpha' \quad \text{et} \quad X\alpha.$$



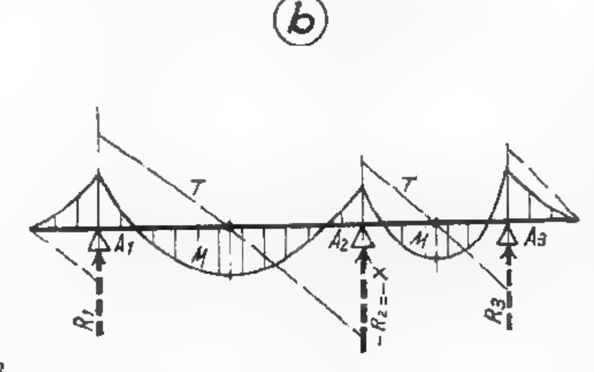


Fig. 23

4.225 *Expressions des efforts réels.*

Réactions :

en A_1 : $R_1 = r_1 + Xr'_1$; en A_2 : $R_2 = X$; en A_3 : $R_3 = r_3 + Xr'_3$.

1. — Ce choix arbitraire dans le sens positif des charges extérieures facilite les calculs en ce sens qu'il permet d'éliminer les signes.

Efforts tranchants et moments fléchissant dans une section courante :

$$T=t+\alpha' X\ ; \qquad M=m+\alpha X$$

4.226 *Calcul de l'inconnue* X. — Nous négligerons toujours le travail de cisaillement [1].

Le *potentiel interne principal* a donc pour expression (§ **2.51**)

$$U=\sum \frac{M^2}{2\,EI}\Delta x=\sum \frac{(m+\alpha X)^2}{2\,EI}\Delta x$$

en désignant par Δx la longueur d'un élément de poutre et le signe Σ s'étendant d'une extrémité à l'autre de la poutre (voir remarque ci-après).

D'après le « formulaire mathématique » ci-dessus (§ **2.552**) la *dérivée de* U *par rapport à* X a pour expression

$$\frac{dU}{dX}=\sum \frac{m\alpha}{EI}\Delta x+X\sum \frac{\alpha^2}{EI}\Delta x.$$

Deux cas sont à envisager, selon que l'appui A_2 est fixe ou mobile, *relativement* aux deux autres appuis A_1 *et* A_3.

Premier cas : Appui A_2 *fixe, relativement aux appuis* A_1 *et* A_3.

Ce cas concerne les trois exemples *a*, *b* et *c* de la figure 19 ci-dessus, c'est-à-dire trois appuis absolument fixes ou également dénivelables ou encore dénivelables de telle façon qu'ils restent alignés.

Le déplacement absolu de A_2, s'il existe (exemples *b* ou *c*) ne procure aucun travail interne de la poutre. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Ménabréa relatif aux liaisons immobiles (§ **2.53**) et écrire

$$\frac{dU}{dX}=0$$

d'où l'on tire directement l'expression de l'inconnue X

$$\boxed{X=-\frac{\sum \frac{m\alpha}{EI}\Delta x}{\sum \frac{\alpha^2}{EI}\Delta x}}.$$

Deuxième cas : Appui A_2 *mobile, relativement aux appuis* A_1 *et* A_3.

Désignons, alors, par *y* le *déplacement relatif* de l'appui A_2 c'est-à-dire la projection sur la direction de X de la distance séparant le nouvel alignement $A'_1\,A'_3$ de l'appui dénivelé A'_2 (fig. 24). Remarquons que *cette distance y* qui figure le déplacement relatif de la force de liaison X (théorème de Castigliano) *doit être comptée positivement dans le sens arbitraire adopté pour* X.

Exemples. — Avec notre convention précédente (X positif de haut en bas), on obtient

fig. 24 *a* : *y* négatif,
fig. 24 *b* : *y* positif.

Il est à remarquer que de toute façon, l'on a, algébriquement

$$y=y_2-\frac{y_1\,L_2+y_3\,L_1}{L_1+L_2}$$

1. — Cette approximation est très justiciable dans le cas des poutres longues.

en désignant par : y_1, y_2 et y_3 les dénivellations *absolues* des appuis A_1, A_2 et A_3, c'est-à-dire leurs déplacements comptés à partir de la position initiale de la poutre (sens positif dans le sens de X).

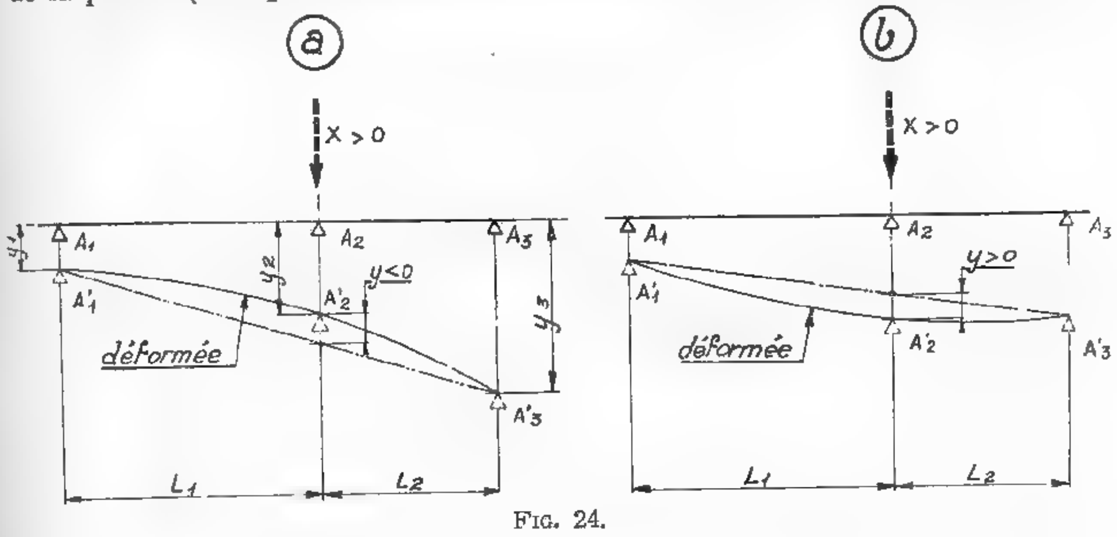


FIG. 24.

Connaissant le déplacement relatif [1] y, le théorème de CASTIGLIANO donne directement

$$\frac{dU}{dX}=y$$

soit

$$\sum \frac{m\alpha}{EI}\Delta x + X\sum\frac{\alpha^2}{EI}\Delta x = y$$

d'où l'on tire l'expression de l'inconnue X

$$\boxed{X=\frac{y-\sum\frac{m\alpha}{EI}\Delta x}{\sum\frac{\alpha^2}{EI}\Delta x}}$$

Cas particuliers. — *a*) Dans le cas, le plus fréquent, où le module d'élasticité E est constant tout le long de la poutre, on obtient

$$X=\frac{Ey-\sum\frac{m\alpha}{I}\Delta x}{\sum\frac{\alpha^2}{I}\Delta x}.$$

b) Supposons que la dénivellation y soit une *fonction bien déterminée* de la réaction inconnue X. Admettons, par exemple, une *fonction linéaire* s'écrivant

$y=k$ X (cas d'un appui sur ressort, par exemple).

Nous avons alors

$$\frac{dU}{dX}=k\ X$$

d'où l'on tire l'expression définitive de X (sans avoir à effectuer des approximations successives)

$$X=\frac{\sum\frac{m\alpha}{EI}\Delta x}{k-\sum\frac{\alpha^2}{EI}\Delta x}.$$

1. — Comme il a été indiqué plus haut, ce déplacement ne s'obtient, en général, qu'à l'aide d'approximations successives.

4.227 *Détermination des efforts réels.* — Les efforts réels T et M agissant le long de la poutre continue se calculent directement, au niveau de chaque section envisagée, en remplaçant X par sa valeur dans leurs expressions données au paragraphe 4.225. Il en est de même des réactions réelles aux appuis : R_1, R_2 et R_3.

Remarque. — On peut également effectuer un *tracé graphique* direct des courbes T et M (comme pour la méthode des trois moments).

La courbe M s'obtient par « *redressement* » de la courbe *m* à partir des « lignes de fermeture » A_1b et A_3b (fig. 25). Le point *b* est obtenu en portant, à partir de A_2, un segment A_2b égal à la valeur du moment de liaison en ce point (moment dû à X), c'est-à-dire (fig. 23 *a*)

$$A_2b = X \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad \text{(à l'échelle des moments).}$$

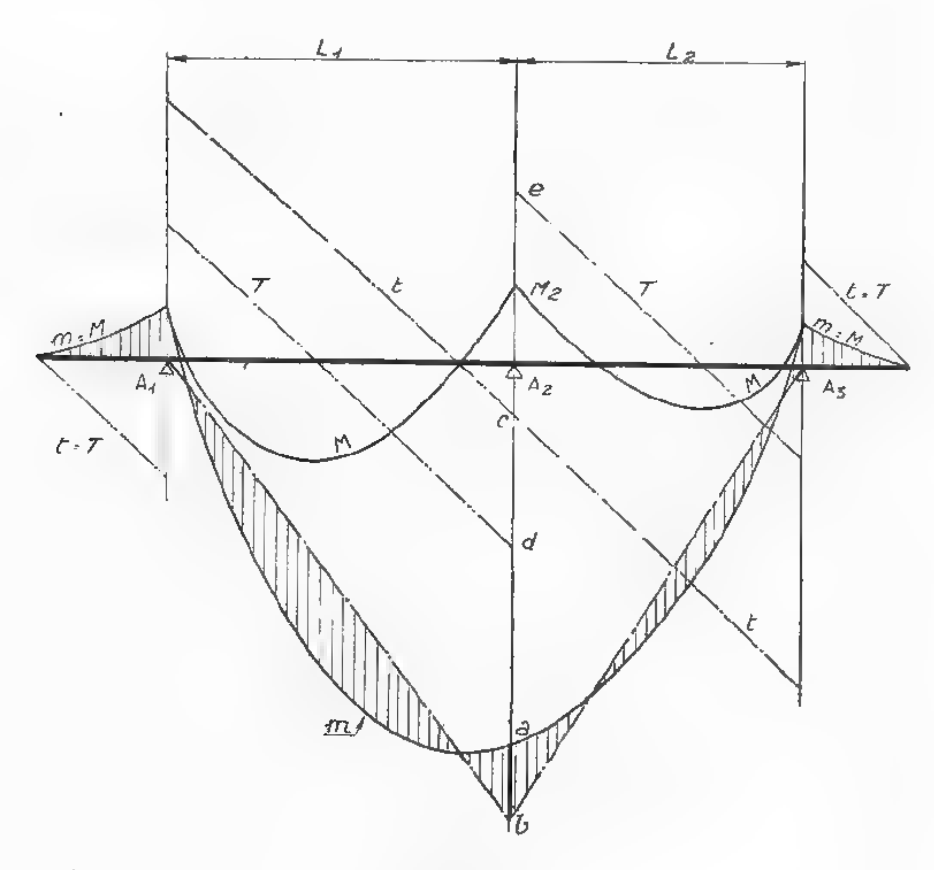


Fig. 25.

La courbe T s'obtient par « *décalages* » de la courbe *t*, ces décalages étant égaux aux efforts tranchants de liaison a' dans chaque travée, soit (fig. 23 *a* et 25).

$$\overline{cd} = X \frac{L_2}{L_1 + L_2} \quad \text{et} \quad \overline{ce} = -X \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad \text{(à l'échelle des forces).}$$

Même remarque qu'au paragraphe 4.143 au sujet des allures respectives de *t* et *m* et de T et M.

4.23 Disposition pratique des calculs. Les calculs seront avantageusement disposés dans un seul tableau du genre de celui ci-dessous qui est

relatif à une poutre sur trois appuis c'est-à-dire à une inconnue (exposé ci-dessus). Voir également à ce sujet, l'application numérique donnée ci-après.

REPÈRE DES SECTIONS	CARACTÉRISTIQUES			m	α	Calcul de X					EFFORTS RÉELS	
						GRAPHIQUE		NUMÉRIQUE				
	E	I	EI			$\frac{m\alpha}{EI}$	$\frac{\alpha^2}{EI}$	Δx	$\frac{m\alpha}{EI}\Delta x$	$\frac{\alpha^2}{EI}\Delta x$	αX	M
1	—	—	—	—	—	—	—				—	—
								.	—	—		
2	.	—	—	—	—						—	—
								—	—	—		
3		—	—	—	—	—	—				—	—
.											.	
.											.	
.												
									$\Sigma = a$	$\Sigma = b$		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	$X = -a/b$		(12)	(13)
									(10)	(11)		

Remarques. — *a*) On peut compléter le tableau en y faisant apparaître les valeurs de t, α', $\alpha' X$ et T (effort tranchant) et celles des contraintes de flexion et de cisaillement ;

b) Si X est déterminé *graphiquement* (planimétrage des courbes obtenues d'après les valeurs des colonnes (7) et (8)), les colonnes (9) à (11) disparaissent [1]. Pour le calcul *numérique* de X, effectuer les produits partiels des colonnes (10) et (11) avec *les valeurs moyennes* des termes des colonnes (7) et (8) dans chaque intervalle Δx (voir décalage des rangées) ;

c) Dans le cas, le plus fréquent, où E est constant (*poutre homogène*), les colonnes (2) et (4) disparaissent et il suffit de calculer les termes :

$$\frac{m\alpha}{I}, \quad \frac{\alpha^2}{I} \text{ etc... ;}$$

d) Il n'est pas utile d'envisager des sections sur les porte-à-faux où α est nul (fig. 23 *a*).

4.24 Généralisation. — La méthode exposée ci-dessus se généralise aisément au cas d'une poutre droite continue sur N appuis.

On pose (N — 2) inconnues X, Y, Z... figurant toujours les *réactions des appuis surabondants*, c'est-à-dire des (N —2) appuis supprimés [2] pour rendre le système isostatique.

On détermine, comme précédemment, les moments m dus aux charges extérieures dans le système rendu isostatique.

On détermine ensuite les « moments » [3] α, β, γ... dus à des forces unitaires X=1, Y=1, Z=1... appliquées *successivement* au même système rendu isostatique.

---

1. — Cette méthode est généralement à conseiller par suite de sa précision supérieure et de la vérification graphique des intermédiaires de calcul à laquelle elle conduit.

2. — Le choix de ces appuis est purement arbitraire. On choisira donc, dans chaque cas particulier, les plus favorables au calcul.

3. — Il est évident que les valeurs α β γ, ne constituent, en réalité, que des paramètres homogènes à des *longueurs* (et non à des moments).

Le potentiel interne principal U (flexion) est de la forme générale donnée au paragraphe **2.551**, avec $A=m$ et $B=EI$. En égalant successivement les dérivées partielles de U aux déplacements *relatifs* respectifs de chaque inconnue, on obtient un système de (N — 2) équations d'où l'on tire X, Y, Z...

Il est à remarquer que cette méthode se généralise également au cas des *poutres courbes continues sur appuis*. Il suffit d'envisager, au lieu des éléments droits Δx, des éléments courbes Δl de la fibre moyenne de la poutre et d'opérer les tracés (pour planimétrages) sur le développement de cette fibre moyenne, porté en abscisses (voir § **5.**, calcul des arcs).

4.3 CALCUL DES POUTRES DROITES ENCASTRÉES ET APPUYÉES.

4.31 Remarques préliminaires. — Nous savons (chap. III, § **4.3**) qu'une poutre droite encastrée à une extrémité et reposant, en supplément, sur un ou plusieurs appuis simples constitue un *système hyperstatique extérieur*.

Le degré de surabondance est égal au nombre total d'appuis simples puisque la poutre devient isostatique en supprimant ces appuis.

Le calcul d'une telle poutre peut s'effectuer de diverses manières. On peut, notamment, utiliser les quatre méthodes décrites au paragraphe **2.** ci-dessus.

On peut encore utiliser la *formule des trois moments*. En effet, considérons une poutre encastrée en A, appuyée en B et C et soumise à une certaine charge p (fig. 26). Prenons les symétriques B′ et C′ de B et de C et envisageons une poutre continue sur cinq appuis C′, B′, A, B et C, chargée dans la partie fictive C′A par une charge symétrique de celle agissant sur l'autre partie. Par raison de symétrie la déformée en A possédera une tangente horizontale. Nous avons ainsi reproduit fictivement la propriété essentielle de l'encastrement en A et nous pourrons calculer la poutre sur cinq appuis à l'aide du théorème des trois moments. Les résultats trouvés pour les dernières travées correspondent à ceux cherchés.

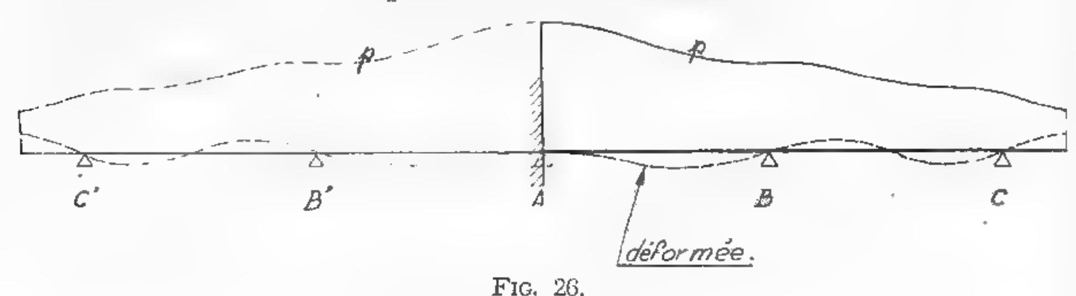


FIG. 26.

Pratiquement, il est plus simple, dans un cas général (I variable et charges quelconques) d'utiliser la *méthode des dérivées du potentiel interne* qui est celle que nous exposerons exclusivement ci-après. Cette méthode donnant lieu aux mêmes raisonnements que lors des applications précédentes, nous l'exposerons succinctement en nous limitant au cas d'une poutre possédant un seul appui, en supplément à son encastrement.

4.32 Exposé de la méthode. — Considérons la poutre encastrée en A et appuyée en B sur un appui déformable, ou non, par rapport à A. Cette poutre est soumise à une charge quelconque p et possède une inertie I variable de façon quelconque (fig. 27 *a*).

Rendons le système isostatique, de la façon la plus simple, en supposant l'appui B supprimé [1]. Désignons par X la réaction réelle inconnue en ce

1. — On pourrait encore le rendre isostatique en assimilant l'encastrement à un appui simple (charges normales) ou à une articulation (charges obliques). On poserait alors comme inconnue le moment d'encastrement réel en A.

point, en la supposant, arbitrairement, du sens des charges appliquées (simplification de signes). Dans le système rendu isostatique, désignons par

m et t le moment fléchissant et l'effort tranchant dus aux charges extérieures (fig. 27 *b*) ;

α et α' le moment fléchissant et l'effort tranchant dus à $X = 1$ en B (fig. 27 *c*).

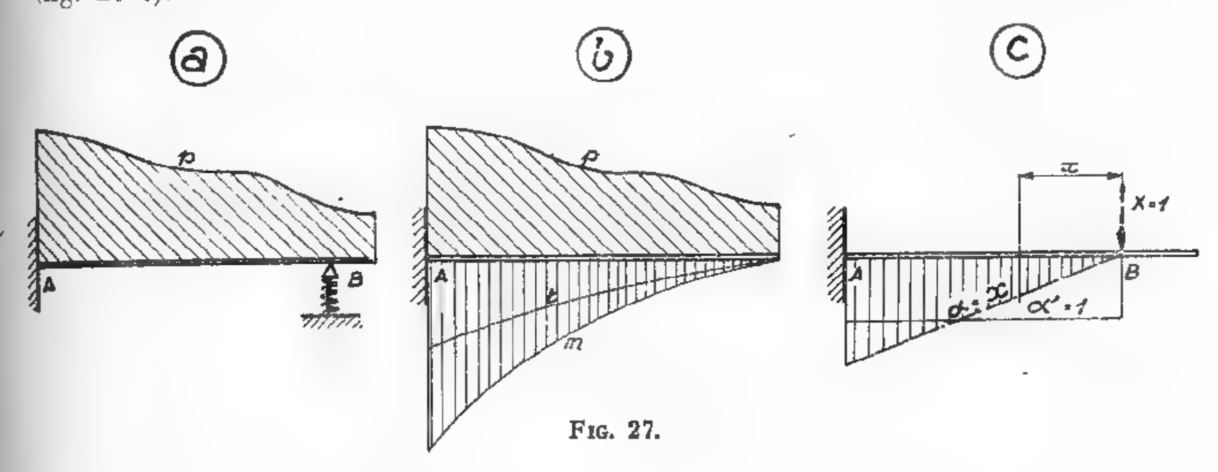


Fig. 27.

Notons que dans ce cas[1]

$$\alpha = x \quad \text{et} \quad \alpha' = 1 \qquad \text{(entre B et A).}$$

Expressions des efforts réels

$$M = m + \alpha X \, ; \qquad T = t + \alpha' X.$$

Expression du potentiel interne principal (flexion)

$$U = \sum \frac{(m + \alpha X)^2}{2\ EI} \Delta x$$

d'où

$$\frac{dU}{dX} = \sum \frac{m\alpha}{EI} \Delta x + X \sum \frac{\alpha^2}{EI} \Delta x.$$

Cas 1 : Appui B *fixe relativement à* A.

Le théorème de Ménabréa donne directement

$$X = -\frac{\sum \frac{m\alpha}{EI} \Delta x}{\sum \frac{\alpha^2}{EI} \Delta x}.$$

Cas 2 : Appui B *mobile relativement à* A.

Désignons par y la *dénivellation relative* qui doit être lue ici, à partir de la normale en A' à l'encastrement déformé (distance B'_1B', fig. 28) et dans le sens positif adopté pour X.

Le théorème de Castigliano donne (§ 4.226)

$$X = \frac{y - \sum \frac{m\alpha}{EI} \Delta x}{\sum \frac{\alpha^2}{EI} \Delta x}.$$

1. — Les notations générales α et α' ont pour avantages de permettre une expression générale des résultats, quel que soit le cas envisagé et d'éviter l'indication des limites particulières d'intégration.

Dans le *cas particulier* où y est une fonction linéaire de X

$$y = kX$$

on trouve pour X la même expression qu'au paragraphe **4.226** dans ce même cas particulier.

Les *efforts réels* M et T se calculent toujours à l'aide de leurs expressions générales indiquées ci-dessus, ou encore à l'aide d'opérations graphiques (redressements ou décalages de m et t) analogues à celles indiquées au paragraphe **4.227**.

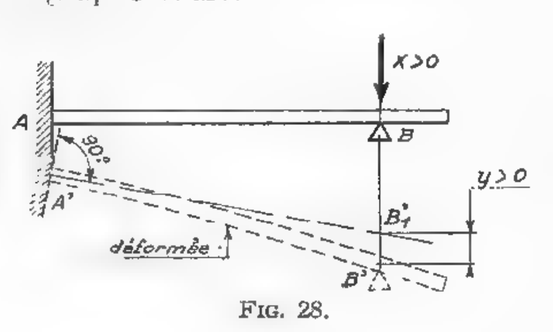


FIG. 28.

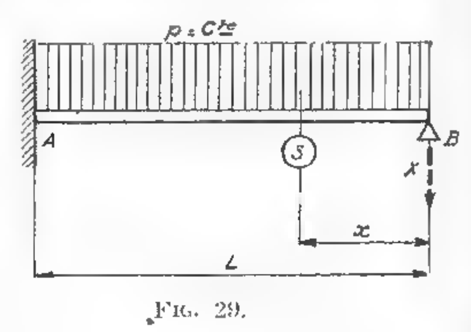


FIG. 29.

Même disposition des calculs que pour une poutre sur trois appuis, et même généralisation au cas de plusieurs appuis (**4.24**).

4.33 Application dans un cas particulier. — Poutre d'inertie constante, encastrée en B et appuyée à l'autre extrémité A sur un appui fixe, soumise à une *charge uniformément répartie* p (fig. 29).

L'appui A étant supprimé on a, dans une section S,

$$m = p\, x\, \frac{x}{2} = p\, \frac{x^2}{2}$$

et

$$y = x.$$

D'où la réaction X en B

$$X = -\frac{\int_0^L p\, \frac{x^2}{2}\, x\, dx}{\int_0^L x^2\, dx} = -\frac{3}{8}\, pL$$

et le moment fléchissant réel M

$$M = m + yX = p\,\frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}\, p\, x\, L = \frac{p\, x}{2}\left(x - \frac{3\,L}{4}\right)$$

en particulier, à l'encastrement A ($x = L$)

$$M_A = \frac{pL^2}{8}$$

Résultats classiques (Voir *Planche* 33, cas 8).

4.4 CALCUL DES POUTRES DROITES A DEUX ENCASTREMENTS.

4.41 Remarques préliminaires. — Les méthodes exposées ci-après concernent, en toute rigueur, des poutres dont les encastrements extrêmes ne s'opposent pas à des variations des dimensions longitudinales de ces poutres, par suite de leurs flèches de flexion. D'une façon imagée un encastrement, au moins, devrait théoriquement être réalisé comme l'encastrement B de la figure 30 [1].

1. — Dans le cas contraire, il existerait des réactions longitudinales opposées en A et B et le problème devrait se traiter d'une façon analogue à celui des plaques fixées rigidement (chap. XVII, § **4.3**).

En pratique, si les poutres possèdent une rigidité de flexion suffisante, c'est-à-dire si elles ne constituent pas des « systèmes souples », ces méthodes restent applicables même avec des encastrements dits « parfaits » (ou complets). Notons que c'est le cas de la grande majorité des poutres envisagées industriellement.



Fig. 30.

Nous conviendrons donc de représenter leurs encastrements selon la [...]ode habituelle c'est-à-dire selon la représentation A de la figure 30. [...]e même qu'au paragraphe précédent on peut utiliser, pour résoudre [...]stèmes, les quatre méthodes exposées au paragraphe **2.** La formule [...]ois moments ne peut s'utiliser, pratiquement, que dans le cas parti[...] de poutres symétriques et symétriquement chargées. Envisager alors [...] poutre équivalente » sur quatre appuis A', A, B et B' selon figure 31.

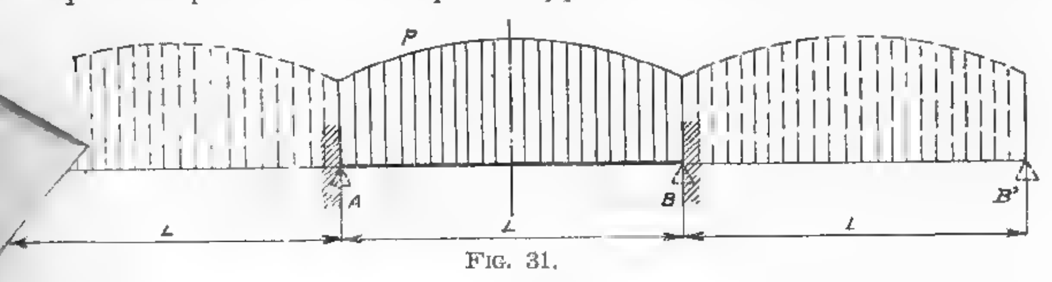


Fig. 31.

Nous nous limiterons ci-dessous à l'exposé rapide d'une méthode générale basée sur le théorème de Castigliano.

4.42 Exposé de la méthode. — Considérons la poutre bi encastrée de la figure 32 *a* d'inertie I, variable d'une façon quelconque et soumise à un système de charges (normales) quelconques.

Rendons cette poutre isostatique en effectuant une *section de coupure* située au voisinage immédiat de l'appui B, par exemple (fig. 32 *b*).

Les inconnues de liaison existant en cette section comprennent :

un effort tranchant X
un moment fléchissant Y } système hyperstatique du 2ᵉ degré

(l'effort normal est nul, par hypothèse, d'après la remarque préliminaire du paragraphe précédent).

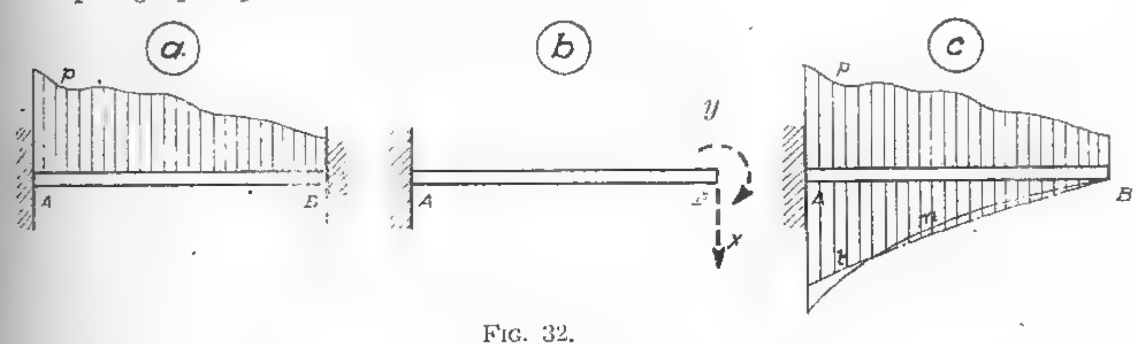


Fig. 32.

Fixons-nous toujours, pour ces inconnues, des sens arbitraires tels qu'elles donnent lieu à des efforts positifs (fig. 32*b*). Soient, dans le sys-

tème isostatique, m le moment fléchissant dû aux charges extérieures seules (fig. 32 *c*), α le moment dû à $X=1$ en B (fig. 33 *a*) et β le moment dû à $Y=1$ en B (fig. 33 *b*).

Nous avons, dans ce cas particulier

$$\alpha=x \quad \text{et} \quad \beta=1.$$

Expression du moment fléchissant réel

$$M=m+\alpha X+\beta Y.$$

Expression du potentiel interne principal (flexion)

$$U=\sum \frac{(m+\alpha X+\beta Y)^2}{2\ EI}\,\Delta x.$$

Le « formulaire mathématique » du paragraphe **2.553** nous donne les expressions des dérivées partielles de U par rapport à X et à Y

$$(A=m, \quad \alpha=x, \quad \beta=1, \quad B=EI).$$

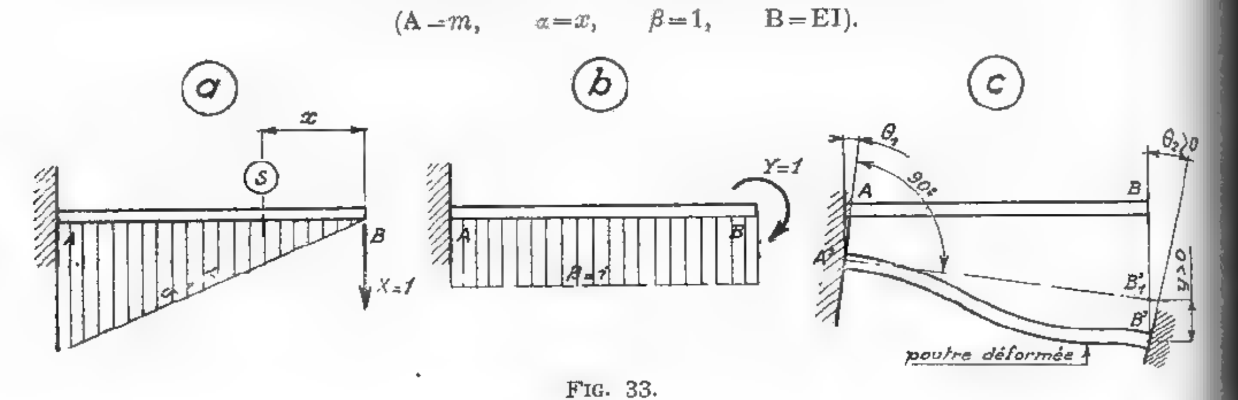


FIG. 33.

Cas 1 : Encastrements fixes l'un par rapport à l'autre. — En annulant les deux dérivées partielles (théorème de Ménabréa), on obtient le système de deux équations suivant :

$$\sum \frac{mx}{EI}\,\Delta x+X\sum \frac{x^2}{EI}\,\Delta x+Y\sum \frac{x}{EI}\,\Delta x=0 \qquad (1)$$

$$\sum \frac{m}{EI}\,\Delta x+X\sum \frac{x}{EI}\,\Delta x+Y\sum \frac{1}{EI}\,\Delta x=0. \qquad (2)$$

Ce système permet, après calcul des cinq « sommes » différentes qui y figurent, de déterminer X et Y.

Cas 2 : Encastrements mobiles l'un par rapport à l'autre. — Cette *mobilité relative donne lieu* (fig. 33 *c*) à une *flèche relative* y (positive dans le sens de X) et à une *rotation relative* : $\theta=\theta_2-\theta_1$ (positive dans le sens de Y). D'après le théorème de CASTIGLIANO, on égale, respectivement, les premiers membres des équations (1) et (2) ci-dessus à y et à θ, ce qui permet le calcul de X et de Y.

Les *efforts réels* se calculent, selon la méthode habituelle, en remplaçant X et Y par leurs valeurs dans les expressions de M et de T, soit

$$M=m+xX+Y$$
$$T=t+X.$$

On peut, également, procéder graphiquement par « redressement » et « décalages » des courbes t et m.

Même disposition des calculs en un seul tableau analogue à ceux déjà vus.

4.43 Cas particulier. — Considérons une *poutre homogène d'inertie constante* située entre deux *encastrements fixes* distants de L.

Le système d'équations ci-dessus devient, en résolvant les intégrations indépendantes des forces appliquées

$$\sum_0^L m\ x\ \Delta x + X\ \frac{L^3}{3} + Y\ \frac{L^2}{2} = 0$$

$$\sum_0^L m\ \Delta x + X\ \frac{L^2}{2} + YL = 0.$$

En résolvant ce système, on obtient, en posant

$C = \sum_0^L m\ \Delta x$ et $D = \sum^L m\ x\ \Delta x$ (paramètres propres à chaque cas de charge) :

$X = \frac{6}{L^2}(CL - 2\ D)$ (réaction d'encastrement en B)

$Y = \frac{2}{L^2}(3\ D - 2\ CL)$ (moment d'encastrement en B).

4.44 Application. — Poutre droite encastrée à ses deux extrémités A et B (fig. 34) et soumise à une *charge uniformément répartie* p sur sa longueur L (inertie constante et encastrements fixes).

Expression de m $\quad m = -\ p\ \frac{x^2}{2}$

d'où

$$C = -\ \frac{p}{2} \int_0^L x^2\ dx = -\ p\ \frac{L^3}{6}$$

$$D = -\ \frac{p}{2} \int_0^L x^3\ dx = -\ p\ \frac{L^4}{8}.$$

On a donc

$$X = -\ \frac{6}{L^3}\left(p\ \frac{L^4}{6} - p\ \frac{L^4}{4}\right) = p\ \frac{L}{2}$$

$$Y = -\ \frac{2}{L^2}\left(\frac{3}{8} \cdot p\ L^4 - p\ \frac{L^4}{3}\right) = -\ p\ \frac{L^2}{12}.$$

Moment fléchissant total dans une section S d'abscisse x

$$M = m + x\ X + Y = -\ \frac{p}{2}\left(x^2 - Lx + \frac{L^2}{6}\right).$$

Cette variation parabolique présente au milieu C de la poutre un maximum qui a pour valeur

$M_C = \frac{p\ L^2}{24}$ (voir *Planche* 33, cas 11).

Aux deux encastrements ($x=0$ et $x=L$) on obtient

$$M_A = M_B = Y = -p\ \frac{L^2}{12}$$

soit un moment deux fois supérieur, en valeur absolue, à celui existant au milieu de la portée.

L'effort tranchant, de variation linéaire, est distribué anti-symétriquement de part et d'autre de ce milieu et vaut aux encastrements

$$T_A = -T_B = p\ \frac{L}{2}.$$

Remarque. — Ces résultats se retrouvent pour une *poutre continue reposant*

sur un grand nombre d'appuis (N=∞, théoriquement) *équidistants et soumise à une charge uniformément répartie* (fig. 35)

$M = -p\dfrac{L^2}{12}$ au niveau de chaque appui,

$M = p\dfrac{L^2}{24}$ au milieu de chaque travée.

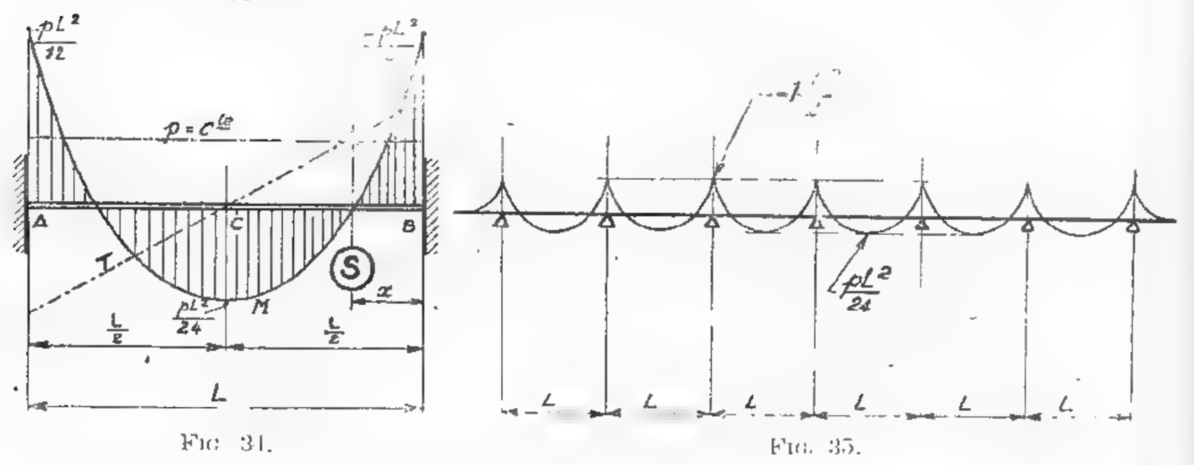


Fig. 34. Fig. 35.

Cette concordance s'explique fort bien, physiquement, en considérant que, par raison de symétrie, la poutre reste horizontale au niveau des appuis, situés loin des bords, qui équivalent ainsi, fictivement, à des encastrements.

4.5 CAS PARTICULIERS DE POUTRES DROITES HYPERSTATIQUES.

Nous donnons, **Planche 33**, un tableau-formulaire résumant les résultats obtenus dans quelques cas particuliers usuels de poutres droites hyperstatiques fléchies.

Tous les cas considérés sont relatifs à des *poutres d'inertie constante* dont les *liaisons extérieures* (appuis ou encastrements) sont *fixes* les unes par rapport aux autres.

Lors de l'étude d'une poutre hyperstatique quelconque (c'est-à-dire soumise à un système de charges non conforme aux cas particuliers envisagés Planche 33 ou bien d'inertie variable) ces résultats peuvent servir pour un premier calcul de « dégrossissage » de la poutre. Ce calcul préliminaire indispensable pour se fixer le dimensionnement (c'est-à-dire l'inertie) entrant en jeu dans les calculs ultérieurs, pourra s'effectuer en utilisant le cas particulier de charge le plus voisin du cas considéré.

Ce tableau complète celui donné, **Planche 17**, pour les poutres droites isostatiques fléchies.

4.6 APPLICATION NUMÉRIQUE.

Nous donnons, **Planche 34**, une application numérique concernant le calcul d'une poutre droite continue sur trois appuis. Afin d'éviter la reprise d'un calcul d'efforts sur un système rendu isostatique, nous avons considéré de nouveau, le *longeron de gouvernail de direction étudié Planche* 7 auquel nous avons adjoint un appui supplémentaire D (articulation non bloquée solidaire de la dérive).

Nous nous sommes donné une courbe de variation du moment d inertie de flexion I du longeron, tenant compte des épaisseurs de profil et du type de structure compatible avec la forme en plan figurée Planche 7 et avec un calcul préliminaire rapide.

Nous avons traité le problème en considérant successivement les appuis A, B et D *fixes* ou *dénivelables*. La dénivellation forfaitaire envisagée correspond à une allure probable de la déformation de la dérive.

La résolution a été opérée par la méthode des dérivées du potentiel interne. Notons que pour utiliser la méthode des trois moments, les moments μ se liraient sur la courbe m, à partir des lignes de fermeture *ad* et *bd*.

Remarque. — Afin d'obtenir une concordance avec les méthodes ci-dessus, nous avons été conduits à changer quelques notations utilisées Planche 7, notamment en ce qui concerne le moment M (système sur deux appuis) qui est devenu *m*.

5. — CALCUL DES ARCS ET DES PORTIQUES PLANS HYPERSTATIQUES

5.1 GENERALITES.

5.11 Définition. On appelle « *arc* » ou « *poutre en arc* » une poutre prismatique possédant une *ligne moyenne courbe*. Si cette ligne moyenne est contenue dans un même plan, on dit que l'on a affaire à un *arc plan* (fig. 36 *a* où le plan de l'arc est celui de la figure).

On désigne par « *portique* » ou « *poutre à béquilles* » un assemblage de membrures rectilignes formant entre elles des angles rigides (fig. 36 *b* où les angles A et B sont rigides).

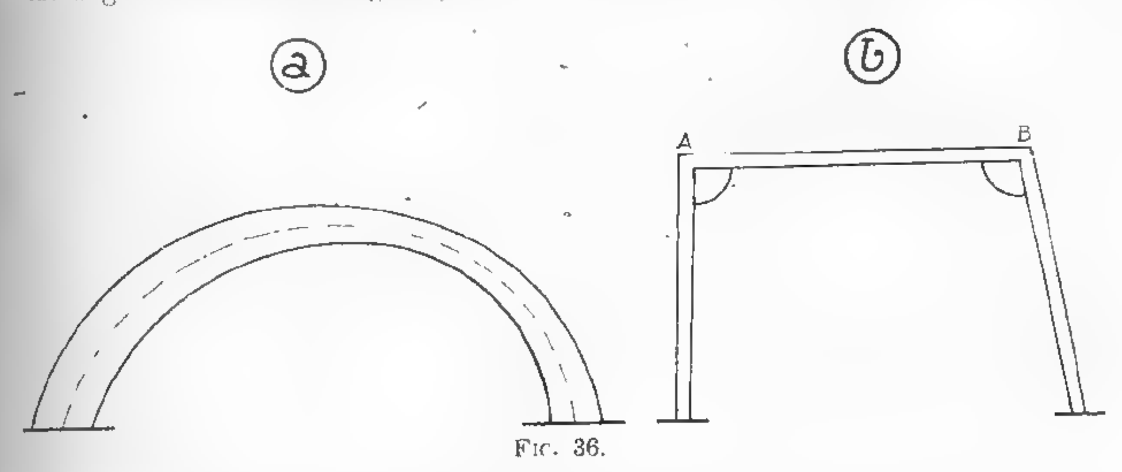


FIG. 36.

5.12 Conventions générales. — Les arcs et les portiques étant tributaires de méthodes de calcul identiques, nous conviendrons, pour les raisonnements ci-après, d'englober ces deux catégories de poutres sous la désignation commune d'arcs.

Nous nous limiterons à l'étude des *arcs plans, chargés suivant leurs plans de flexion* qui seront confondus avec deux des figures. En d'autres termes, la réduction des efforts dans une section quelconque ne donnera pas lieu à un moment de torsion.

Par contre, cette réduction d'efforts fera apparaître, dans le cas général, un *effort normal* N de traction ou de compression (chap. IX, § **4.2** et fig. 37 *a*). Les méthodes de calcul usuelles (superposition des effets élastiques) restent applicables aux arcs, malgré ces efforts normaux, contrairement au cas des poutres droites (§ **4.0** ci-dessus). En effet, les « effets amplificateurs ou réducteurs » de ces efforts normaux sur les flèches et les moments de flexion deviennent négligeables dans le cas des arcs, car ces efforts possèdent *initialement* un bras de levier *d* par rapport à une section voisine (fig. 37 *a*) contrairement au cas des poutres droites (fig. 37 *b*). La déformation de l'arc entraînera une variation *relative* de *d* suffisamment faible pour être négligée.

Remarquons que, dans une poutre en arc, il convient d'envisager toujours des *sections droites normales à la fibre moyenne* (convention générale pour toutes les poutres prismatiques).

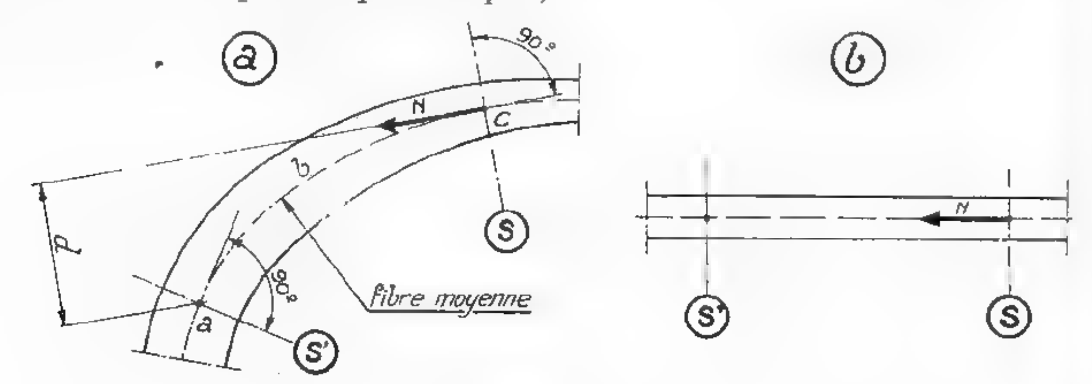


Fig. 37.

Dans toutes les expressions ci-après, la distance Δl séparant deux sections droites sera toujours mesurée sur la fibre moyenne. Ce sera donc une distance *curviligne* dans le cas des poutres en arcs (longueur de l'arc *abc*, fig. 37 *a*).

5.13 Arcs isostatiques. — Il existe trois cas particuliers d'arcs (ou portiques) plans isostatiques :

a) *Arc encastré à une extrémité et libre à l'autre* (fig. 38 *a*). Il n'existe en effet, aucune difficulté pour la mise en équilibre extérieur ou pour la recherche des efforts internes appliqués aux sections droites ;

b) *Arc à trois articulations :* A et B liaisons extérieures et C articulation propre à la structure (fig. 38 *b*). Ce cas particulier a été étudié au chapitre III, paragraphe 5.4 pour sa mise en équilibre extérieur. La construction graphique à laquelle nous avions abouti est reproduite figure 38 *b*. Les efforts internes appliqués aux sections droites se calculent sans difficulté, les réactions extérieures étant connues ;

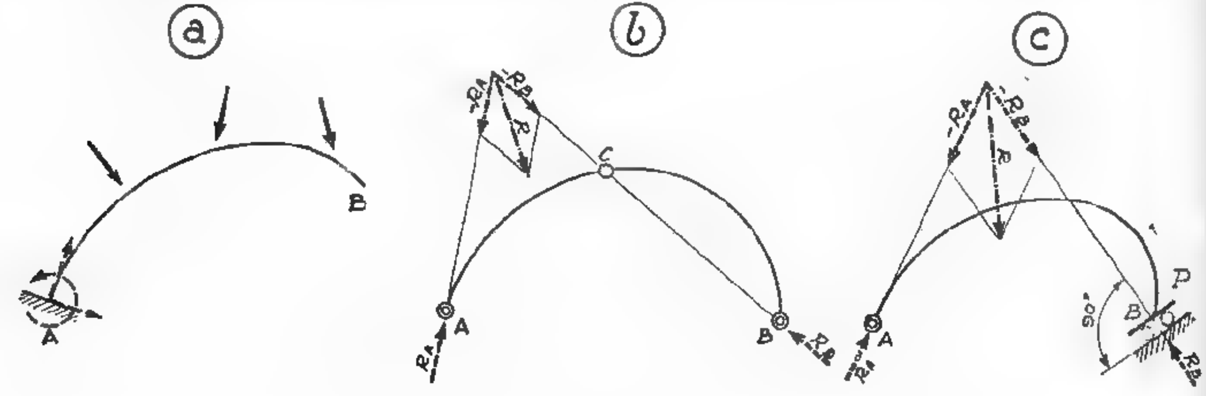


Fig. 38.

c) *Arc sur une articulation fixe et un appui mobile :* L'appui mobile est schématisé en B (fig. 38 *c*) par un chariot se déplaçant, sans frottement, sur un plan P. La réaction R_B devant être normale à ce plan a donc une direction connue, d'où la décomposition des efforts indiquée sur la fig. 38 *c* et par suite, le calcul sans difficulté des efforts internes appliqués aux sections droites de l'arc.

La connaissance de ces cas particuliers nous servira ci-après pour effectuer la première opération de résolution d'un arc hyperstatique qui consiste toujours à rendre cet arc isostatique.

5.14 Poussée des arcs. — Nous avons été conduits au chapitre III, paragraphe 4.34, à donner la notion de la « *force de poussée* » qui s'exerce sur les articulations extérieures d'un arc tendant à s'ouvrir sous l'action des charges qui lui sont appliquées. On désigne, d'une façon plus générale, par *poussée* d'un arc les actions antagonistes qu'il exerce sur ses liaisons extérieures, ces actions pouvant aussi bien tendre à rapprocher qu'à écarter ses points de liaison. On conçoit aisément que cette poussée sera fonction de la *déformabilité* de l'arc. C'est un phénomène hyperstatique [1].

5.15 Utilisation des arcs. — Les arcs sont d'un usage très répandu en construction. En *maçonnerie*, on les rencontre sous forme de *voûtes* (églises, ponts de pierre, tunnels, portails, etc...). Les réactions opposées, par les arcs-boutants, les tirants, ou l'ensemble de l'édifice, au phénomène de poussée, permettent de n'obtenir que des efforts de compression dans les différentes sections des voûtes, ce qui est indispensable avec ce mode de construction.

En *charpente métallique courante*, citons les travées des ponts ou viaducs.

En *construction aéronautique*, on les rencontre pour certaines nervures de becs d'attaque (fig. 39 *a* : arcs sur deux articulations) certains couples de fuselages-coques, notamment de couples de jonction voilure fuselage (fig. 39 *b* et 39 *c*). Remarquons que la majorité des couples de fuselages-coques constituent plutôt des anneaux ou cadres étudiés au paragraphe suivant. Nous verrons, d'ailleurs, que ces éléments ne constituent, en fait, que des cas particuliers d'arcs.

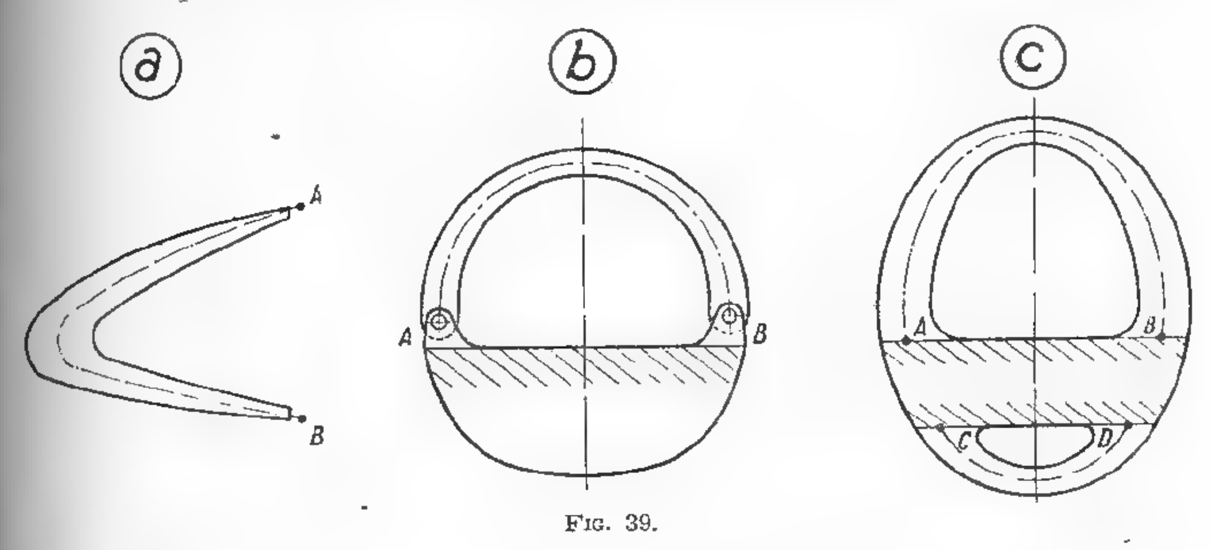


Fig. 39.

5.16 Principes généraux de calcul. — Nous utiliserons ci-après, d'une façon générale, la méthode de résolution basée sur les théorèmes de Castigliano ou de Ménabréa qui permettent une solution particulièrement élégante des problèmes relatifs aux arcs hyperstatiques.

Nous envisagerons successivement le cas des arcs sur deux articulations, des arcs encastrés et articulés et des arcs à deux encastrements.

Les procédés de résolution s'apparentant étroitement à ceux exposés pour les poutres droites, nous n'en donnerons qu'un exposé rapide.

---

1. — Ce phénomène présente une analogie avec la traction exercée sur son encadrement par une plaque mince chargée transversalement (chap. XVII).

5.2 CALCUL DES ARCS SUR DEUX ARTICULATIONS

5.21 Données. — Considérons un arc (ou portique) de forme quelconque, d'inertie variable, possédant à sa base deux articulations A et B lui fournissant ses réactions extérieures. Cet arc est soumis à un système de forces extérieures quelconques : F_1, F_2, F_3... (fig. 40 *a*). Nous savons (chapitre III, § **4.34**) que ce système est hyperstatique au premier degré par suite de la *poussée*, statiquement inconnue, qui s'exerce, d'une façon antagoniste, en A et B.

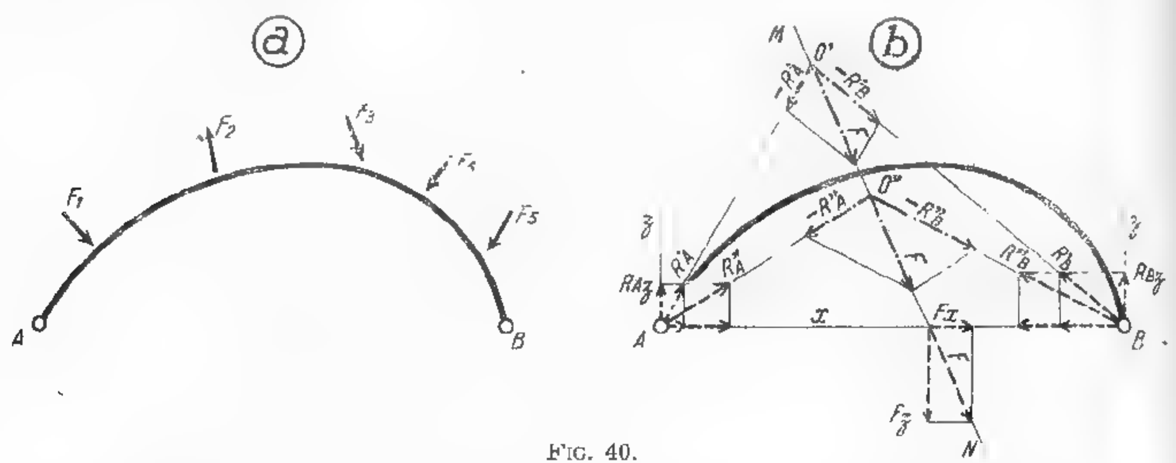


Fig. 40.

Remarque. — Cette indétermination peut être mise, *graphiquement*, en évidence. En effet, supposons connue la ligne d'action MN de la résultante F des charges extérieures appliquées à l'arc (fig. **40** *b*). La décomposition de cette résultante peut s'effectuer suivant une infinité de directions concourantes sur MN et passant par A et B ; par exemple les directions issues de O′ ou de O″. Remarquons que les réactions ainsi obtenues ont mêmes projections sur les directions Az ou Bz normales à la base AB (composantes statiquement déterminées). Par contre, leurs projections sur AB diffèrent avec le point de départ arbitraire envisagé (tout en conservant une même somme algébrique égale, en valeur absolue, à la projection F_x de F sur AB). Ces constructions mettent en évidence l'existence d'une inconnue de poussée se traduisant par *deux réactions complémentaires antagonistes* s'exerçant en A et B suivant la droite joignant ces articulations.

5.22 Méthode de résolution. — *a*) *Rendons l'arc isostatique.* Pour cela, le moyen le plus simple consiste à remplacer une articulation, B par exemple, par un appui mobile sur la direction AB (fig. 41 *a*) [1].

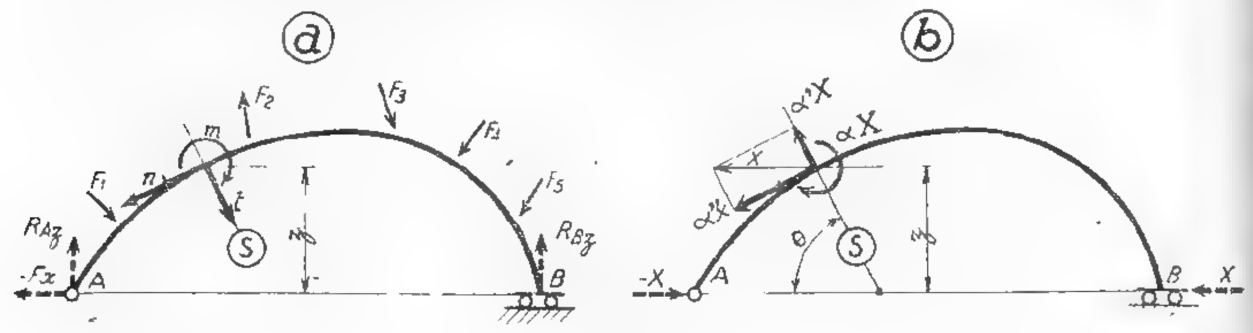


Fig. 41.

1. — On pourrait, également, supposer l'arc articulé en un troisième point situé sur sa fibre moyenne entre A et B. On poserait alors, comme inconnue, le moment de liaison agissant réellement en ce point. Cette méthode n'est avantageuse que dans le cas d'un arc symétrique et symétriquement chargé (articulé sur l'axe de symétrie).

b) *Calculons*, dans le système rendu isostatique, *les efforts dus aux charges extérieures* F_1, F_2, F_3... *seules*. Soit m le moment fléchissant dans une section droite courante S de cote z par rapport à AB (fig. 41 *a*). Désignons également par t et n l'effort tranchant et l'effort normal ainsi obtenus.

c) Désignons par X la *réaction réelle inconnue agissant en* B *suivant la base* AB [1] et dirigeons, arbitrairement, cette inconnue de telle façon qu'elle donne lieu à un moment positif dans les différentes sections de l'arc (fig. 41 *b*). Dans le système isostatique, elle s'équilibre par — X en A et donne ainsi (isolément) dans la section S :

un moment fléchissant	$\chi X = z X$,
un effort tranchant	$\chi' X = -X \cos \theta$,
un effort normal	$\chi'' X = X \sin \theta$.

d) *Expression des efforts réels* dans la section droite courante S :

moment fléchissant	$M = m + \chi X = m + zX$
effort tranchant	$T = t + \chi' X$
effort normal	$N = n + \chi'' X$.

e) *Potentiel interne*. — On peut toujours négliger, pour les arcs métalliques, le travail interne de cisaillement dû aux efforts tranchants T. Si l'arc est suffisamment long (ou élancé) on peut également négliger le travail dû aux efforts normaux N (voir ci-après § 5.231). Il reste comme *potentiel interne principal*, le travail de flexion, dû à M, qui a pour expression, dans le cas général (E et I variables)

$$U = \sum \frac{(m + zX)^2}{2\,EI} \Delta l$$

cette somme s'étendant tout le long de l'arc, de A à B (voir ci-dessus § 5.12 la définition de Δl).

f) *Calcul de l'inconnue*. — Si la distance AB est fixe, ce qui est le cas le plus général, on a, en égalant à zéro la dérivée $\frac{dU}{dX}$ (voir expressions précédentes et formulaire mathématique § 2.552)

$$X = -\frac{\sum \frac{mz}{EI} \Delta l}{\sum \frac{z^2}{EI} \Delta l} \qquad (1)$$

Si la distance AB se modifie d'une longueur y sous l'action de X (longueur comptée positivement dans le sens de X) égaler la dérivée à y (théorème de Castigliano), ce qui donne

$$X = \frac{y - \sum \frac{mz}{EI} \Delta l}{\sum \frac{z^2}{EI} \Delta l} \qquad (2)$$

g) *Efforts réels*. — Ils s'obtiennent toujours en remplaçant X par sa valeur dans leurs expressions respectives données ci-dessus.

5.23 Remarques.

5.231 *Modification due au travail des efforts normaux*. — Dans le cas d'un arc peu élancé ou soumis à des efforts normaux importants, il devient utile de tenir compte du travail de ces efforts.

1. — Cette inconnue comprend « l'effet de poussée » proprement dit et la composante suivant AB, de la résultante F équilibrée réellement en B.

On obtient avec les conventions ci-dessus

$$U' = \sum \frac{(m + z\,X)^2}{2\,EI}\,\Delta l + \sum \frac{(n + x''X)^2}{2\,ES}\,\Delta l$$

d'où, dans le cas d'une distance AB fixe

$$X = -\frac{\sum \frac{mz}{EI}\,\Delta l + \sum \frac{n\,x''}{ES}\,\Delta l}{\sum \frac{z^2}{EI}\,\Delta l + \sum \frac{x''^2}{ES}\,\Delta l}. \qquad (3)$$

Nous ne reproduirons plus cette modification des résultats dans les systèmes étudiés ci après. Elle reste toujours d'une forme analogue à celle ci-dessus.

5.232 *Influence de la forme de l'arc.* — L'examen des expressions de X, ci-dessus, montre qu'il y figure le paramètre x mesurant la hauteur de l'arc c'est-à-dire sa *forme* dont dépend la poussée. Il est facile de voir qu'elle est d'autant plus élevée que l'arc est plus plat (tous les autres facteurs restant inchangés).

5.233 *Cas particuliers.* — Dans le cas le plus fréquent, où E est constant tout le long de l'arc (matériau homogène) les expressions (**1**) et (3), se simplifient par E.

Si au surplus l'inertie I et la section S sont constantes, l'expression (1) de X se simplifie par EI et le dénominateur caractérise uniquement un « paramètre de forme » de l'arc étudié.

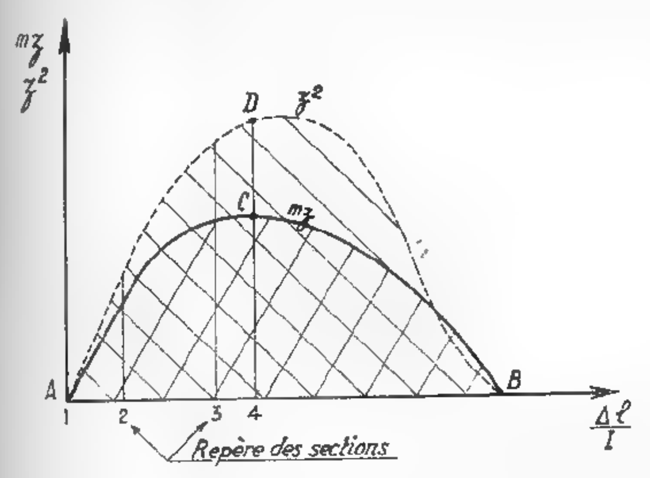
5.234 *Contraintes de flexion.* — Nous avons vu au chapitre IX, paragraphe **4.**, que les contraintes normales dues à M dans une section droite de l'arc devraient, en toute rigueur, se calculer par une formule particulière aux poutres courbes. Nous avons également indiqué, à ce moment-là, que la formule usuelle $n_f = \frac{M}{\left(\frac{I}{V}\right)}$ restait pratiquement satisfaisante pour des arcs suffisamment élancés $\left(\frac{R}{h} > 10\right)$ ce qui est le cas le plus fréquent.

5.235 *Contraintes dues aux efforts normaux.* — Même si les efforts normaux ont été négligés pour le calcul de X, il convient toujours d'en tenir compte pour la détermination des *contraintes* de l'arc, car ils peuvent modifier sensiblement les contraintes de flexion pure [1]. Leur superposition à ces contraintes s'effectue simplement d'une façon algébrique.

5.24 **Disposition pratique des calculs.** — De même que pour les applications précédentes, les calculs seront avantageusement disposés dans un même tableau du genre de celui ci-dessous. Ce tableau correspond au cas d'un arc *homogène* (E constant) à inertie variable. Sa disposition correspond au cas de l'expression (**1**) de X (simplifiée par E) et à une *détermination graphique des intégrales* figurant dans cette expression. Construire alors les courbes mz et z^2, par points, en portant en abscisses les termes $\frac{1}{\Delta l}$ comme intervalles entre les repères de chaque section étudiée (ce qui évite de diviser par I les termes mz et z^2 ; voir figure 42). Le planimétrage

1. — Cette conclusion n'est pas en désaccord avec celle qui a conduit à négliger le travail des efforts normaux, car les travaux sont proportionnels aux flèches et nous savons qu'à contrainte égale, celles de flexion sont généralement très supérieures à celles de traction ou compression pures, principalement pour les poutres longues.

de ces courbes donne les valeurs des intégrales cherchées, compte tenu des échelles. On en déduit la valeur de X.



Echelles :

$\frac{\Delta l}{I}$: 1 mm = a mm^{-3}

mz : 1 mm = b mm^2 kg

z^2 : 1 mm = c mm^2

S_1 = aire ACB (en mm^2)

S_2 = aire ADB (en mm^2)

$\Sigma \frac{mz}{I} \Delta l = S_1 ab$ kg mm^{-1}

$\Sigma \frac{z^2}{I} \Delta l = S_2 ac$ mm^{-1}

FIG. 42.

On peut également effectuer directement dans le tableau ces intégrations par *sommes de produits partiels*. Calculer alors les termes $mz \frac{\Delta l}{I}$ et $z^2 \frac{\Delta l}{I}$ dans chaque intervalle, en utilisant les *valeurs moyennes* de mz et z^2 correspondant à ces intervalles, et additionner ces termes.

SECTION	PARAMÈTRES DE STRUCTURE					PARAMÈTRES DE CHARGES			EFFORTS RÉELS		
	Δl	$I_{moy.}$	$\frac{\Delta l}{I}$	z	z^2	m	mz	zX	T	N	M
1				—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—								
2				—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—								
3				—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—								
4				—	—	—	—	—	—	—	—
.											
.											
.											

Remarque. — Le calcul de T et de N peut s'effectuer directement sans avoir à déterminer les termes intermédiaires t, n, α', α'' définis ci-dessus. Connaissant X on peut, en effet, déterminer les *résultantes partielles* propres à chaque section et les composer (graphiquement) en une parallèle T et une normale N à la direction de chaque section.

Nous exposerons en détail cette méthode graphique au chapitre XXII lors de l'étude des couples de fuselages-coques. Notons que cette méthode permet également un calcul rapide des moments m.

Le tableau ci-dessus peut être complété par les valeurs des contraintes correspondantes au niveau de chaque section ou seulement, des « sections dangereuses ».

5.25 **Application algébrique à un portique sur deux articulations.** — Dans le cas d'un portique, où les intégrations sont linéaires, le calcul peut se conduire algébriquement d'une façon simple.

Considérons le cas particulier représenté figure 43 *a* : *portique sur deux articulations* A *et* B, *soumis à une charge uniformément répartie* p *sur la poutre horizontale* CD *d'inertie constante* I_0, *inertie constante des béquilles* AC *et* BD : I_1.

Le phénomène de poussée est mis en évidence par l'allure de la déformée représentée figure 43 *a*.

Rendons le système isostatique selon figure 43 *b*.

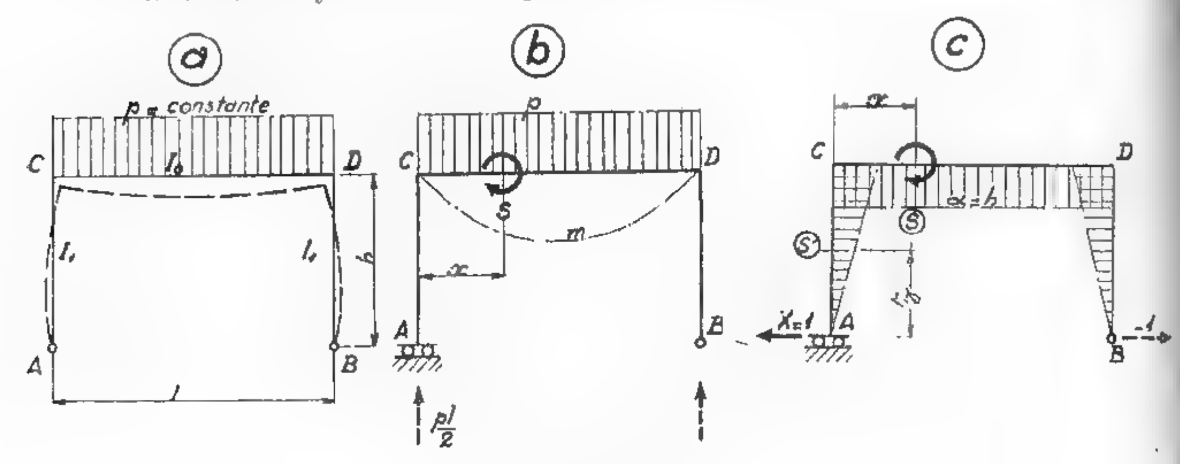


FIG. 43.

Moment m (dû à p seul, figure 43 *b*) :

béquilles AC et BD : $m=0$,

poutre CD : $m=\frac{pl}{2}x-px\frac{x}{2}=\frac{px}{2}(l-x)$.

Moment α (dû à X=1, figure 43 *c*) :

béquilles AC et BD : $\alpha=z$ (variation linéaire),

poutre CD : $\alpha=h$ (moment constant).

Intégration (*expression* (1) de X, § 5.22, simplifiée par E).

Numérateur :

$$A=\sum\frac{mz}{I}\Delta l=\sum\frac{m\alpha}{I}\Delta l=\frac{1}{I_0}\int_0^l\frac{px}{2}(l-x)\,h\,dx$$

$$=\frac{ph}{2\,I_0}\left[\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^l=\frac{phl^3}{12\,I_0}$$

(Cette intégration est nulle le long des béquilles où $m=0$).

Dénominateur

$$B=\sum\frac{z^2}{I}\Delta l=\sum\frac{\alpha^2}{I}\Delta l=\frac{2}{I_1}\int_0^h z^2\,dz+\frac{1}{I_0}\int_0^l h^2\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\frac{h^3}{I_1}+\frac{h^2 l}{I_0}=\frac{h^2}{3\,I_0 I_1}(2\,hI_0+3lI_1).$$

Poussée

$$X=-\frac{A}{B}=-\frac{p\,l^3\,I_1}{4\,h\,(2\,h\,I_0+3\,l\,I_1)}$$

soit en posant $k=\frac{I_0}{I_1}$ d'où $I_0=k\,I_1$

$$X=-\frac{p\,l^3}{4\,h\,(2\,h\,k+3\,l)}.$$

Les *réactions* en A et B sont égales à X, en valeur absolue et dirigées en sens inverses des forces unitaires représentées figure 43 *c*.

Moments fléchissants réels

$$M = m + zX$$

en C et D

$$M_C = M_D = X\,h = -\frac{p\,l^2}{4\,(2\,hk + 3\,l)}$$

au milieu de CD

$$M_{milieu} = \frac{p\,l^2}{8} + X\,h = \frac{p\,l^2}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{l}{2\,hk + 3\,l}\right).$$

5.26 **Cas particulier d'arc sur deux articulations isostatiques.** — Considérons (fig. 44) un arc sur deux articulations A et B *symétrique* par rapport à la normale Oz au milieu de AB, cette symétrie s'étendant à la forme et aux caractéristiques de résistance des sections. Envisageons un système de *charges appliquées symétriquement par rapport à* Oz et telles qu'elles admettent une *résultante* F *parallèle à la base* AB [1].

Par raison de symétrie, les réactions R_A et R_B doivent être égales. Leurs directions convergent donc en P, point de concours de la ligne d'action de F et de Oz. On en déduit la décomposition d'efforts directe représentée sur la figure (problème *isostatique*).

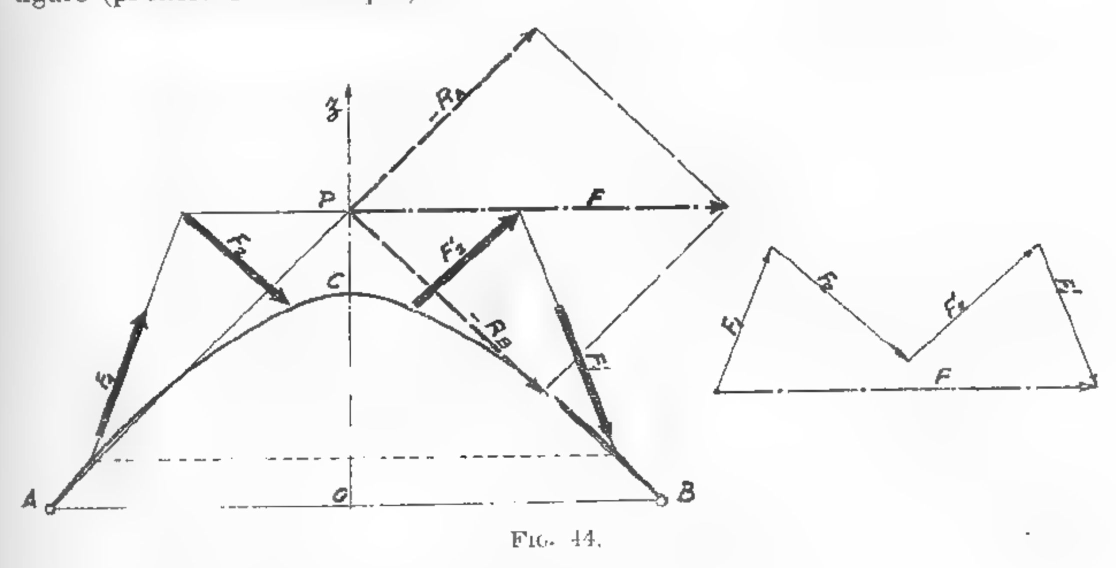


Fig. 44.

Il se produit le même phénomène pour un portique tel que celui de la figure 43 chargé parallèlement à la poutre CD.

5.3 CALCUL DES ARCS ENCASTRÉS ET ARTICULÉS.

Soit un arc plan quelconque encastré en A et articulé en B (fig. 45 *a*). Nous lui appliquerons toujours la même méthode générale. Rendons le système isostatique en supprimant l'articulation B. Il reste un arc encastré à une extrémité et libre à l'autre (fig. 45 *b*). Soit m le moment fléchissant dû aux charges extérieures, au niveau d'une section courante S de ce système.

En désignant par X et Z les composantes, suivant AB et normale à AB, de la réaction réelle en B nous avons comme expression du moment réel en S [2]

$$M = m + zX + x\,Z.$$

1. — Ce système de charges se désigne par système antisymétrique (voir ci-après § 5.421).

2. — Adopter, toujours, pour les inconnues X et Z des sens arbitraires donnant lieu à des moments positifs.

Potentiel interne principal (flexion)

$$U = \sum \frac{(m + z\,X + x\,Z)^2}{2\,EI}\,\Delta l$$

d'où d'après le théorème de MÉNABRÉA si B est indénivelable (dans le sens de X et de Z) par rapport à A

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial U}{\partial Z} = 0$$

soit, d'après notre « formulaire mathématique » (§2.553)

$$\sum \frac{mz}{EI}\,\Delta l + X \sum \frac{z^2}{EI}\,\Delta l + Z \sum \frac{zx}{EI}\,\Delta l = 0$$

$$\sum \frac{mx}{EI}\,\Delta l + X \sum \frac{zx}{EI}\,\Delta l + Z \sum \frac{x^2}{EI}\,\Delta l = 0$$

système d'équations permettant le calcul des inconnues et par suite celui des efforts réels.

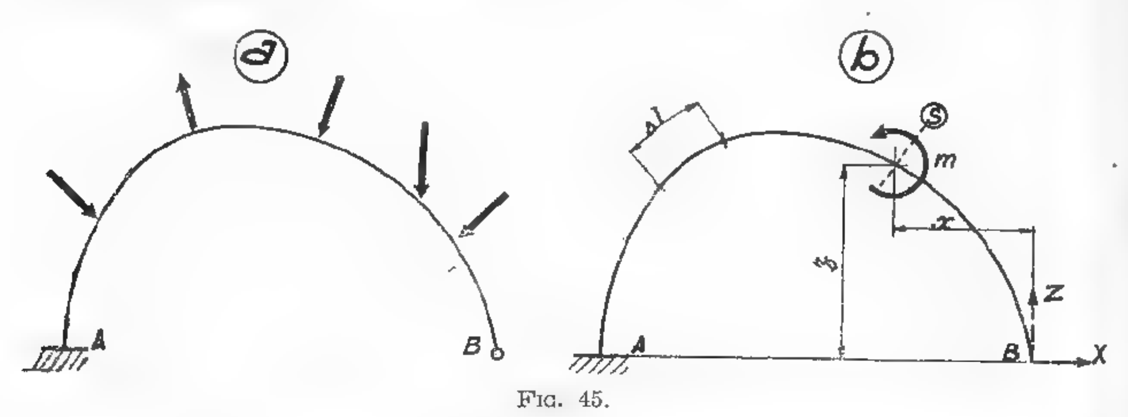


FIG. 45.

Si B est mobile relativement à A, on doit égaler respectivement ces deux équations aux déplacements δ_x et δ_z de B, comptés à partir de la position déformée de A et suivant les sens respectifs de X et de Z.

5.4 CALCUL DES ARCS A DEUX ENCASTREMENTS.

Nous donnerons d'abord un exposé rapide de la méthode générale applicable aux arcs plans bi-encastrés quelconques et nous verrons ensuite les simplifications particulièrement intéressantes relatives aux cas particuliers d'arcs symétriques.

5.41 **Exposé de la méthode générale de résolution.** — Nous appliquerons toujours les mêmes principes fondamentaux de résolution déjà exposés.

Soit (fig. 46 *a*) un arc plan de forme quelconque, d'inertie variable, soumis à un système quelconque de charges et encastré à ses deux extrémités A et B.

Pour le rendre isostatique, supprimons un encastrement : B par exemple (fig. 46 *b*). Soit *m* le moment fléchissant, dans une section courante S de ce système, dû aux charges extérieures seules (équilibrées en A).

Les inconnues hyperstatiques, ou efforts de liaison en B comprennent, dans ce cas général de système plan :

un effort tranchant X,
un effort normal Y,
un moment fléchissant Z,

que nous dirigeons, arbitrairement, selon les indications de la figure 46 *b*.

Désignons par α et β les moments fléchissants agissant en S (système coupé) sous les actions respectives de X=1 et Y=1 appliqués, isolément, en B (et équilibrés en A par les réactions correspondantes) [1]. Remarquons que Z donne un moment constant tout le long de l'arc et égal à sa valeur propre.

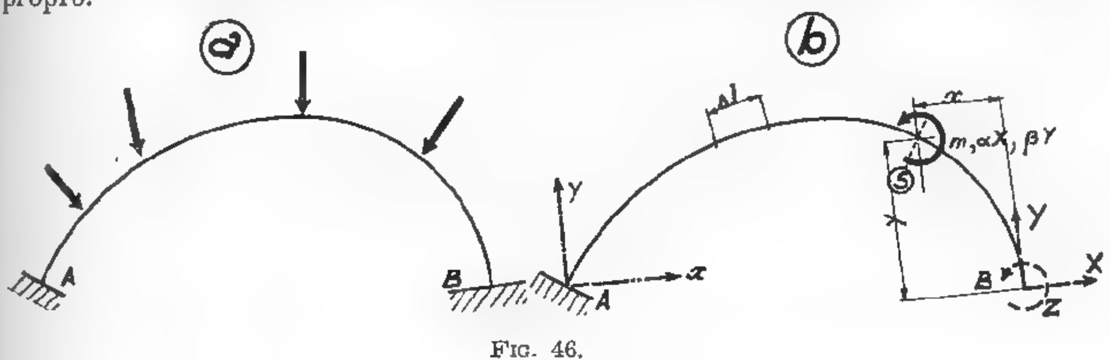


Fig. 46.

Le *moment fléchissant réel* agissant dans la section courante S a pour expression

$$M = m + \alpha X + \beta Y + Z$$

et le *potentiel interne principal* (flexion)

$$U = \sum \frac{(m + \alpha X + \beta Y + Z)^2}{2\,EI} \Delta l.$$

Si les deux encastrements A et B sont *indéformables* l'un par rapport à l'autre, on obtient un système de trois équations en X, Y et Z en égalant à zéro chacune des dérivées partielles de U par rapport à X, Y et Z. Les expressions de ces dérivées sont données par le « formulaire mathématique » (§ **2.554**) avec $A = m$, $B = EI$, $\alpha = y$, $\beta = x$ et $\gamma = 1$.

Si les encastrements sont *déformables* égaler respectivement :

$\frac{\partial U}{\partial X}$ au déplacement relatif de B par rapport à A (déformé) mesuré suivant X ;

$\frac{\partial U}{\partial Y}$ au déplacement relatif de B par rapport à A (déformé) mesuré suivant Y ;

$\frac{\partial U}{\partial Z}$ à la rotation relative de B par rapport à A, positive dans le sens de Z.

Remarque. — Signification géométrique des équations.

Le système d'équations obtenu, par la méthode générale ci-dessus, dans le cas d'encastrements indéformables, peut, en faisant apparaître dans chacune d'elles le moment réel M

$$M = m + \alpha X + \beta Y + Z = m + yX + xY + Z$$

se mettre sous la forme suivante :

$$\sum \frac{M}{EI}\, y\, \Delta l = 0 \qquad (1)$$

$$\sum \frac{M}{EI}\, x \Delta l = 0 \qquad (2)$$

$$\sum \frac{M}{EI}\, \Delta l = 0. \qquad (3)$$

1. — Les « moments » α et β constituent, en réalité, des « *cotes de forme* » de l'arc mesurées à partir de l'encastrement B : $\alpha = y$ et $\beta = x$ (fig. 46 *b*).

Les équations (1) et (2) signifient que les *moments statiques* de la surface limitée par la courbe $\frac{M}{EI}$ sont nuls par rapport aux axes Bx et By (fig. 46 *b*). Elles signifient donc que les *déplacements relatifs* de A et de B (limites d'intégrations) sont également *nuls suivant ces directions* (voir §2.42).

L'équation (3) exprime que la *surface* limitée par la courbe $\frac{M}{EI}$ est nulle, c'est-à-dire (§ 2.41) que la *rotation relative* de A et de B est *nulle*.

On retrouve ainsi l'équivalence entre la méthode exposée ci-dessus et la méthode géométrique de la courbe $\frac{M}{EI}$. Nous aurions pu établir, de même, cette équivalence dans les autres cas étudiés. L'utilisation des théorèmes de Castigliano présente cependant l'avantage de faire apparaître directement les équations définissant les inconnues elles-mêmes.

5.42 Cas particulier d'arcs symétriques.

5.421 *Définitions préliminaires : Systèmes de charges symétriques et antisymétriques.* — Considérons deux points A et A′ symétriques par rapport à Oy. La figure 47 *a* représente un *système de charges symétrique*, par rapport à Oy, appliqué en ces deux points

$$F y = F' y\ ; \qquad F x = - F' x\ ; \qquad M = - M'.$$

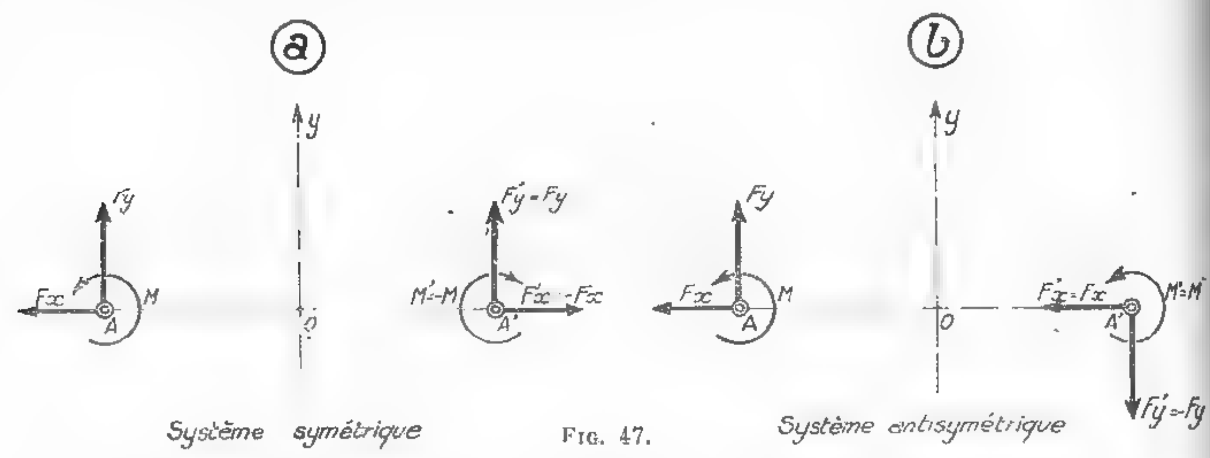


Fig. 47.

La figure 47 *b* représente un système de charges dit *antisymétrique* (ou symétrique inverse)

$$F y = - F' y\ ; \qquad F x = F' x\ ; \qquad M = M'.$$

Propriété. — Un système quelconque de charges appliquées à une structure symétrique peut toujours se réduire en un système symétrique et un système anti-symétrique par rapport à l'axe de symétrie de cette structure.

Cette propriété est démontrée, figure 48, dans le cas particulier de deux charges parallèles à Oy.

On a, en effet (fig. 48 *b* et 48 *c*) :

$$\text{en A} : \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_1 - F_2}{2} = F_1$$

$$\text{en A}' : \frac{F_1 + F_2}{2} + \frac{F_2 - F_1}{2} = F_2.$$

D'une façon générale il suffit d'appliquer :

a) à gauche et à droite : 1/2 (charges de gauche + charges de droite) ;

b) à gauche : 1/2 (charges de gauche — charges de droite) et, simultanément à droite : 1/2 (charges de droite — charges de gauche), c'est-à-dire l'inverse de celles appliquées à gauche (système antisymétrique).

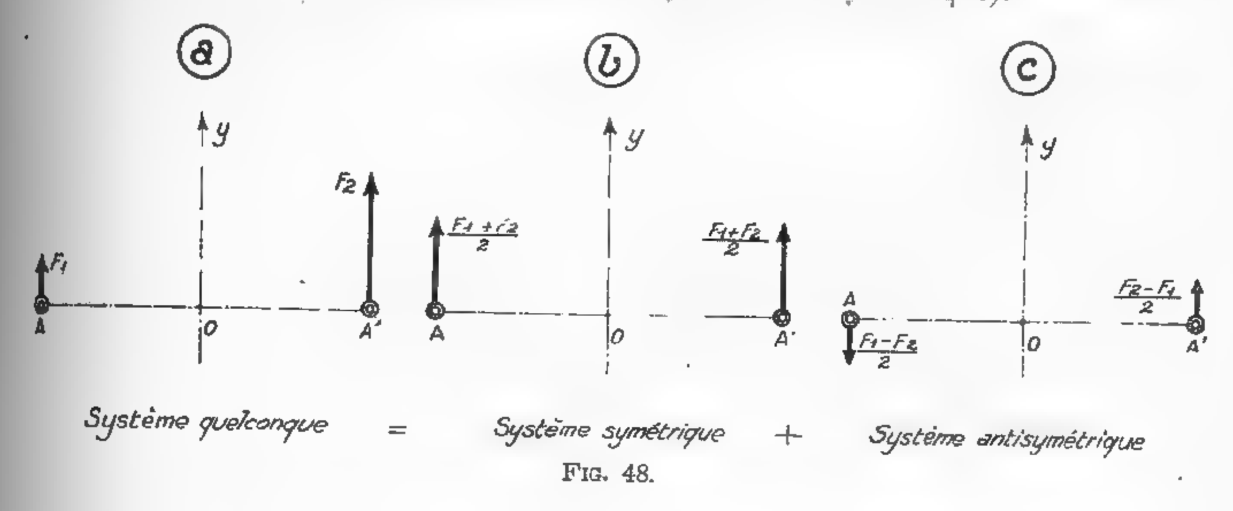


Fig. 48.

Nous pourrons donc toujours, dans le cas d'arcs symétriques, envisager des systèmes de charges distribués symétriquement et antisymétriquement [1].

5.422 *Arc symétrique soumis à un système symétrique de charges.* — Considérons l'arc ABA' symétrique par rapport à yy' (fig. 49 *a*), encastré en A et en A' (encastrements de même rigidité) et soumis à un système symétrique de charges extérieures se réduisant, par exemple, aux deux résultantes symétriques F et F'.

Effectuons une *section de coupure* située en B, *à l'aplomb de l'axe de symétrie*. Nous obtenons ainsi deux demi arcs symétriques isostatiques.

La figure 49 *b* montre l'allure de la déformation de ces deux demi-arcs sous l'action de leurs charges respectives [2]. On voit que les points B_1 et B_2 (ancien point B) se sont éloignés l'un de l'autre d'une certaine distance *horizontale* Δx et que les sections qui leur correspondent ont *tourné* l'une par rapport à l'autre d'un certain angle $\Delta\theta$. Par contre, les points B_1 et B_2 sont restés à la même hauteur (pas de *décalage relatif* Δy).

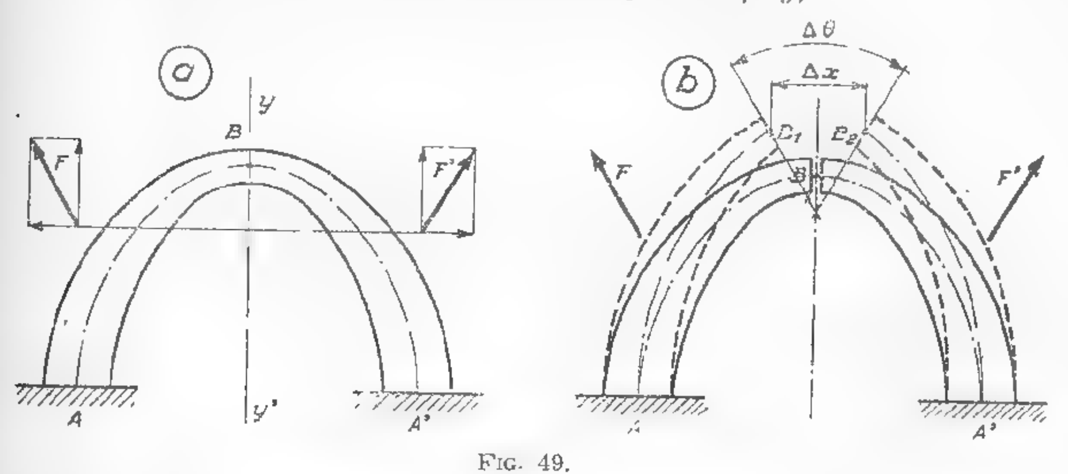


Fig. 49.

1. — Il est à remarquer que les cas de calculs considérés en construction aéronautique conduisent, généralement, directement à cette distinction entre ces systèmes de charges.

2. — Cette allure se déduit elle-même de considérations de symétrie : les deux déformées doivent rester symétriques.

Pour rétablir la *continuité* entre les deux demi-arcs, il suffira donc de leur appliquer, les *liaisons internes* suivantes :

un effort normal $\pm$ X (s'opposant à Δx),
un moment fléchissant $\pm$ Z (s'opposant à $\Delta\theta$),

à l'exclusion d'un effort tranchant Y (qui s'opposerait à Δy).

Nous avons, ainsi, éliminé une inconnue, par rapport au cas général.

Nous avons, au surplus, la possibilité de traiter le problème en n'envisageant qu'un seul demi-arc, puisque les efforts sur l'autre demi-arc seront *symétriques*.

Envisageons, par exemple, le demi-arc de gauche AB (fig. 50 *a*).

En lui appliquant les méthodes de résolution et les notations habituelles, nous obtenons le système de deux équations ci-dessous permettant le calcul des inconnues X et Z :

$$\sum \frac{my}{EI}\Delta l + X\sum \frac{y^2}{EI}\Delta l + Z\sum \frac{y}{EI}\Delta l = 0$$

$$\sum \frac{m}{EI}\Delta l + X\sum \frac{y}{EI}\Delta l + Z\sum \frac{1}{EI}\Delta l = 0.$$

Notons que les intégrations figurant dans ce système s'étendent entre les limites A et B : extrémités du demi-arc considéré.

Le *moment fléchissant réel* agissant sur une section courante S du demi-arc considéré se calcule à l'aide de l'expression :

$$M = m + yX + Z.$$

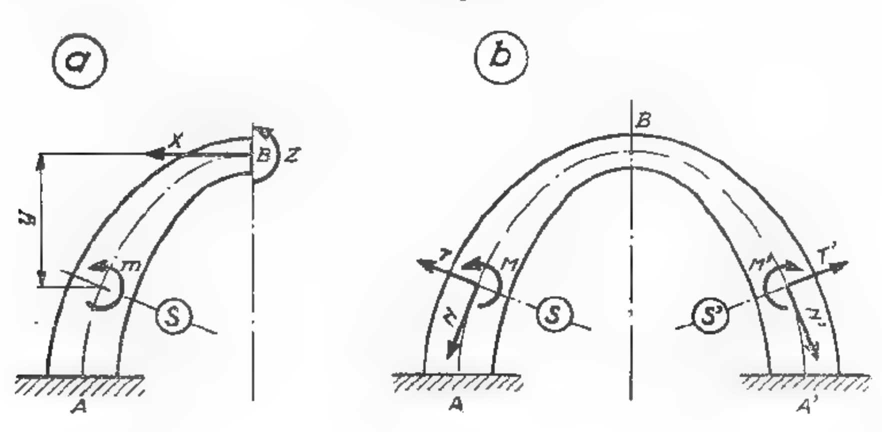


FIG. 50.

L'*effort tranchant* T et *l'effort normal* N peuvent se déterminer, soit algébriquement (en écrivant leurs expressions générales en fonction des charges extérieures et de X) ou graphiquement par décompositions graphiques des résultantes partielles.

Sur le *demi-arc symétrique* A'B nous aurons (fig. 50 *b*) [1] :

M' = — M (moments de sens inverses) ;
T' = T (efforts tranchants de même sens relativement à l'arc) ;
N' = N (deux tractions ou deux compressions).

5.423 *Arc symétrique soumis à un système antisymétrique de charges.* — Considérons le même arc bi-encastré que ci-dessus et supposons, par exemple, que le système anti-symétrique de charges appliquées se réduise aux deux résultantes F_1 et F_1' (fig. 51 *a*).

---

1. — Remarquons que les signes indiqués supposent que l'on envisage des sens de cheminement symétriques, sur l'un et l'autre demi-arc.

Effectuons la même *section de coupure située à l'aplomb de l'axe de symétrie.*

La figure 51 *b* schématise les déformations des deux demi-arcs sous l'action de leurs charges respectives. Nous voyons que les deux bords de la section de coupure ont subi seulement un *glissement relatif* se traduisant par un écartement vertical Δy, à l'exclusion de tout déplacement *relatif* Δx et de toute rotation *relative* $\Delta\theta$.

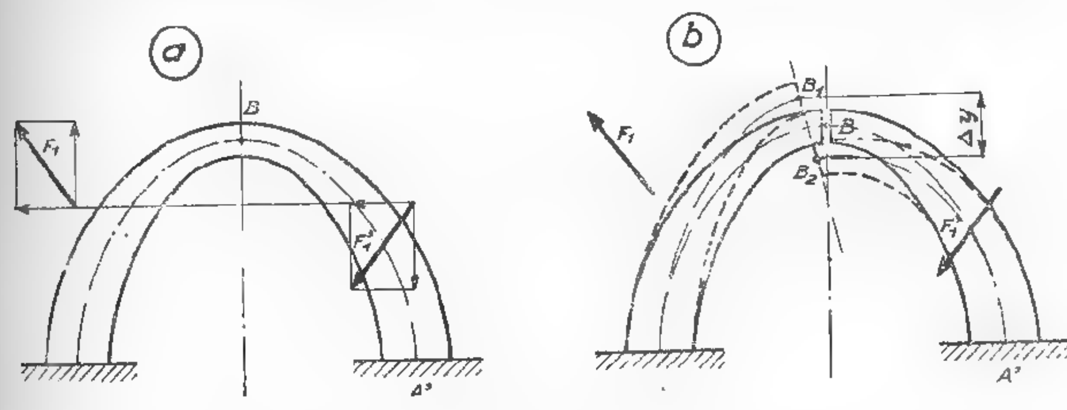


FIG. 51.

Il suffira donc d'un *effort tranchant* Y pour rétablir la continuité interrompue.

Nous avons ainsi éliminé deux inconnues : X *et* Z, *par rapport au cas général.*

Le problème pourra encore se traiter sur un seul demi-arc (AB, par exemple : fig. 52 *a*) ; les efforts agissant sur l'autre étant *antisymétriques*

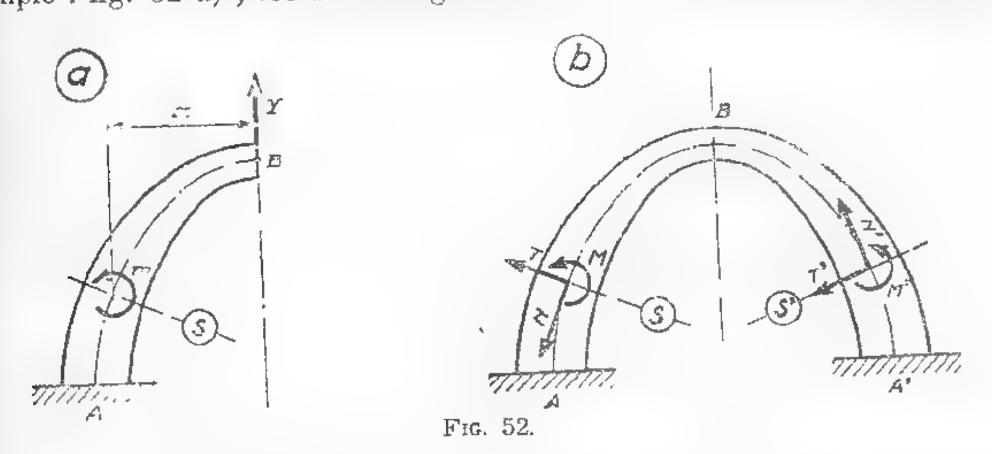


FIG. 52.

Avec les mêmes notations et conventions que ci-dessus, on aboutit à l'expression suivante de l'inconnue Y

$$Y = -\frac{\sum \frac{mx}{EI} \cdot \Delta l}{\sum \frac{x^2}{EI} \cdot \Delta l}$$

en désignant par x le bras de levier de Y par rapport à une section courante S du demi-arc considéré.

Le moment M agissant en S se calcule à l'aide de l'expression

$$M = m + xY$$

On détermine de même les efforts T et N (fig. 52 *b*).

Sur le *demi-arc symétrique* nous aurons :

N=—N' (traction au lieu de compression, ou vice-versa).
T'=— T (efforts tranchants de sens inverses relativement à l'arc) ;
M'=M (moments de même sens) ;

5.424 *Conclusion.* — La décomposition d'un système quelconque de charges en un système symétrique et un système antisymétrique présente donc pour avantage final celui de permettre la conduite du calcul sur un seul demi-arc. Notons, qu'au surplus, il est toujours matériellement plus aisé de résoudre successivement deux systèmes hyperstatiques à deux et une inconnue plutôt qu'un seul système à trois inconnues.

Le calcul des couples de fuselages-coques qui sont, très généralement, de structures symétriques, constitue une application directe de ces considérations (voir chap. XXII).

Signalons, enfin, que des simplifications analogues s'appliquent à tous les systèmes symétriques (poutres droites encastrées symétriques, par exemple).

5.5 RÉSULTATS PARTICULIERS.

Nous donnons, **Planche 35** (cas 1 à 6), quelques cas particuliers de portiques et d'arcs plans soumis à des systèmes de charges simples. Ces résultats supposent que les points de liaisons extérieures de ces systèmes sont indéformables les uns par rapport aux autres. Les cas 5 et 6 supposent, au surplus, l'inertie des arcs constante.

Ces résultats s'obtiennent par les méthodes classiques, en négligeant le travail des efforts normaux.

6. CALCUL DES ANNEAUX ET DES CADRES PLANS

6.1 GÉNÉRALITÉS.

On désigne par « *anneau* » une poutre courbe se refermant sur elle-même et par « *cadre* » un cas particulier d'anneau composé d'éléments rectilignes.

Nous avons vu, au début de ce chapitre, que ces éléments fermés constituent, d'une façon générale, des *systèmes hyperstatiques intérieurs*.

Pour leur étude, il nous suffira de les assimiler à des *cas particuliers d'arcs ou de portiques s'encastrant sur eux-mêmes.*

De même que pour les arcs, nous nous limiterons aux cas des *anneaux* et des *cadres plans* chargés suivant leurs plans de flexion. Nous conviendrons également, pour les raisonnements ci après, de confondre sous la désignation commune d'anneaux, ces deux catégories d'éléments fermés, sujets aux mêmes procédés généraux de calculs.

Les conventions générales adoptées au paragraphe 5.12, en ce qui concerne la superposition des efforts normaux N aux efforts de flexion M et T, l'orientation des sections droites et la mesure des intervalles Δl, restent applicables aux anneaux.

Les *anneaux* sont très répandus en construction aéronautique moderne. Citons le cas des *couples de fuselages-coques* (fig. 53 *a* et *b*), celui de certaines *nervures de caissons* constituées par deux flancs encastrés l'un sur l'autre (fig. 53 *c*), les *couronnes de support-moteur* en étoile, etc...

On utilise des *cadres* pour border certaines ouvertures pratiquées dans des éléments travaillants : hublots et portes de cabines étanches encadrements d'ouvertures dans une âme de longeron ou de caisson (fig. 53 *d*).

Notons que certains anneaux peuvent présenter des barres ou poutres complémentaires à l'intérieur de leur structure principale. C'est, par exem-

ple, le cas du couple de fuselage-coque de la figure 53 *b*. La présence de ces éléments augmente le *degré de surabondance* de ces systèmes, ce qui est mis en évidence par le nombre plus élevé de sections de coupure nécessaires pour les rendre isostatiques. Les méthodes générales exposées ci-après leur restent entièrement applicables.

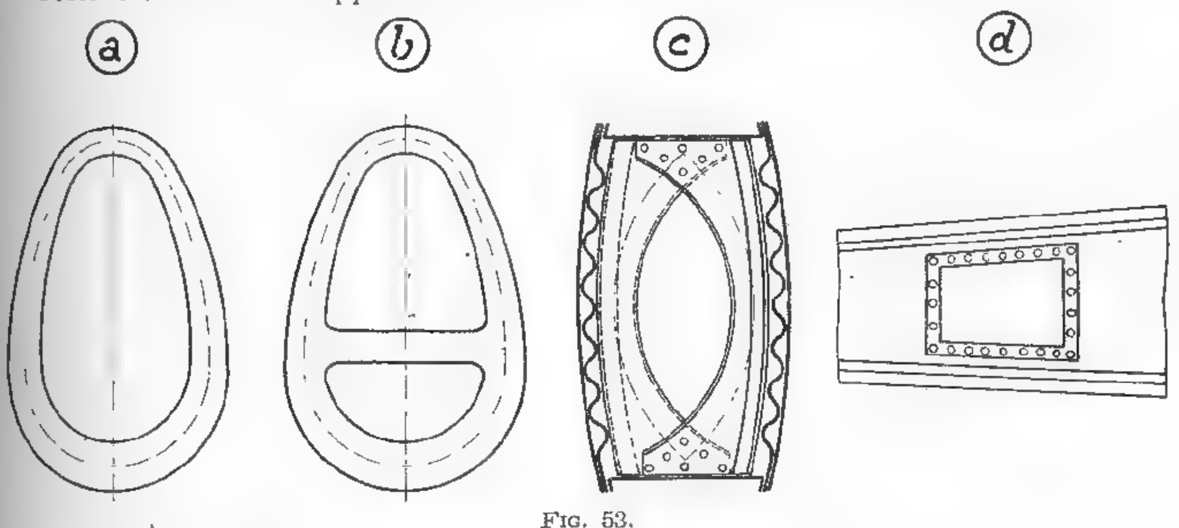


Fig. 53.

6.2 MÉTHODE GÉNÉRALE DE RÉSOLUTION.

Considérons un anneau plan de forme quelconque soumis à un système quelconque de charges extérieures en équilibre (actions et réactions) agissant dans son plan (fig. 54 *a*).

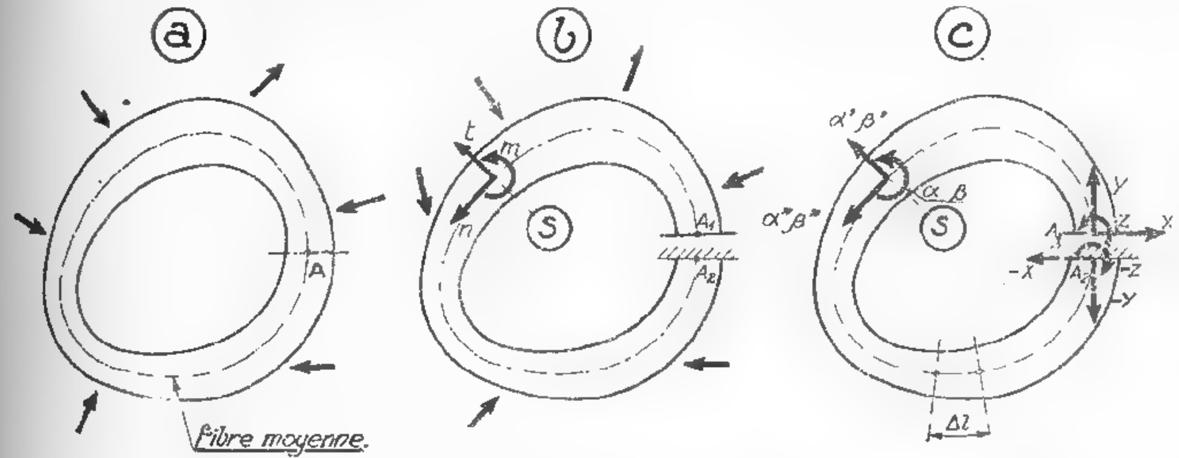


Fig. 54.

Pour rendre ce système isostatique, c'est-à-dire ici pour pouvoir déterminer les efforts appliqués à ses sections droites, il suffit d'effectuer une *section de coupure* quelconque. Supposons, par exemple, l'anneau interrompu par la section droite passant par A (fig. 54 *a*), qui détermine les deux « bords » A_1 et A_2 infiniment voisins (fig. 54 *b*). Supposons le bord A_1 libre et le bord A_2 encastré. Nous obtenons ainsi un arc encastré à une extrémité et libre à l'autre : système isostatique. Selon notre système habituel de notations, désignons par *m*, *t* et *n* le moment fléchissant, l'effort tranchant et l'effort normal obtenus, dans ce système isostatique, sous l'action des charges extérieures [1] (fig. 54 *b*).

1. — Les réactions à l'encastrement fictif A_2 sont nulles puisque le système de charges appliquées est, par définition, en équilibre et que les efforts sont nuls au bord libre A_1. La notion d'encastrement en A_2 est donc bien purement fictive.

Les *inconnues de liaison* agissant dans la section de coupure [1] comprennent, dans ce cas général de système plan (fig. 54 *c*) :

un effort tranchant X,
un effort normal Y,
un moment fléchissant Z.

Selon notre convention, nous supposerons ces efforts inconnus *appliqués* en A_1 (bord libre) et *équilibrés* en A_2 (bord encastré), cet équilibre étant simplement réalisé par des efforts égaux et de sens inverses. Nous dirigerons, arbitrairement, ces inconnues de telle façon qu'elles donnent lieu à des moments positifs (sens de m positif) dans les différentes sections (fig. 54 *b* et 54 *c*).

Désignons, dans la section courante S du système coupé, par :

α et β les moments fléchissants dus respectivement à $X=1$ et $Y=1$;
α' et β' les efforts tranchants dus respectivement à $X=1$ et $Y=1$;
α'' et β'' les efforts normaux dus respectivement à $X=1$ et $Y=1$.

(ces efforts ne constituant, en réalité, que des paramètres de forme).

Les efforts réels agissant en S ont pour expressions générales :

moments fléchissants : $M=m+\alpha X+\beta Y+Z$,
effort tranchant : $T=t+\alpha' X+\beta' Y$,
effort normal : $N=n+\alpha'' X+\beta'' Y$.

En ne considérant que le *potentiel interne principal de flexion* (même remarque que pour les arcs : paragraphes **5.22** et **5.231**), on aboutit, en appliquant le théorème de MÉNABRÉA [2], à un système de trois équations défini en égalant à zéro chacune des expressions des dérivées partielles données au paragraphe **2.554** (avec $A=m$, $B=EI$ et $\gamma=1$). Notons que les intégrations qui y figurent doivent être évaluées entre les limites A_1 et A_2, c'est-à-dire tout le long de la fibre moyenne de l'anneau.

Ces équations permettent le calcul de X, Y et Z et, par substitution de leurs valeurs dans les expressions ci-dessus, celui des efforts réels [3] M, T et N.

6.3 CAS PARTICULIERS D'ANNEAUX SYMETRIQUES.

6.31 Symétrie simple. — Dans le cas particulier, très fréquent en construction, d'anneaux (ou cadres) possédant un axe de symétrie, on aura avantage à décomposer le système quelconque de charges appliquées en un système *symétrique* adjoint à un système *antisymétrique* (§ **5.42**).

En effectuant les *sections de coupure à l'aplomb de l'axe de symétrie*, nous trouverons, de même que pour les arcs encastrés, au niveau de ces sections de coupure :

deux inconnues (effort normal et moment fléchissant) pour le cas de *charges symétriques* ;

une inconnue (effort tranchant) pour le cas de *charges antisymétriques.*

---

1. — C'est-à-dire les efforts réels agissant dans cette section.

2. — Ainsi que nous l'avons indiqué au paragraphe **2.532** les liaisons internes X, Y et Z doivent toujours être considérées comme *immobiles* (relativement au système).

3. — Le calcul de T et N peut également s'effectuer directement par décompositions graphiques, ainsi que nous l'avons indiqué pour les arcs (§ **5.24**).

On traitera le problème sur un demi-anneau en le supposant encastré sur l'autre moitié. Les efforts agissant sur cet autre demi-anneau seront évalués en tenant compte des règles exposées aux paragraphes 5.422 et 5.423.

Exemples. — Le calcul des *couples de fuselages-coques* constitue une application directe de ces propriétés.

La figure 55 montre le système rendu isostatique et les inconnues à envisager pour le couple avec une traverse intermédiaire représenté figure 53 *b*.

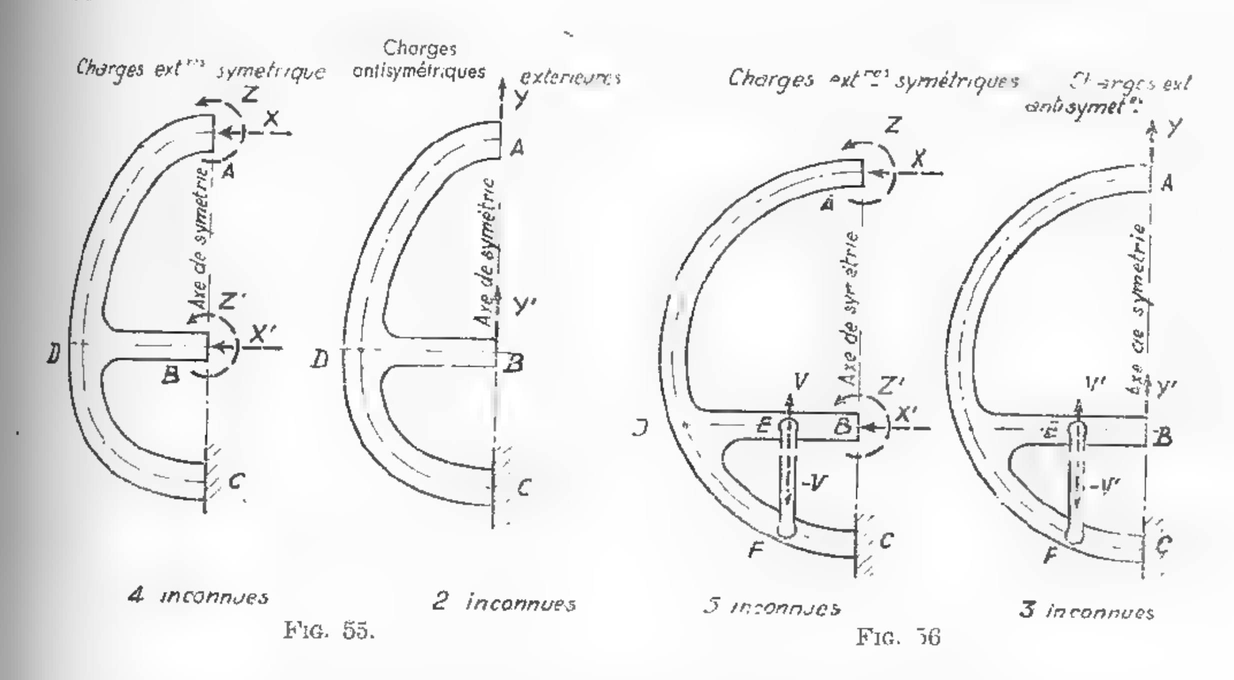


Fig. 55. Fig. 56

La figure 56 illustre le cas d'un couple analogue possédant au surplus des montants EF (et symétrique) articulés sur la traverse et le couple.

Notons que, dans le cas de ces figures, les coefficients des inconnues appliquées en B sont nuls pour la partie AD (ce qui revient pratiquement à limiter les intégrations où rentrent ces valeurs aux parties BDC). De même, les coefficients des inconnues V et V' (efforts axiaux dans le montant) n'intéressent que la partie EDF (fig. 56) [1].

Nous étudierons au chapitre XXII les sollicitations extérieures appliquées aux couples de fuselage et nous donnerons, à ce moment-là des méthodes graphiques particulières aux systèmes de charges tangentielles qu'ils reçoivent. Nous effectuerons également une application numérique dans un cas de charges symétriques.

6.32 Symétrie double. — Certains anneaux, ou cadres, présentent une symétrie de structure double (anneaux circulaires elliptiques ovales, etc... ou cadres carrés, rectangulaires, etc...). Si les charges appliquées peuvent être réduites en charges doublement symétriques ou doublement antisymétriques, il suffit alors d'envisager seulement, pour le calcul, *un quart du système*.

---

1. — Il est toujours plus aisé, pratiquement, de poser les équations générales, sans indiquer les limites des intégrales, mais en faisant apparaître des coefficients généraux α, β, γ... qui ont, automatiquement, des valeurs nulles en dehors de ces limites si l'on considère ces coefficients comme des efforts dus à chaque inconnue unitaire.

La figure 57 représente un de ces cas particuliers. Nous y avons figuré les sens respectifs des efforts internes finaux au niveau de quatre sections symétriques, ces sens étant ceux que l'on obtient en cheminant de A ou A' vers B ou B'.

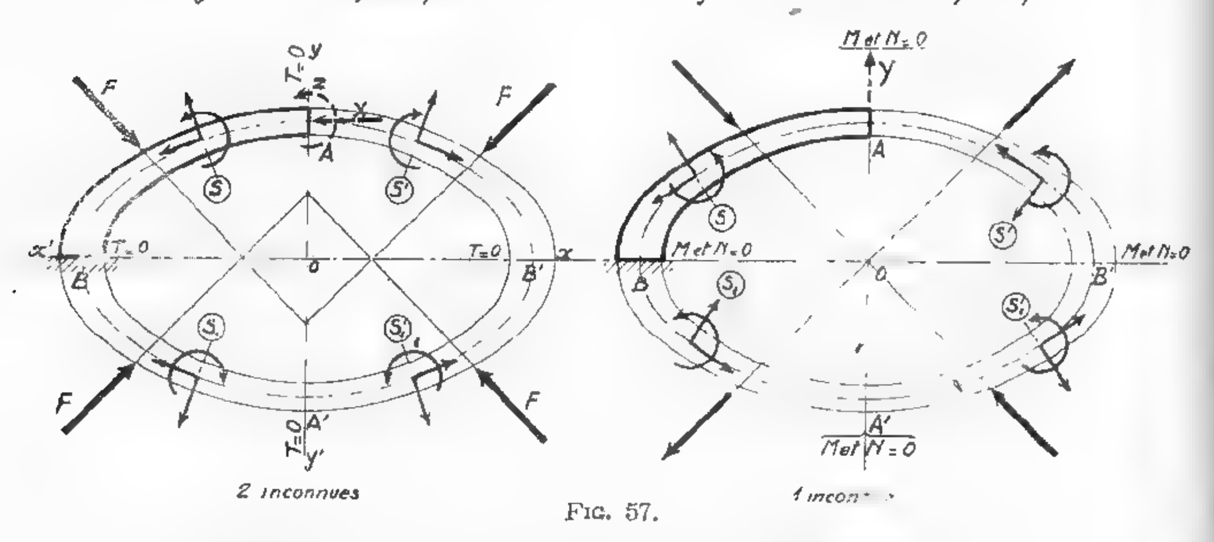


Fig. 57.

6.4 APPLICATION : CALCUL DES ENCADREMENTS A DOUBLE SYMETRIE.

6.41 Encadrements simples. — Nous donnons **Planche 35** (cas 7 à 11), quelques résultats algébriques concernant des *cadres rectangulaires* ou des *anneaux circulaires plans à inertie constante,* soumis à des systèmes de charges particulières, symétriques ou antisymétriques.

Ces résultats sont essentiellement applicables au *calcul des encadrements d'ouvertures dans les parois minces* (bordure d'une ouverture importante dans une âme de longeron, hublots ou trappes de cabines, etc...).

Notons qu'ils sont obtenus en admettant que l'encadrement assure, *à lui seul,* le passage de part et d'autre de l'ouverture, des sollicitations appliquées à la paroi. Dans cette hypothèse, les éléments voisins de l'ouverture ne subissent aucune perturbation par suite de la présence de celle-ci. Nous avions traité l'hypothèse contraire au chapitre IX, paragraphe 7.5, (ce cas concernait des ouvertures non bordées ou à bordures sans rigidité). Les résultats de la planche 35 supposent donc des *bordures infiniment rigides.* Ils conduisent, en fait, à des *limites supérieures* des efforts appliqués aux bordures [1].

6.42 Cas particulier d'encadrement renforcé.

6.421 *Calcul algébrique.* — Dans le cas d'ouvertures importantes ménagées dans des parois fortement chargées (trous d'homme dans une âme de caisson de voilure, par exemple), on est très rapidement conduit à des dimensions considérables pour des encadrements simples, tels que ceux ci-dessus.

Une solution intéressante consiste alors à adjoindre à l'encadrement un système de *diagonales* (démontables) lui procurant des liaisons surabondantes.

Nous donnons **Planche 36,** le calcul algébrique d'un *encadrement circu-*

1. — Il est cependant à conseiller de « tenir à rupture » ce efforts appliqués, dans le cas d'ouvertures ménagées dans des éléments vitraux tels que des âmes de longeron, par exemple.

laire renforcé par deux diagonales (disposées à 45°) *articulées sur le cadre.* Ce calcul concerne un ouverture pratiquée dans une paroi soumise à un *cisaillement pur* (flux d'intensité τ).

Nous nous sommes limités à reproduire les bases du calcul et les résultats algébriques obtenus dans les trois cas suivants :

cas 1 : bordure simple sans diagonale (pour comparaison) [1] ;
cas 2 : compte non tenu de la déformabilité axiale des diagonales ;
cas 3 : compte tenu de la déformabilité axiale des diagonales.

Le diagramme figurant sur la planche montre la comparaison entre les cas 1 et 2. On voit que la présence des diagonales a pour effet de soulager considérablement la flexion de l'encadrement.

6.422 *Application numérique.*

a) *Données.*

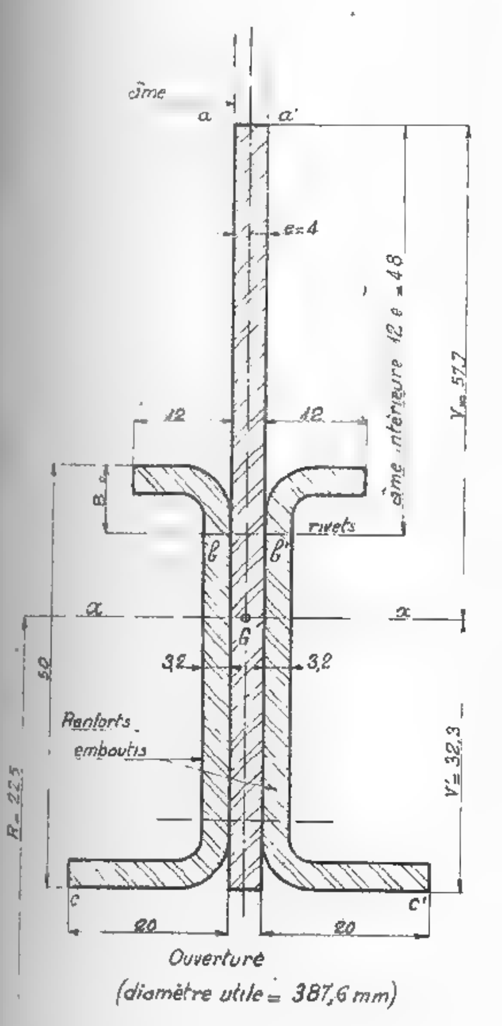
Ame de caisson de voilure d'épaisseur $e=4$ mm (dural AU4G), soumise à une contrainte de cisaillement : $t=12$ kg/mm² (évaluée au coefficient de calcul à la rupture).

Flux de cisaillement :

$$\tau = 12 \cdot 4 = 48 \text{ kg/mm.}$$

Section droite résistante de l'encadrement.

(échelle $\frac{1}{1}$)



Caractéristiques de la section.

Section totale $S = 848$ mm²

$I_{xx'} = 431600$ mm⁴

$\left(\frac{I}{V}\right)_{xx'} = 7490$ mm³ (coté âme)

$\left(\frac{I}{V'}\right)_{yy'} = 13380$ mm³ (coté ouverture)

Moment statique élémentaire a a' b b' (par rapport à x x')

$W = 6480$ mm³

Fig. 58.

1. — Ces résultats sont conformes à ceux de la planche 35, cas 11 (décalage $\varphi = 45°$).

Bordure d'ouverture (trou d'homme) de rayon, compté sur l'axe neutre :

$$R=225 \text{ mm. (fig. 58).}$$

b) Efforts du cas 2.

On obtient, pour les sections situées au niveau des attaches des diagonales (sections dangereuses du cadre, voir diagramme planche 37)

$$M=0{,}084\,\tau\,R^2=0{,}084\cdot 48\cdot \overline{225}^2=204000 \text{ mmkg ;}$$
$$N=0{,}416\,\tau\,R=0{,}416\cdot 48\cdot 225=4500 \text{ kg (compression) ;}$$
$$T=0{,}584\,\tau\,R=0{,}584\cdot 48\cdot 225=6300 \text{ kg.}$$

Efforts dans les diagonales

$$Y=\mp 1{,}1168\,\tau\,R=\mp 1{,}168\cdot 48\cdot 225=\mp 12600 \text{ kg (compression ou traction).}$$

c) Dimensionnement des éléments.

D'après les efforts ci-dessus, nous adopterons une *section droite courante du cadre*, selon figure 58 [1]

Pour les *diagonales*, nous adopterons deux *tubes ronds* en acier 20 CD4 ($R=100$ kg/mm², voir Planche 11), $D=40$, $e=2$, $S=239$ mm².

d) Application du cas 3.

Coefficient de rigidité

$$EI=7000\cdot 431600=30{,}25\cdot 10^8 \text{ kg/mm}^2\text{ ;}$$

$$R^2E'S=\overline{225}^2\cdot 20000\cdot 239=2420\cdot 10 \text{ kg/mm}^2\text{ ;}$$

d'où

$$K=\frac{30{,}25}{2420}=0{,}0125\text{ ;}\qquad 2\,K=0{,}025.$$

L'examen des expressions de X et de Y des cas 2 et 3 (Planche 36) montre que les valeurs de ces inconnues sont insensiblement modifiées par le terme K, dans le présent cas particulier [2]. Nous pouvons donc conserver les valeurs d'efforts du cas 2.

e) Contraintes maxima du cadre.

Dans la « section dangereuse » située à $\theta=45°$ l'on obtient (voir fig. 58) :

Contraintes de flexion :

$$\text{côté âme : }\frac{204000}{7490}=27{,}2 \text{ kg/mm}^2 \text{ (compression),}$$

$$\text{côté ouverture : }\frac{204000}{13380}=-15{,}2 \text{ kg/mm}^2 \text{ (traction).}$$

Contrainte de compression due à N :

$$\frac{4500}{818}=5{,}5 \text{ kg/mm}^2.$$

Contrainte normale maximum (côté âme) :

$$27{,}2+5{,}5=32{,}7 \text{ kg/mm}^2.$$

Contrainte de cisaillement maximum (âme en bb')

$$t=\frac{T}{I}\cdot\frac{W}{e}=\frac{6300\cdot 6480}{431600\cdot 4}=23{,}6 \text{ kg/mm}^2.$$

---

1. — Nous avons compté, dans cette section, une « bande d'âme intéressée » de largeur égale à 12 e (à partir du rivetage). Voir calcul des *largeurs équivalentes*, chapitre XIX.

2. — Il en est toujours de même lorsque le dimensionnement du cadre et des diagonales est réalisé sensiblement d'égale résistance.

f) Vérification des diagonales au flambage.

$$S=239 \text{ mm}^2, \quad I=4320 \text{ mm}^4, \quad \rho=4{,}25 \text{ mm}.$$

Longueur libre au flambage (en admettant des articulations en O et sur le cadre) :

$$L=190 \text{ mm}, \qquad \text{élancement} : \lambda=\frac{190}{4{,}25}=44{,}5$$

Flambage local : $n_{co}=94$ kg/mm² (Planche 28, avec $n_{ca}=100$ et $\beta=9{,}5$)
Flambage général : $n_{c\lambda}=67$ kg/mm²
Contrainte de compression :

$$\frac{12600}{239}=52{,}8 \text{ kg/mm}^2 < 67.$$

7. CALCUL DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES EN TORSION

7.1 GENERALITES.

Nous n'avons envisagé, au cours des paragraphes précédents, que des systèmes hyperstatiques subissant des efforts axiaux (systèmes triangulés) ou des efforts de flexion (poutres droites, arcs et anneaux plans). Il existe également des systèmes hyperstatiques soumis à des moments de torsion. C'est, par exemple, le cas des poutres, arcs ou anneaux, non plans ou bien de ces mêmes systèmes plans mais soumis à des charges déportées.

D'une façon générale, on peut dire que les travaux (ou déformations) de torsion ne sont jamais négligeables, contrairement à ceux provenant des efforts tranchants et, éventuellement, des efforts normaux. Il y a donc toujours lieu de tenir compte des moments de torsion pour le calcul des inconnues des systèmes hyperstatiques soumis à ces efforts, en complément à d'autres sollicitations.

Nous nous limiterons ci-après à l'exposé de deux cas particuliers simples où la torsion agit, soit exclusivement (§ 7.2), soit comme mode de travail principal (§ 7.3).

7.2 TORSION D'UNE BARRE ENCASTRÉE A SES DEUX EXTREMITES.

Soit une barre AB de section variable soumise à un moment de torsion pur M_t appliqué en C et prenant réaction à ses deux extrémités A et B (fig. 59).

Les moments M_{t1} et M_{t2} intéressant les parties AC et CB sont tels que l'on ait

$$M_t = M_{t1} + M_{t2}. \qquad (1)$$

a) Si les encastrements A et B ne subissent aucune *rotation relative*, il suffit d'écrire, en complément, que les angles de torsion des parties AC et CB sont égaux entre eux, soit, dans le cas général

$$M_{t1}\sum_A^C \frac{1}{GI_o}\,\Delta l=M_{t2}\sum_C^B \frac{1}{GI_0}\,\Delta l. \qquad (2)$$

Remarque. — Dans le cas particulier d'une barre d'inertie constante I_0, on obtient

$$M_{t1}\,L_1=M_{t2}\,L_2$$

d'où

$$M_{t1}=M_t\,\frac{L_2}{L} \qquad \text{et} \qquad M_{t2}=M_t\,\frac{L_1}{L}$$

(moments inversement proportionnels aux longueurs de chaque partie).

b) Si l'encastrement A' acquiert une certaine rotation relative θ (mesurée dans le sens de M) par rapport à B, on écrira

$$\theta + M_{t_1} \sum_{A}^{C} \frac{1}{GI_0} \Delta l = M_{t_2} \sum_{C}^{B} \frac{1}{GI_0} \Delta l. \quad (2')$$

Les équations (1) et (2) ou (1) et (2') permettent la solution du problème.

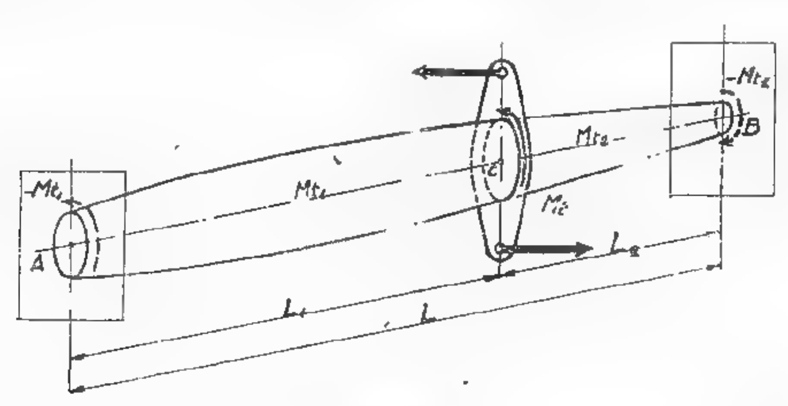


Fig. 59.

7.3 EQUILIBRE D'UNE COMMANDE DOUBLE DE GOUVERNE.

7.31 Données. — On commande souvent une gouverne longue (volet de courbure par exemple) au niveau de deux articulations A et B, par deux bielles PQ et MN solidaires d'un même arbre de commande CD (fig. 60 *a*). Si l'ossature de la gouverne est continue en torsion entre A et B, le problème est hyperstatique. On ignore, en effet, la participation de chaque commande à la transmission du moment général μ appliqué.

7.32 Méthode de résolution. — Rendons le système isostatique (en torsion) en supposant, par exemple, le tube coupé au niveau de la commande C. La réaction de torsion de la gouverne s'effectue alors uniquement en D.

Désignons par m_t le moment de torsion dans une section courante de la gouverne, calculé en tenant compte des porte-à-faux et des « moments de transport » des réactions d'appui en A et B (fig. 60 *b*) [1].

Le moment de torsion total à équilibrer par la commande en B est mesuré par le décalage $r = b_3 b_1$ de la courbe m_t. Il donne lieu au moment μ dans le tube de commande, avec

$\rho = \frac{\nu}{\mu}$ = rapport des bras de levier des mécanismes de commande (en B ou en A).

Soit X le moment de torsion de liaison agissant dans la section de coupure. Les moments de torsion réels ont pour expressions :

Arbre (partie CD) : $\mu_1 - X$,
Gouverne (partie AB) : $M_t - m_t - \rho X$.

D'où les *travaux internes de torsion :*

— Arbre (partie CD de longueur L_1, de moment l'inertie polaire I_0 et de module d'élasticité transversal G_1)

$$\mathcal{C}_1 = \frac{X^2}{2\, G_1 I_0} \cdot L_1.$$

1. — Ces moments de transport se traduisent par deux décalages $a_1\ a_2$ et $b_1\ b_2$ de la courbe m_t (en supposant la gouverne équilibrée en F).

— Gouverne (partie AB de longueur L_2, de constante de torsion J et de module d'élasticité transversal G_2)

$$\mathscr{E}_2 = \sum_0^{L_2} \frac{(m_t - \rho X)^2}{2\, G_2 J}\, \Delta x.$$

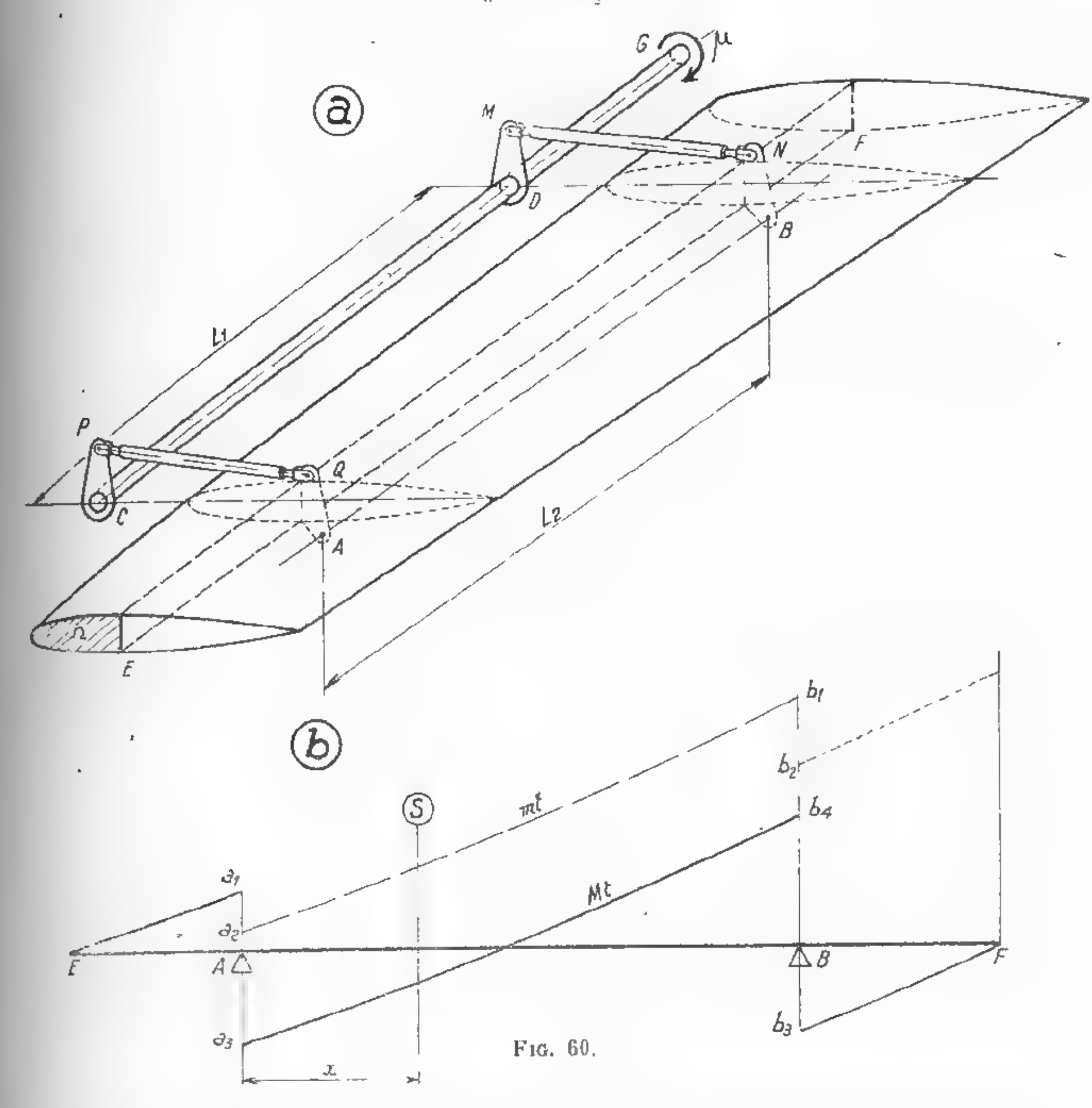


Fig. 60.

On peut, en général, négliger les travaux de compression des bielles et les travaux de flexion des leviers. Cependant, si les appuis C et D sont déportés il y a lieu de tenir compte du travail de flexion de l'arbre CD [1]. En négligeant ce dernier travail, le potentiel interne (torsion pure) du système s'écrit

$$U = \mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2$$

D'après le théorème de Ménabréa [2]

$$\frac{dU}{dX} = X \frac{L_1}{G_1 I_0} - \rho \sum_0^{L_2} \frac{m_t}{G_2 J} \Delta x + \rho^2 X \sum_0^{L_2} \frac{\Delta x}{G_2 J} = 0$$

1. — Le travail de flexion de la gouverne, indépendant de X, n'est pas à considérer, de même que les travaux de torsion des porte-à-faux.

2. — Cette équation revient à poser que les angles de torsion de l'arbre et de la gouverne sont compatibles.

d'où

$$X = \frac{\rho \sum_0^{L_2} \frac{m_t}{G_2 J} \Delta x}{\frac{L_1}{G_1 I_0} + \rho^2 \sum_0^{L_2} \frac{\Delta x}{G_2 J}}.$$

7.33 Application numérique.

7.331 *Données.*

Fixons-nous les caractéristiques suivantes (fig. 61) :

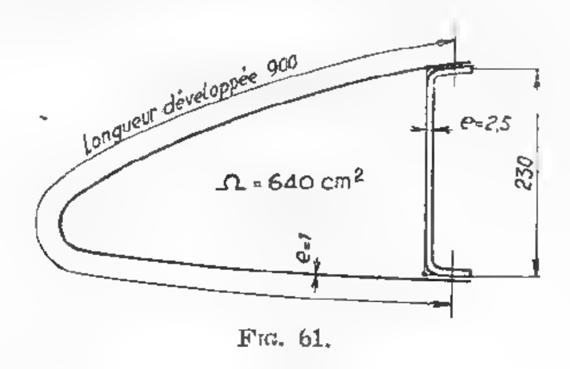


Fig. 61.

Gouverne à profil constant dans la partie AB

$$J = \frac{4 \Omega^2}{\sum \frac{\Delta l}{e}} = \frac{4 \cdot 640^2 \cdot 10^4}{\frac{900}{1} + \frac{230}{2,5}} = 1651 \cdot 10^4 \text{ mm}^4.$$

(Voir Chapitre XIII, § 4.21).

$G_2 = 2700$ kg/mm² (toles de duralumin AU4G)

$G_2 J = 4460 \cdot 10^7$ kg/mm²:

Arbre : tube acier 20CD4, D=50, $e=2$

$I_0 = 173800$ mm⁴, $G_1 = 8000$ kg/mm²

$G_2 J = 4460 \cdot 10^7$ kg · mm²

Longueurs : $L_1 = L_2 = 3000$ mm.

Efforts appliqués : Envisageons une variation *linéaire* de m_t dans l'intervalle AB (fig. 60 *b*) [1] avec :

en A : $m_{tA} = \text{A } a_2 = 10$ mkg ; en B : $m_{tB} = \text{B } b_1 = 100$ mkg,

d'où, dans une section d'abscisse x mm à partir de A

$$m_t = 10000 + \frac{90000}{3000} x = 10^3 (10 + 0,03\, x) \text{ mmkg}.$$

Réaction de torsion totale de la gouverne : $r = 105$ mkg (valeur arbitraire correspondant au décalage $b_2 b_3$, fig. 60 b).

Rapport des bras de levier de la commande au braquage considéré :

$\rho = 2$ (le tube tourne 2 fois plus vite que la gouverne).

Réaction de torsion totale en G

$$\mu = \frac{105}{2} = 52,5 \text{ mkg}.$$

1. — On obtient une telle variation linéaire dans le cas d'une gouverne à profondeur constante soumise à une charge aérodynamique constante.

7.332 *Calcul de X.* — Le moment de torsion X agissant dans la partie CD de l'arbre a pour valeur

$$X=\frac{2\int_0^{3000}\frac{10+0{,}03\ x}{4460\cdot 10^7}\,10^3\,dx}{\frac{3000}{138{,}9\ \cdot\ 10^7}+\frac{4\ \cdot\ 3000}{4460\ \cdot\ 10^7}}=\frac{0{,}449\ \left[10\ x+0{,}015\ x^2\right]_0^{3000}}{21{,}6+2{,}69}$$

$$X=\frac{74085}{24{,}29}=3050\ \text{mmkg}=3{,}05\ \text{mkg}.$$

Le moment de commande total μ s'équilibre donc dans les proportions suivantes :

$$\text{en B :}\ \frac{52{,}5-3{,}05}{52{,}5}=0{,}94=94\%,$$

$$\text{en A :}\ \frac{3{,}05}{52{,}5}=0{,}06=6\%.$$

Cette disproportion serait encore accrue si l'arbre subissait une flexion non négligeable par suite des réactions des bielles [1].

7.333 *Moments de torsion agissant sur la gouverne.* — Ils n'obtiennent en décalant les moments m_1 de la travée AB d'une quantité constante ($a_2\,a_3=b_1\,b_4$, fig. 60 *b*) :

$$-\rho\,X=-5{,}25\ \text{mkg}.$$

8. ANNEXE AU CALCUL DES SYSTÈMES HYPERSTATIQUES : Utilisation du théorème de Castigliano pour le calcul des flèches et des rotations des poutres isostatiques ou hyperstatiques.

8.1 FLÈCHE EN UN POINT D'UNE POUTRE ISOSTATIQUE.

Nous avons donné, sans démonstration, au chapitre X, paragraphe **4.**, une méthode pratique permettant de déterminer la flèche en un point donné et suivant une direction arbitraire, d'une poutre isostatique fléchie soumise à un système quelconque de charges.

Rappelons, brièvement, que cette méthode consiste à appliquer, au point considéré et suivant la direction envisagée, une *force auxiliaire* $\varphi=1$ et à écrire que la flèche cherchée y est donnée par l'expression

$$y=\sum\frac{Mm}{EI}\,\Delta l$$

en désignant, dans une même section, par : M le moment fléchissant dû aux charges extérieures et par m le moment dû à la force auxiliaire unitaire (voir chap. X, fig. 9).

La démonstration de cette propriété s'effectue très rapidement à l'aide du théorème de Castigliano.

En effet, avec les mêmes notations que ci-dessus, le *moment fléchissant total*, dû aux charges extérieures et à la force φ a pour expression [2]

$$M'=M+m\,\varphi$$

1. — Remarquons, au surplus, que nous avons adopté un arbre de dimensions considérables vis-à-vis de la charge qu'il a à supporter, puisque sa contrainte de torsion ne vaut que 0,11 kg/mm² dans la partie CD. Cette application fait ressortir l'inefficacité pratique de la commande A.

2. — Cette expression suppose la force φ de valeur quelconque (son moment est φ fois supérieur à celui dû à $\varphi=1$).

d'où un *potentiel interne de flexion*

$$U = \sum \frac{M'^2}{2\ EI} \Delta l - \sum \frac{(M+m\varphi)^2}{2\ EI} \Delta l.$$

La dérivée de U par rapport à φ s'écrit (formulaire mathématique paragraphe 2.552 avec $A=M$, $B=EI$, $\alpha=m$ et $X=\varphi$)

$$\frac{dU}{d\varphi} = \sum \frac{Mm}{EI} \Delta l + \varphi \sum \frac{m^2}{EI} \Delta l.$$

D'après le théorème de Castigliano, cette dérivée représente le *déplacement de φ dû à la déformation de la poutre sous l'action combinée des charges extérieures et de φ.*

Si φ tend vers zéro, il reste, à la limite, le premier terme du second membre qui figure donc le *déplacement de la poutre, dans le sens de φ sous l'action des charges extérieures seules, c'est-à-dire la flèche y cherchée :*

$$y = \sum \frac{Mm}{EI} \Delta l.$$

Nous avons déjà indiqué que cette méthode s'appliquait à toutes les poutres isostatiques, droites ou courbes.

8.2 FLECHE EN UN POINT D'UNE POUTRE HYPERSTATIQUE.

8.21 Méthode. — La démonstration ci-dessus s'applique également, sans restriction, aux *poutres hyperstatiques fléchies droites ou courbes.*

La seule difficulté d'application réside dans la détermination du moment unitaire m (dû à $\varphi=1$) qui constitue, elle-même, un *problème hyperstatique.*

Ce problème se résout à l'aide des méthodes générales que nous avons exposées, mais pratiquement, ces méthodes se trouvent simplifiées du fait de la simplicité du système des charges extérieures qui ne comprend que la seule force unitaire $\varphi=1$.

Dans le cas des *poutres rectilignes à inertie constante*, on pourra utiliser directement les résultats algébriques donnés *Planche* 33 : cas 1, 7 et 10 (poutre sur trois appuis, poutre encastrée et appuyée et poutre bi-encastrée soumises à une force concentrée unique).

8.22 Remarques.

8.221 *Tracé de la déformée d'une poutre rectiligne.* — On peut également, dans le cas des poutres rectilignes, utiliser les *méthodes graphiques* exposées au chapitre X, paragraphe **3.**, pour construire la fibre moyenne déformée. On opèrera alors à partir de la courbe M réelle appliquée au système considéré et l'allure de la déformée constituera une *vérification graphique* de l'exactitude de cette courbe. (On doit, en effet, trouver des flèches nulles au niveau des appuis, ou des déformées tangentes à la direction primitive de la poutre au niveau des encastrements.)

8.222 *Signification géométrique des expressions des inconnues.* — Dans le cas d'un système hyperstatique à une seule inconnue X immobile, nous avons trouvé une expression générale de la forme

$$X = -\frac{\sum \frac{m\alpha}{EI} \Delta l}{\sum \frac{\alpha^2}{EI} \Delta l}$$

α désignant ici le moment dû à $X=1$ (notation équivalente à m dans l'expression ci-dessus de la flèche y) et m désignant le moment dû aux charges extérieures dans le système rendu isostatique (notation équivalente à M dans l'expression ci-dessus).

Le *numérateur :* $\sum \frac{m\alpha}{EI} \Delta l$ représente donc le déplacement, suivant X, et sous l'action des forces extérieures du système rendu isostatique.

Le *dénominateur :* $\sum \frac{\alpha^2}{EI} \Delta l$ représente le déplacement, suivant X, de ce même système sous l'action isolée d'une force $X=1$.

L'expression ci-dessus pouvant s'écrire

$$X \sum \frac{\alpha^2}{EI} + \sum \frac{m\alpha}{EI} \Delta l = 0$$

exprime donc bien une condition de *déplacement nul.* On établirait, de même, la signification géométrique des équations des systèmes à plusieurs inconnues fixes ou mobiles.

8.3 ROTATION EN UN POINT D'UNE POUTRE QUELCONQUE.

La méthode ci-dessus permet également le calcul d'une *rotation en un point donné* d'une poutre quelconque.

Il suffit, en effet, d'appliquer, au lieu d'une force $\varphi=1$, un *moment* $\mu=1$, au point considéré et dans le sens cherché. On obtient (même démonstration et notations qu'au paragraphe **8.1**)

$$\theta = \sum \frac{Mm}{EI} \Delta l \quad \text{(angle en radians).}$$

8.4 CALCUL ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS DES DÉFORMÉES.

En appliquant la force unitaire en un point d'abscisse variable x servant de paramètre, on obtient une équation donnant la flèche y à l'abscisse x, c'est-à-dire *l'équation de la déformée.* Cette méthode constitue l'une des applications les plus remarquables du théorème de Castigliano.

QUATRIÈME PARTIE

APPLICATIONS PARTICULIÈRES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX EN CONSTRUCTION AÉRONAUTIQUE

Les quatre chapitres groupés dans cette quatrième partie constituent, en quelque sorte, l'objet principal de cet ouvrage.

Nous avons souvent fait appel, dans leur exposé, à des articles parus dans diverses publications étrangères citées en référence.

Ces documents se trouvent d'ailleurs remarquablement centralisés et condensés dans le « Précis d'aérotechnique » publié par l'Association des anciens élèves de l'Ecole nationale supérieure de l'Aéronautique.

CHAPITRE XIX

PROCÉDÉS DE CALCULS PARTICULIERS AUX CONSTRUCTIONS EN TOLE MINCE

INTRODUCTION

Le présent chapitre pourrait encore s'intituler, d'une façon plus scientifique : « *Flambage des plaques minces.* »

Les méthodes de calcul qui y sont exposées reposent, en effet, essentiellement sur des *phénomènes d'instabilité* qui apparaissent sur les éléments minces soumis à des *sollicitations agissant dans leurs plans* [1] et tendant à faire travailler, totalement ou partiellement, ces éléments *en compression.*

Ces phénomènes d'instabilité, ou flambage, affectent ici l'allure particulière de *plissements* (ou cloquages). Leur observation directe est, généralement, très aisée. Elle peut, par exemple, être mise en évidence par l'allure qu'affecte une feuille de papier maintenue le long d'un bord AB et sollicitée tangentiellement au bord opposé CD (fig.1).

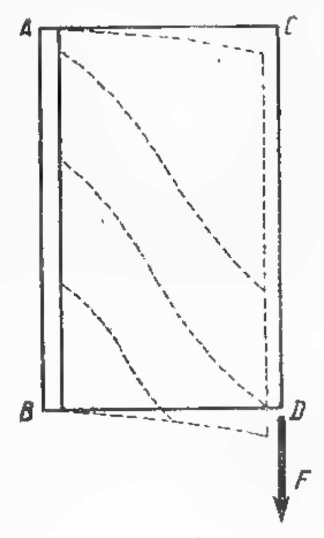


FIG. 1.

On peut encore dire que les plaques minces présentent un sens de rigidité très prépondérant et donc un « *mode de travail privilégié* » qui est celui de la *traction.* Toute sollicitation tendra donc, après avoir produit une instabilité de la plaque, à engendrer une série de vagues sollicitées principalement en traction.

Ce raisonnement montre clairement que la *charge critique*, à laquelle correspond l'apparition de ces plissements, *ne constitue pas une charge limite de résistance.* L'élément considéré peut, au contraire, continuer à encaisser des charges très supérieures et reprendre son état initial après suppression de ces charges. Citons, par exemple, le cas de certaines structures de fuselages-coques où, au cours d'un essai statique, les plissements du revêtement apparaissent vers le coefficient 1,5 ou 2 alors que la rupture ne se produit qu'au coefficient 10 ou 12.

Néanmoins, il est indispensable de connaître la nouvelle répartition des efforts internes, consécutive au phénomène de plissement, afin de concevoir une construction adaptée à ce *nouveau mode de travail.*

Les études ci-après comprendront donc toujours la détermination d'une *contrainte critique de plissement*, suivie d'un *procédé de calcul après apparition de ces plissements.* C'est ce deuxième point, le plus important industriellement, qui nous a conduit, finalement, à adopter le titre général du présent chapitre.

---

1. — Nous avons traité, au chapitre XVII, le calcul des plaques chargées transversalement, c'est-à-dire normalement à leurs plans.

1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LE FLAMBAGE DES PLAQUES

1.1 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Les théories exposées ci-après concernent essentiellement des *plaques métalliques*, c'est-à-dire des *tôles minces :* revêtement d'ailes ou de fuselages, âmes de longerons, semelles de caissons, poutres composées, etc...

Signalons qu'il existe cependant des phénomènes d'instabilité analogues pour les constructions en bois où les parois minces sont réalisées par des *contreplaqués*. La connaissance douteuse de leurs caractéristiques de résistance (module d'élasticité en particulier) et l'hétérogénéité de leur composition rend très délicate l'application à ces éléments, des résultats ci-après.

1.2 DEFINITION ET NOTATIONS.

La définition générale des *plaques* a été donnée au chapitre XVII, paragraphe 1.1, par opposition à celle des *poutres*.

Nous aurons à envisager des *plaques planes* ou des *plaques courbes*, en nous limitant toutefois, dans cette dernière catégorie, aux plaques possédant une surface cylindrique (génératrices rectilignes et parallèles).

La théorie générale distingue, au surplus, les *plaques isotropes* et les *plaques orthotropes*. Les premières sont celles qui possèdent des caractéristiques de stabilité analogues suivant deux directions perpendiculaires tangentes à la surface de la plaque (panneau rectangulaire de tôle d'épaisseur constante, par exemple). Les plaques orthotropes possèdent, au contraire, un sens de stabilité très prépondérant. Elles comprennent essentiellement les tôles ondulées ou striées. Nous nous limiterons à l'étude des *plaques isotropes*.

Nous désignerons par e l'épaisseur des tôles constituant les plaques, cette épaisseur étant constante pour une même plaque.

Nous envisagerons toujours des *plaques rectangulaires*. Les notations concernant les dimensions de ces rectangles seront précisées dans chaque cas particulier.

1.3 SOLLICITATIONS ENVISAGÉES.

Les *sollicitations* donnant lieu au flambage (ou plissement) des plaques peuvent comprendre les « *états plans* » suivants :

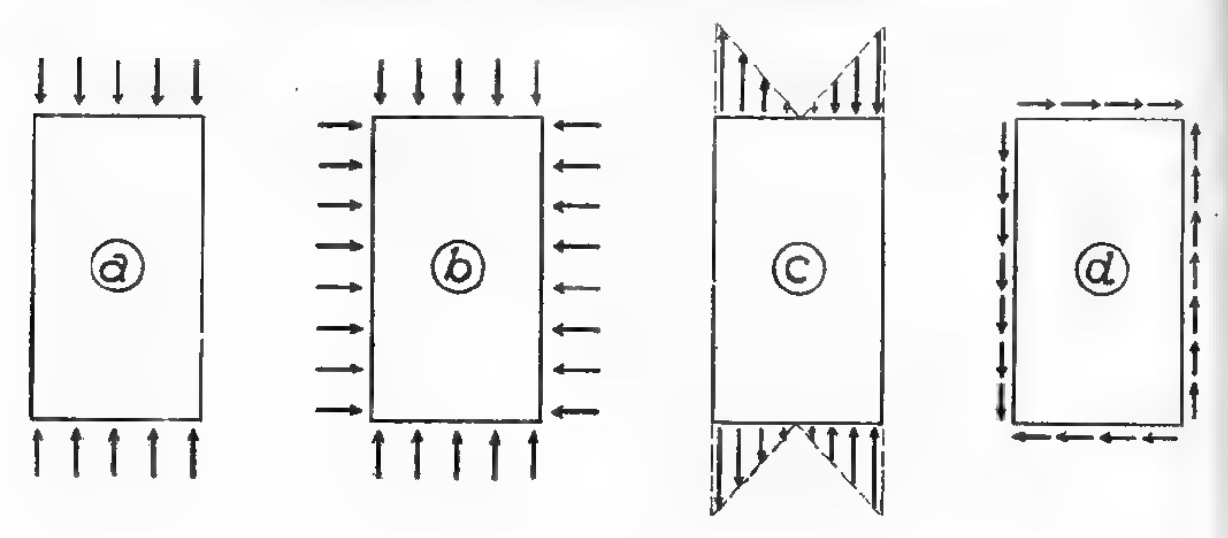


FIG. 2.

a) Compression simple (fig. 2 *a*) sollicitant deux côtés opposés de la plaque ;

b) Compression double (fig. 2 *b*) : deux compressions sollicitant simultanément chaque groupe de deux côtés opposés [1] ;

c) Flexion pure (fig. 2 *c*) où l'instabilité est due aux parties comprimées ;

d) Cisaillement pur (fig. 2 *d*) : nous verrons qu'un tel état de sollicitation engendre une compression ;

e) Combinaison de ces différentes sollicitations.

1.4 BASES DE LA THÉORIE.

On conçoit aisément que la théorie du flambage des plaques soit plus complexe que celle des poutres.

En effet, les plaques étant généralement assujetties à des *liaisons extérieures* (guidages ou encastrements) *sur leurs quatre côtés*, l'influence de ces liaisons affecte une forme plus compliquée que celle des *liaisons extrêmes* des poutres comprimées.

Cette théorie est, généralement, conduite en utilisant les propriétés du *potentiel interne de déformation* de la plaque : on se donne, pour cela, une allure de déformation, suggérée par l'expérience, et l'on écrit que le potentiel interne de flexion correspondant (qui tend à redresser la plaque) est égal au travail interne développé par la charge critique de plissement. Cette équation traduit donc un « état d'équilibre indifférent » caractéristique de tout phénomène d'instabilité ou flambage (voir chap. XVI). Le type de déformation envisagé est, lui-même, explicité en fonction des caractéristiques géométriques de la plaque et il se détermine de telle façon que l'énergie qui lui correspond soit minimum.

Notons, qu'au surplus, il y a lieu, comme pour le calcul des plaques chargées transversalement, de tenir compte du coefficient de Poisson qui traduit l'influence de la continuité de la plaque (chap. XVII, § **1.5**).

Les développements mathématiques auxquels elle conduit, excluent du cadre de notre exposé la reproduction de cette théorie. Nous nous limiterons donc à indiquer les *résultats pratiques* que l'on obtient, en accompagnant ceux-ci de raisonnements physiques.

1.5 FORME GÉNÉRALE DES RÉSULTATS.

Nous verrons, ci-après que, d'une façon générale, la *contrainte critique*, c'est-à-dire celle donnant lieu à l'apparition des plissements, affecte la forme

$$n_0 \text{ ou } t_0 = \mathrm{K\,E}\left(\frac{e}{b}\right)^2.$$

Dans cette expression :

E désigne le *module d'élasticité longitudinal* considéré habituellement dans les calculs (module d'élasticité d'origine : E = 7.000 kg/mm² pour le duralumin, par exemple ; voir remarque ci-après § **1.61**).

b désigne l'une des *dimensions* de la surface de la plaque rectangulaire, cette dimension étant précisée dans chaque cas particulier.

K est un *coefficient sans dimension*, variable avec le type de sollicitation, les caractéristiques géométriques et le mode de guidage des bords du panneau considéré. Les valeurs de ce coefficient seront explicitées dans cha-

1. — On peut encore concevoir le cas où l'une de ces compressions est remplacée par une *traction*. Nous grouperons ces deux états (compression double et compression et traction) sous la même désignation de « sollicitation par des contraintes normales uniformes, perpendiculaires entre elles ».

que cas particulier, en utilisant généralement des diagrammes représentatifs de leurs variations.

1.6 REMARQUES IMPORTANTES

1.61 Limites de validité des résultats. Ainsi que le bref exposé ci-dessus permet de le concevoir, la théorie du flambage des plaques traduit un *équilibre élastique*. Ses résultats ne sont donc valables, avec les notations ci-dessus, qu'en *période de proportionnalité des matériaux* (chap. XVI, § 2.52). On convient, malgré tout, de les utiliser pratiquement jusqu'à la *limite élastique conventionnelle* [1].

Signalons qu'au-dessus de cette limite, il conviendrait de remplacer E par E_r : module réduit de flambage défini au chapitre XVI, paragraphe 3.15.

1.62 Influence du « coefficient de Poisson ». Les coefficients K, indiqués ci-après, tiennent directement compte du coefficient de Poisson, c'est-à-dire du facteur $\frac{1}{1-\sigma^2}$ qui affecte les résultats de la théorie des poutres appliqués aux plaques (chap. XVII, § 1.5).

Ces coefficients théoriques sont établis pour

$$\sigma=0{,}3, \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{1-\sigma^2}=1{,}1$$

ce qui correspond au cas des *alliages légers à base d'aluminium* (AU4G, AU4G1) pour lesquels on utilise, le plus fréquemment, les résultats ci-après [2].

Si σ est différent de 0,3, il convient de multiplier K par

$$\rho=\frac{1}{1{,}1\ (1-\sigma^2)}=\frac{0{,}91}{1-\sigma^2}.$$

Exemple. — Pour les *aciers* où σ est généralement pris égal à 0,25

$$\rho=\frac{0{,}91}{0{,}9375}=0{,}971.$$

1.63 Influence des liaisons marginales. — Les coefficients K sont établis, par le calcul, dans des « *conditions théoriques idéales* » de liaisons extérieures affectant les côtés des plaques. Nous désignerons par *côté guidé* ou *articulé* un côté soumis à des liaisons extérieures autorisant entièrement une *rotation* de ce bord autour de son arête, mais lui imposant, par contre, de rester *rectiligne* (flèche nulle). On peut réaliser expérimentalement ce type de guidage à l'aide d'un montage du genre de celui de la figure 3 *a*.

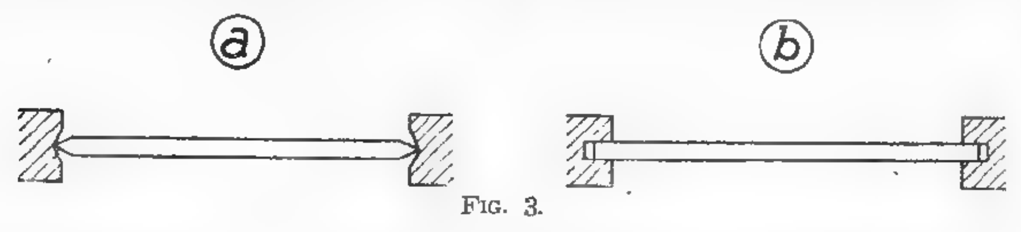


FIG. 3.

1. — C'est-à-dire pour des contraintes *réelles* inférieures à cette limite conventionnelle. Le calcul peut cependant être conduit avec des charges de calcul dites « à la rupture » qui font apparaître des contraintes supérieures. Ne voir alors, dans cette opération, qu'un simple jeu de coefficients.

2. — Cette valeur n'est acceptable qu'en période élastique. En période plastique, elle tend vers σ = 0,5 (plasticité pure). On admet également σ = 0,3 pour les alliages ultra légers à base de magnésium (en période élastique).

Nous désignerons par *côté encastré* un côté soumis à des liaisons extérieures imposant une *direction fixe* de la plaque à son origine (rotation nulle en supplément à la condition de flèche nulle (voir fig. 3 *b*).

En fait, les panneaux entrant réellement dans les constructions sont soumis à des liaisons provenant de la présence de leurs *éléments de bordure*, tels que raidisseurs, semelles, montants, etc... [1].

L'influence de ces éléments dépend essentiellement de leur *rigidité en torsion*, toujours délicate à évaluer [2].

Il appartient, en pratique, au bon sens ou plus simplement à la prudence de chaque utilisateur d'adopter le type de liaison qui paraît le plus conforme au cas réel envisagé.

Nous avons, dans ce sens, fait apparaître dans quelques cas particuliers, des coefficients correspondant à des conditions dites de « *semi-encastrements* » des côtés. Ces coefficients ont été obtenus en effectuant simplement la moyenne arithmétique entre ceux qui correspondent aux conditions idéales ci-dessus. Ils ne correspondent, pratiquement, à aucune définition physique précise et constituent plutôt un « moyen terme » qui satisfait à la fois à un sentiment de prudence et à un souci de légèreté.

Nous donnerons, dans chaque cas particulier, quelques conseils pratiques au sujet du choix de ces « conditions aux limites ».

1.64 Flambage théorique et flambage réel. — De même que pour les poutres, les contraintes critiques déterminées théoriquement diffèrent toujours sensiblement de celles constatées expérimentalement. Cette différence provient, en dehors de l'influence des conditions de guidage exposées ci-dessus, des *imperfections* pratiques des tôles (défaut de planéité, manque d'homogénéité, etc...). Ces imperfections ont pour résultat de diminuer la contrainte critique de plissement et les valeurs calculées restent, comme pour les poutres, des *limites supérieures*. Cette considération accroît la nécessité d'une certaine prudence dans le choix des coefficients K.

1.65 Etat d'utilisation. — La formule générale indiquée au paragraphe 1.5 montre que la seule *caractéristique mécanique* des matériaux qui entre en jeu dans le calcul des contraintes critiques est leur module d'élasticité E.

Or, nous savons que tout au moins en période élastique, cette caractéristique n'est pratiquement pas influencée par l'*état d'utilisation* de ces matériaux (traitements thermiques, par exemple). Cet état influe, par contre, en période plastique (valeur de E_r) ainsi que nous l'avons signalé au chapitre XVI, paragraphe 3.18.

Pour les tôles minces, où l'instabilité se manifeste ordinairement en période élastique, il est donc superflu, du point de vue de leur stabilité, de les traiter thermiquement.

1.66 Comparaison entre les différents métaux. — Considérons deux plaques rectangulaires de mêmes dimensions a et b (dimensions des rectangles), soumises aux mêmes conditions de guidage (même coefficient K), réalisées :

1° En métal 1 : module d'élasticité E_1, densité d_1, épaisseur e_1
2° — 2 : — — E_2, d_2, — e_2.

---

1. — Dans une structure, un *panneau* est délimité, en théorie, par des éléments qui assurent à la tôle mince une flèche nulle, normalement à son plan. En pratique tous les raidisseurs de tôle possèdent une rigidité relative en flexion suffisante, pour que l'on puisse admettre qu'ils jouent ce rôle.

2. — Cette rigidité est, en effet, elle-même fonction des conditions de fixation de ces éléments et elle devrait être évaluée en tenant compte de la présence de la tôle.

Leurs *contraintes critiques* sont dans le rapport

$$k = \frac{n_1}{n_2} \quad \text{ou} \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{\mathrm{K\,E_1}\left(\frac{e_1}{b}\right)^2}{\mathrm{K\,E_2}\left(\frac{e_2}{b}\right)^2} = \frac{\mathrm{E_1}\,e_1^{\,2}}{\mathrm{E_2}\,e_2^{\,2}}.$$

Or, leurs *poids* sont égaux quand

$$e_1\,d_1 = e_2\,d_2 \qquad \text{soit} \qquad \frac{e_1}{e_2} = \frac{d_2}{d_1}.$$

On a donc, *à poids égal*

$$k = \frac{\mathrm{E_1}\,d_2^{\,2}}{\mathrm{E_2}\,d_1^{\,2}} = \frac{\dfrac{\mathrm{E_1}}{d_1^{\,2}}}{\dfrac{\mathrm{E_2}}{d_2^{\,2}}}.$$

Le rapport $\frac{\mathrm{E}}{d^2}$ constitue donc un *indice de comparaison entre les contraintes critiques à poids égal* des différents métaux.

Le tableau ci-dessous donne la valeur de cet indice pour les trois types principaux d'*alliages métalliques* utilisés en construction aéronautique

DÉSIGNATION	E kg/mm²	d	$\frac{\mathrm{E}}{d^2}$
Aciers	20000	7,8	329
Alliages légers (à base d'aluminium)	7000.	2,8	893
Alliages ultra-légers (à base de magnésium)	4500	1,8	1389

Ce tableau fait ressortir un très net avantage en faveur des alliages légers et ultra-légers. *Il est donc plus intéressant, du point de vue de leur stabilité, d'utiliser des alliages de faible densité dans les constructions en tôles minces.*

Remarques. — *a*) Il conviendrait, au surplus, d'affecter l'indice relatif aux aciers du coefficient correcteur $\rho = 0{,}971$ établi ci-dessus (§ **1.62**) ce qui accroît encore légèrement l'avantage indiqué.

b) En supposant que la théorie précédente s'applique également aux *contreplaqués*, on trouverait, dans le cas d'efforts orientés parallèlement à leurs fibres extérieures, des valeurs de $\frac{\mathrm{E}}{d^2}$ encore plus élevées que pour les alliages légers et ultra-légers, ce qui est assez conforme aux résultats expérimentaux. A poids égal, les constructions minces en bois paraissent donc, *à priori*, plus stables que les constructions minces métalliques.

1.7 PLAN D'ÉTUDE.

Nous insistons sur le fait, déjà signalé ci-dessus (§ **0.**), que *la contrainte critique de flambage des plaques minces ne correspond aucunement à une résistance limite de ces éléments, mais seulement à un changement* (théoriquement brutal) *de leur mode de travail.*

L'objet essentiel de notre exposé sera donc d'étudier ce nouveau mode de travail et les *procédés de calcul* qui lui correspondent.

Cette considération justifie le plan d'étude adopté ci-après où nous

envisagerons successivement : le *travail* des tôles minces en compression, en flexion et en cisaillement purs. Nous ferons suivre cet exposé du calcul théorique d'une poutre à âme mince fléchie où se superposent ces différents modes de travaux, ce calcul théorique se trouvant complété par une application numérique.

2. TRAVAIL DES TOLES MINCES EN COMPRESSION

2.1 FLAMBAGE DES PLAQUES PLANES ISOTROPES, SOUMISES A UNE COMPRESSION SIMPLE.

2.11 **Notations** (fig. 4 *a*). — En supplément aux notations générales définies au paragraphe **1.2**, nous désignerons par :

a la dimension de la plaque *parallèle* à l'effort de compression, c'est-à-dire la *distance entre les côtés chargés ;*

b la dimension de la plaque *perpendiculaire* à l'effort de compression, c'est-à-dire la *longueur des côtés chargés.*

Nous conviendrons d'autre part, de désigner par :

bords, les côtés non chargés AC et BD de dimension *a ;*

extrémités, les côtés chargés AB et CD de dimension *b.*

Le rapport $\frac{a}{b}$ qualifie l'*allongement* de la plaque.

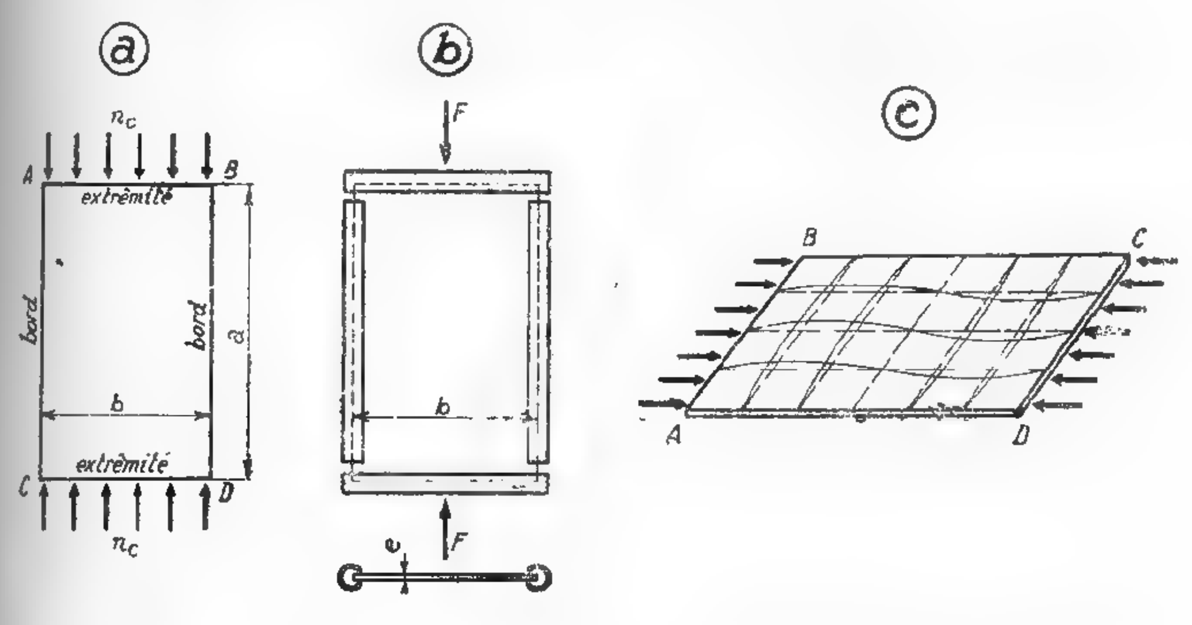


FIG. 4.

2.12 **Conditions expérimentales.** — Les plaques considérées sont supposées bordées par des *glissières* réalisées de telle sorte qu'elles puissent produire soit une *articulation simple* ou *guidage* (fig. 3 *a*), soit un *encastrement* (fig. 3 *b*). Les glissières situées sur les *bords* des plaques ne sont pas sollicitées directement par l'effort de compression qui est appliqué, par l'intermédiaire des glissières situées sur les extrémités, à l'aide d'une machine de compression par exemple [1] (schéma de principe de la figure 4 *b*).

1. — Le guidage des extrémités peut être obtenu par simple appui ou encastrement sur les plateaux dressés de la machine d'essai. Les glissières latérales peuvent être réalisées par des tubes fendus (tubes de guidage). Voir fig. 4 *b*.

Les sections droites de la plaque, parallèles à ses extrémités, sont donc soumises, avant plissement, à une *contrainte de compression pure*, uniformément répartie

$$n_c = \frac{F}{b \cdot e}.$$

2.13 Allure des plissements. — On constate, pour une valeur de n_c égale à la *contrainte critique* n_{c0} l'apparition d'*ondulations transversales* (perpendiculaires à F) *affectant* l'allure schématisée par la figure 4 *c*.

Le *nombre* de ces ondulations varie avec l'*allongement* de la plaque et avec ses *conditions de bordure*. On constate qu'une plaque de grand allongement flambe en une série de demi-ondes ayant une amplitude sensiblement égale à la dimension b (elle se divise donc en une succession de carrés).

2.14 Formule générale. — La *contrainte critique* n_{c0} qui correspond à l'apparition de l'instabilité de la plaque est donnée par la formule générale du paragraphe **1.5** qui s'écrit ici

$$\boxed{n_{c0} = K_c\, E\left(\frac{e}{b}\right)^2.}$$

2.15 Détermination du coefficient K_c. — Le coefficient K_c se détermine *théoriquement*, à l'aide de la méthode générale dont le principe a été exposé succinctement au paragraphe **1.4**. Le nombre m de demi-ondulations tient lieu de paramètre accessoire et se détermine par la condition de potentiel interne minimum.

On constate que, dans des conditions identiques de guidage, le coefficient K_c est une *fonction de l'allongement* $\frac{a}{b}$ *de la plaque*.

Nous donnons, **Planche 37** (*diagramme n° 1*) les *courbes théoriques de variation* de ce coefficient, dans les différents cas d'asservissement des côtés, et suivant les conventions générales exposées au paragraphe **1.6**.

2.16 Remarques.

2.161 *Allure des courbes* K_c. — L'allure sinueuse des courbes théoriques de variation de K_c s'explique par le changement du nombre m de demi-ondulations.

On a, par exemple, dans le cas de la courbe (5) (4 côtés articulés) :

$$m=1 \text{ entre } \frac{a}{b}=0 \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}=\sqrt{2}=1{,}414,$$

$$m=2 \text{ entre } \frac{a}{b}=\sqrt{2} \text{ et } \frac{a}{b}=\sqrt{6}=2{,}448,$$

$$m=3 \text{ entre } \frac{a}{b}=\sqrt{6} \text{ et } \frac{a}{b}=\sqrt{18}=4{,}24 \text{ etc...}$$

2.162 *Cas particulier des bords libres.* — Dans ce cas, les plaques se comportent comme des poutres de hauteur a, de moment d'inertie minimum $I = \frac{be^3}{12}$ et de section $S = eb$, soit donc, de rayon de giration minimum

mum : $\rho = \sqrt{\frac{e^2}{12}}$ et d'*élancement équivalent* (chap. XVI, § **2.3**) : $\lambda = \alpha \frac{a}{\rho}$. On a donc :

$$\text{extrémités articulées } (\alpha=1) : \lambda^2 = \frac{12\ a^2}{e^2},$$

$$\text{extrémités encastrées} \left(\alpha = \frac{1}{2}\right) : \lambda^2 = \frac{3\ a^2}{e^2}.$$

La *contrainte critique* est donnée (en période élastique) par la formule d'Euler, sous réserve de remplacer E par E' = 1,1E (§ **1.62** et chap. XVII, § **1.5**), soit

$$n_{c0} : \frac{\pi^2 E'}{\lambda^2}$$

$$\text{extrémités articulées} : n_{c0} = 0{,}905\ E \frac{e^2}{a^2},$$

$$\text{extrémités encastrées} : n_{c0} = 3{,}620\ E \frac{e^2}{a^2}.$$

Les équations de K_c sont donc, dans ce cas particulier :

$$K_c = 0{,}905 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ (extrémités articulées)},$$

$$K_c = 3{,}620 \left(\frac{b}{a}\right)^2 \text{ (extrémités encastrées)}.$$

Elles sont respectivement traduites par les courbes (1) et (4) de la **Planche 37** (diagramme 1).

2.163 *Influence des dimensions des plaques.* — La hauteur a des plaques n'apparaît pas clairement dans la formule donnant n_{c0}, contrairement aux formules de flambage des poutres où cette dimension entre au carré au dénominateur.

Cette dimension a n'influe donc que dans la valeur du coefficient K_c $\left(\text{fonction de } \frac{a}{b}\right)$.

Or, l'examen des courbes (5) à (8), **Planche 37,** qui correspondent aux cas pratiques d'utilisation des plaques (c'est-à-dire aux cas où leurs quatre côtés sont soumis à des guidages) montre que K_c *reste sensiblement constant*, dès que $\frac{a}{b}$ devient supérieur à 1 (plaque carrée) [1]. Il s'en suit que la dimension b influe seule, dans ce cas, sur la valeur de n_{c0}. Par contre, K_c croît rapidement quand $\frac{a}{b}$ devient inférieur à 1. On en déduit que *la petite dimension des plaques est toujours celle qui joue un rôle prépondérant.* Une plaque d'allongement infini possède, pratiquement, la même contrainte critique qu'une plaque carrée de même dimension b.

Ce résultat est absolument contraire à celui obtenu pour les *poutres* cette contradiction provenant de la *grande influence des guidages latéraux des plaques.*

---

1. — La courbe (8) (4 côtés encastrés) fait, toutefois, exception à cette règle, mais nous savons que, dans les cas pratiques, on aura fort peu à l'utiliser. Pour des allongements a supérieurs à la limite de l'abaque adopter pour K_c les valeurs asymptotiques indiquées sur l'abaque.

2.164 *Formule simplifiée.* — A défaut de l'abaque de la Planche 37, on pourra toujours calculer *défavorablement* la contrainte critique d'un panneau soumis à des liaisons sur ses quatre côtés en lui appliquant le coefficient $K_c=3,64$ (qui correspond aux asymptotes des cas 5 et 6), d'où

$$n_{c0}=3,64\ E\left(\frac{e}{b}\right)^2$$

soit, dans le cas du duralumin

$$n_{c0}=25000\left(\frac{e}{b}\right)^2.$$

2.165 *Condition de validité.* — En supplément aux conditions générales exposées au paragraphe **1.6**, les valeurs de K_c supposent que la *dilatation transversale* des plaques est libre de s'opérer (loi de POISSON). Notons que l'on admet cette hypothèse pour la plupart des panneaux entrant dans les constructions usuelles. Dans le cas contraire, il y a lieu d'adopter les valeurs du paragraphe **2.2** ci-après.

2.17 Applications numériques.

2.171 *Panneau plan de fuselage-coque.*

Tôle AU4G. $e=1$ mm (revêtement de la coque) ; $b=200$ mm (écartement entre les lisses) ; $a=400$ mm (distance entre les couples). La compression du panneau considéré provient de la flexion générale du fuselage (parties comprimées).

Supposons que les lisses présentent une très faible rigidité en torsion (raidisseurs ouverts, par exemple) ; nous admettons alors que les *bords* sont *articulés*.

Si les couples sont reliés rigidement au revêtement par plusieurs rangées de rivets, on peut admettre que les *extrémités* sont *encastrées*.

La courbe (6), *planche* 37, qui correspond à ce cas, donne, pour $\frac{a}{b}=\frac{400}{200}=2$:

$$K_c=4,4$$

d'où

$$n_{c0}=4,4\cdot7000\left(\frac{1}{200}\right)^2=0,77\ \text{kg/mm}^2.$$

Cette application montre que, pour des panneaux de dimensions usuelles, les *tôles minces présentent toujours des contraintes critiques très faibles*.

Remarque. — Avec $b=100$ mm (nombre de lisses double) nous obtiendrons :

$$n_{c0}=2,9\ \text{kg/mm}^2$$

qui constitue encore une valeur relativement faible, bien que cette dimension b soit peu usuelle.

2.172 *Panneau de caisson de voilure.*

Tôle AU4G. $e=5$ mm (tôle de semelle) ; $b=150$ mm (espacement des raidisseurs) ; $a=500$ mm (distance entre nervures),

d'où

$$\frac{a}{b}=3,33.$$

Avec la même convention que ci-dessus, on a (courbe 6) : $K_c=3,64$.

d'où

$$n_{c0}=3,64\cdot7000\left(\frac{5}{150}\right)^2=28,2\ \text{kg/mm}^2.$$

On voit que, contrairement aux tôles minces de revêtement, *les tôles épaisses des structures travaillantes peuvent atteindre des taux critiques élevés*.

---

1. — Notons que cette valeur est, en réalité, *fictive*, car elle dépasse la limite de proportionnalité du métal considéré, à moins que celui-ci ne soit préalablement écroui.

2.2 FLAMBAGE DES PLAQUES PLANES ISOTROPES SOUMISES A DEUX CONTRAINTES NORMALES UNIFORMES PERPENDICULAIRES ENTRE ELLES.

La théorie du flambage de ces plaques aboutit à des résultats simples dans les trois *cas particuliers* étudiés successivement ci-après :

2.21 Plaques de grand allongement.

2.211 *Conditions.* — Les résultats concernent pratiquement, avec une bonne approximation, les plaques rectangulaires dont l'allongement a/b est supérieur à 2. Ces plaques sont soumises simultanément à une *compression uniforme* n_{c1} *s'exerçant sur les petits côtés* (de dimension b) et à une *compression* n_{c2}, ou *traction* n_{t2}, *uniforme, s'exerçant sur les grands côtés* (de dimension a) (voir fig. 5 *a* et 5 *b*). Dans le cas d'une *compression* n_{c2}, il y a lieu, toutefois, que celle-ci soit suffisamment faible pour que le flambage se produise suivant n_{c1}, c'est-à-dire pour que le plissement s'opère parallèlement aux petits côtés.

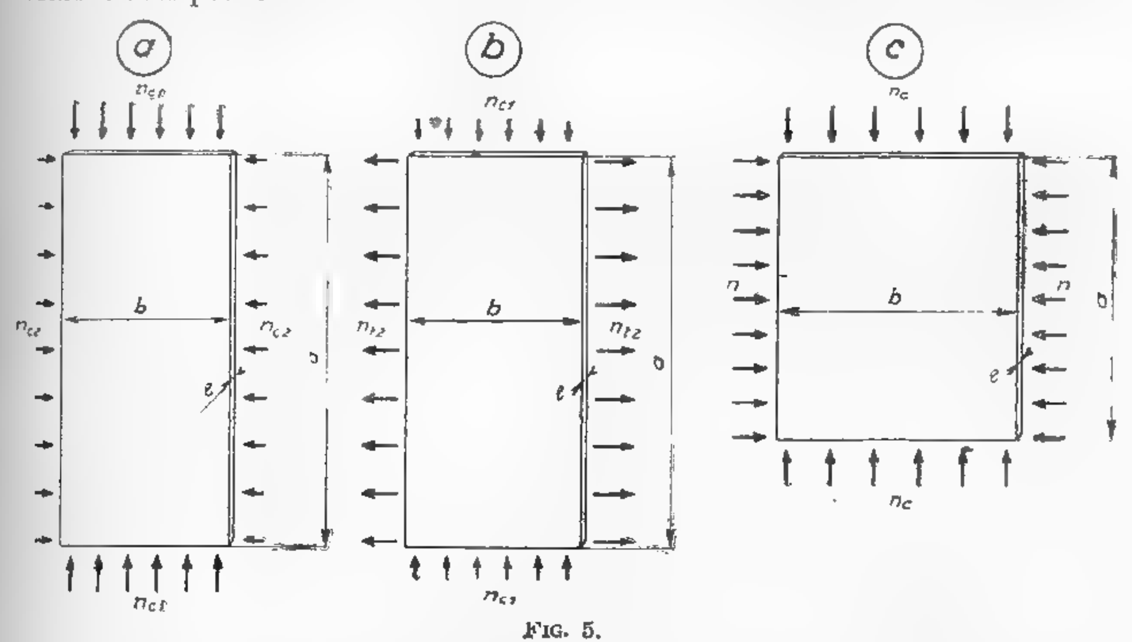


FIG. 5.

2.212 *Contrainte critique.* — *La contrainte de compression* n_{c1}, donnant lieu à l'instabilité de la plaque, est encore donnée par l'expression générale

$$(n_{c1})_0 = K'_c \, E \left(\frac{e}{b}\right)^2.$$

2.213 *Coefficient* K_c'. — Le coefficient K_c' dépend :

a) du rapport : $\alpha = \frac{n_{c2}}{n_{c1}}$, ou $\frac{n_{t2}}{n_{c1}}$ existant entre les contraintes appliquées,

b) de l'état de guidage des bords de la plaque.

Nous donnons, **Planche 37,** (*diagramme n° 2*) les courbes de variation de K'_c en fonction de α, dans les deux cas limites théoriques : *quatre côtés articulés* et *quatre côtés encastrés.*

Nous en avons déduit, selon les indications données au paragraphe **1.63**, une courbe correspondant à des conditions dites de « *semi-encastrement* » (extrémités assimilables à des articulations et bords assimilables à des encastrements, ou vice-versa, par exemple).

Remarques. — *a*) Les contraintes doivent être affectées de *signes* pour le calcul de α (+ en compression et — en traction, par exemple). Comme n_{c1} est toujours une compression, les valeurs positives de α correspondent à une *compression* n_{c2} (fig. 5 *a*) et les valeurs *négatives* de α à une *traction* n_{t2} (fig. 5 *b*).

b) Pour $\alpha=0$, c'est-à-dire pour $n_{c2}=0$, on retrouve bien $K'_c=3{,}64$ (articulations) ou $K'_c=6{,}35$ (encastrements) qui sont les *valeurs asymptotiques* des courbes (5) et (8) du diagramme 1 de la même planche (compression simple, allongement infini).

c) L'allure des courbes K'_c montre qu'une *compression* n_{c2} *abaisse* le taux critique correspondant à n_{c1} (*effet distabilisateur*) tandis qu'une *traction* n_{t2} *l'augmente, au contraire*, très rapidement (*effet stabilisateur*).

d) Pour $\alpha<-0{,}5$, K'_c croît d'une façon sensiblement linéaire, ce qui permet d'*extrapoler*, raisonnablement, le diagramme pour des valeurs de α inférieures à — 1 (limite des résultats donnés par l'abaque).

L'équation de la droite correspondant aux conditions moyennes (semi-encastrement) a pour expression

$$K'_c=4{,}2-8\alpha$$

(voir application numérique ci-après § **2.24**).

e) On exprime souvent le coefficient K'_c en fonction des *contractions ou dilatations relatives* i_1 *et* i_2 *des côtés a et b*. Elles sont reliées aux contraintes par la relation

$$\frac{i_2}{i_1}=\frac{n_{c2}-\sigma\, n_{c1}}{n_{c1}-\sigma\, n_{c2}}$$

soit

$$\frac{i_2}{i_1}=\frac{\alpha-\sigma}{1-\sigma\,\alpha}$$

avec σ = coefficient de Poisson.

L'abaque est établi avec $\sigma=0{,}3$ (§ **1.62**).

Le cas particulier où $n_{c2}=0$ correspond à $\frac{i_2}{i_1}=-\sigma=-0{,}3$, c'est-à-dire à celui où les bords de la plaque sont libres de se dilater ; condition énoncée ci-dessus au paragraphe **2.165**.

Le cas des *bords fixés rigidement* est obtenu pour $i_2=0$, c'est-à-dire pour

$$1-0{,}3\,\alpha=0 \qquad \text{d'où} \qquad \alpha=0{,}33.$$

On obtient, dans ce cas, d'après le diagramme 2 de la planche 37

$$K'_c=2{,}1 \text{ (côtés articulés)} \quad \text{et} \quad K'_c=4{,}6 \text{ (côtés encastrés)}$$

soit des valeurs nettement inférieures à celles obtenues dans le cas des bords libres de toute contrainte (diagramme 1) qui sont

$$K_c=3{,}64 \quad \text{et} \quad K_c=6{,}35.$$

Ce résultat s'explique physiquement en considérant que le fait d'empêcher la dilatation des bords engendre une compression transversale qui amorce le flambage.

2.22 Cas particulier de deux sollicitations égales. — Dans le cas particulier où un panneau rectangulaire est soumis simultanément à *deux compressions uniformes égales et perpendiculaires* (fig. 5 *c*),

$$n_{c_1}=n_{c_2}=n_c$$

la contrainte critique est donnée par l'expression du paragraphe **2.14**, avec

un coefficient K''_c défini, très sensiblement, par l'équation suivante, dans le cas des *quatre côtés articulés*

$$K''_c = 0{,}9\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right].$$

On a donc

$$n_{c0} = 0{,}9\ \mathrm{E}\left[\left(\frac{e}{b}\right)^2+\left(\frac{e}{a}\right)^2\right].$$

2.23 Cas particulier d'une plaque carrée encastrée, soumise à deux compressions uniformes égales et perpendiculaires. — La contrainte critique est donnée par l'expression

$$n_{t0} = 4{,}8\ \mathrm{E}\left(\frac{e}{b}\right)^2$$

avec b = côté du carré.

2.24 **Application numérique.** — Le cas d'un panneau soumis simultanément à *deux compressions perpendiculaires* est rare en construction aéronautique. Il correspondrait, par exemple, à la stabilité d'un élément de paroi d'une enveloppe soumise à une *pression extérieure* (cas des coques de sous-marins).

Le cas d'une *compression* et d'une *traction* perpendiculaires se produit, par contre, pour les *panneaux de revêtement d'un fuselage-coque étanche soumis à une pression intérieure* (appareils stratosphériques, par exemple).

2.241 *Données* (fig. 6). — Considérons un panneau de grand allongement, appartenant à une paroi de fuselage-coque étanche d'un rayon R=2,500 m soumis à une pression intérieure $p=0{,}4$ kg/cm² [1]. Distance entre lisses : $b=150$ mm ; épaisseur du revêtement $e=1{,}25$ mm ; matière : duralumin AU4G (E=7000 kg/mm²).

Admettons, pour cette application, que la paroi considérée se comporte comme celle d'une enveloppe cylindrique mince (non raidie) [2], c'est-à-dire que le panneau soit soumis sous l'action de p aux deux contraintes de traction définies au chapitre VI, § 5.41 soit (fig. 6 *a*) :

longitudinalement (sens des lisses) : $n_{t_1} = \dfrac{p\,\mathrm{R}}{2\,e} = 4$ kg/mm²

transversalement (sens des couples) : $n_{t_2} = \dfrac{p\,\mathrm{R}}{e} = 8$ kg/mm².

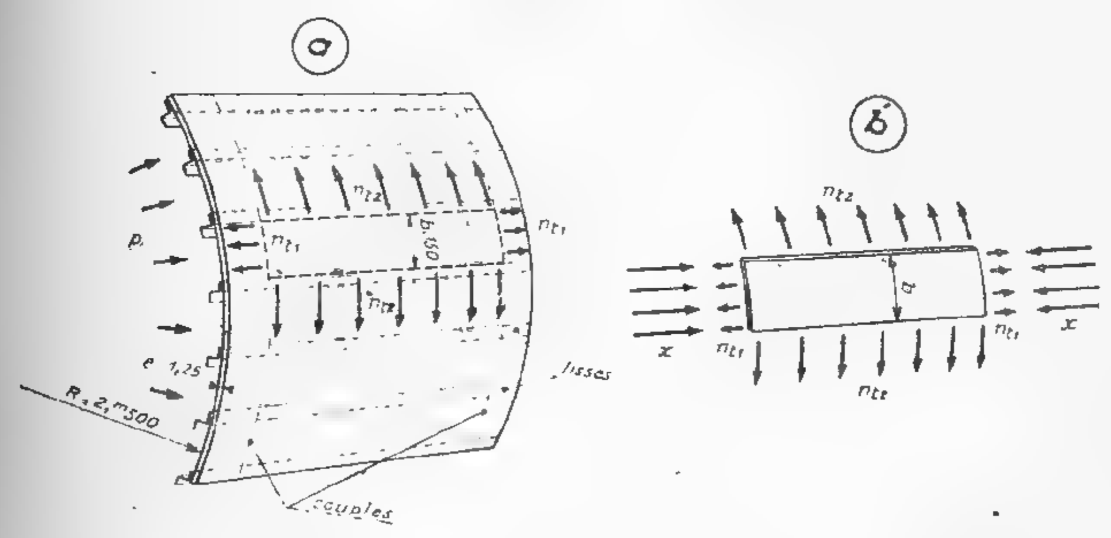


Fig. 6.

Déterminons la *contrainte de compression admissible, dans le sens longitudinal, avant plissement du revêtement* [3].

Nous désignerons par x cette valeur cherchée, exprimée en kg/mm².

1. — Cette pression effective correspondrait, par exemple, à une altitude de vol de 8.000 m avec pression à 2.500 m rétablie à l'intérieur du fuselage.

2. — On trouvera au chapitre XXII, § 9. une méthode de calcul plus approfondie des parois raidies.

3. — Cette compression longitudinale provient de la *flexion générale* du fuselage (charges sur empennages, par exemple) dans les parties comprimées par cette flexion.

2.242 *Calcul de x.* — La contrainte de compression résultante longitudinale sera

$$n_{c_1}=x-n_{t_1}=x-4.$$

Par suite de l'importance relative considérable de R vis-à-vis de b, nous assimilerons le panneau envisagé à une *plaque plane*. Nous utiliserons donc les résultats du paragraphe 2.21.

Le coefficient α a pour expression

$$\alpha=-\frac{n_{c_2}}{n_{c_1}}=-\frac{8}{x-4}.$$

Il doit lui correspondre une valeur de K'_c (planche 37 (2), telle que

$$(n_{c_1})_0=K'_c\ E\left(\frac{e}{b}\right)^2=n_{c_1}$$

soit

$$K'_c\cdot 7000\left(\frac{1,25}{150}\right)^2=x-4$$

d'où

$$K'_c=2,06\ (x-4).$$

Adoptons, pour K'_c, les conditions dites de « *semi-encastrement* » (afin de tenir compte de la continuité du revêtement et de la rigidité propre des lisses et des couples) et utilisons l'équation établie au paragraphe 2.213 (remarque *d*)

$$K'_c=4,2-8\alpha=4,2+\frac{64}{x-4}.$$

Nous avons donc

$$4,2+\frac{64}{x-4}=2,06\ (x-4)$$

d'où l'on tire

$$\mathbf{x=10,7\ kg/mm^2}.$$

2.243 *Remarques.* — *a*) A cette valeur correspond un rapport : $\alpha=-\frac{8}{6,7}=-1,195$. Ce point se situe bien sur la partie linéaire (prolongée) de la courbe de variation de K'_c figurée planche 37, ce qui justifie le procédé de calcul utilisé [1].

b) La contrainte critique de compression simple correspondant au même panneau a pour valeur, en adoptant par homogénéité,

$$K_c=\frac{6,35+3,64}{2}=4,995$$

(moyenne entre les valeurs des panneaux de grand allongement articulés et et encastrés) :

$$n_{c0}=4,995\cdot 7000\left(\frac{1,25}{150}\right)^2=2,42\ \text{kg/mm}^2.$$

La présence de la pression intérieure dans un fuselage-coque étanche a donc un *effet stabilisateur* très favorable sur les parties comprimées par la flexion générale. Leur instabilité n'apparaît, en effet, dans le cas particulier envisagé, que pour un moment fléchissant 4,4 fois supérieur au cas du vol sans pression intérieure (vol en basse altitude). Nous reviendrons sur cette question particulière au chapitre XXII.

2.3 FLAMBAGE DES PLAQUES COURBES ISOTROPES SOUMISES A UNE COMPRESSION UNIFORME.

2.31 Remarques préliminaires. — On conçoit physiquement qu'un panneau possédant une courbure cylindrique offre, pour des *sollicitations en compression parallèles à ses génératrices*, une stabilité *supérieure* à celle

1. — Dans le cas contraire, il y aurait lieu, soit d'établir une équation approchée de la partie concave de la courbe K'_c (parabole par exemple), soit de procéder par quelques approximations successives.

d'une plaque plane de mêmes dimensions. (Exemple d'une feuille de papier galbée, fig. 7 *a*.)

La courbure des panneaux, normalement à la direction de la compression appliquée, exerce donc, sur ces panneaux, une *influence stabilisatrice.*

Ce phénomène a fait l'objet de nombreuses études théoriques ou expérimentales qui conduisent à des résultats assez voisins.

Nous nous limiterons à la reproduction d'une formule due à LUNDQUIST qui traduit les résultats de recherches exposées dans le « rapport N. A. C. A. n° 473 ».

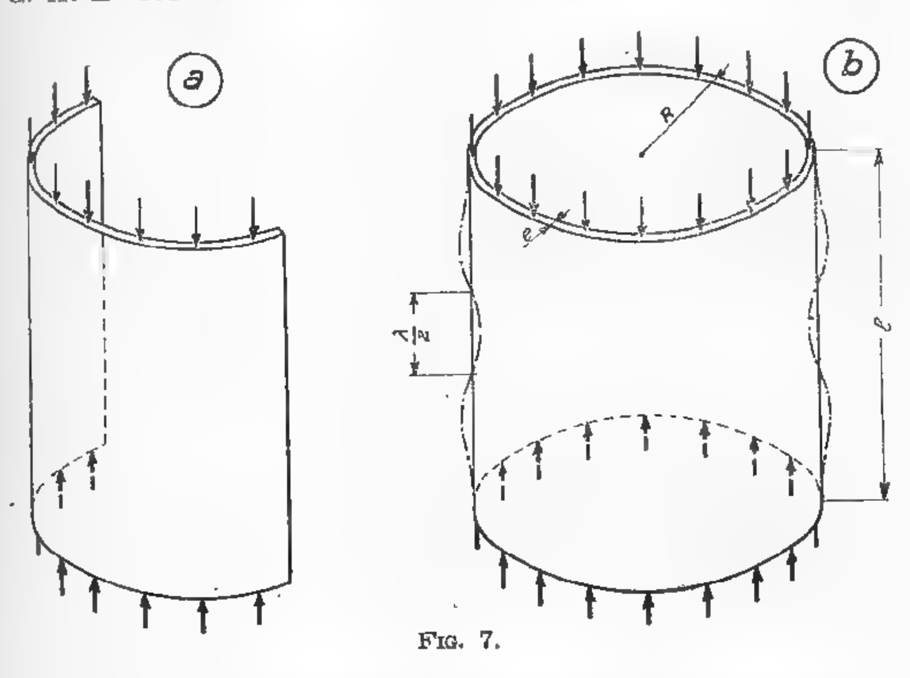


FIG. 7.

2.32 Formule. — L'expression de cette formule, qui diffère de la forme générale rencontrée pour les plaques planes, est la suivante

$$n_{c_0} = 3 \text{ E} \left(\frac{e}{\text{R}}\right)^{1,42}$$

avec e=épaisseur de la plaque et R=rayon de courbure moyen de cette plaque.

Cette formule s'établit en faisant apparaître l'amplitude des ondes de plissement théoriques obtenues sur des cylindres de révolution à parois minces (fig. 7 *b*). Cette amplitude est définie par la demi-longueur d'onde

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{0,91} \sqrt{\text{R}e}.$$

Conditions d'utilisation. — L'auteur précise que la formule donnant la contrainte critique n_{c_0} n'est valable que si la paroi cylindrique considérée est stabilisée par des *cloisons transversales* espacées de trois à cinq demi-longueurs d'ondes théoriques, soit

$$3 \frac{\lambda}{2} < l < 5 \frac{\lambda}{2}.$$

2.33 Abaque. — L'usage de ces formules est facilité par un *abaque pratique* donné **Planche 38.** Cet abaque est établi pour les tôles de duralumin (E = 7.000 kg/mm² et σ = 0,3).

2.34 Application numérique. — Considérons un *bec d'attaque de voilure* sollicité en compression par les efforts de flexion agissant dans le plan de l'aile

d'arrière en avant (sens de sollicitation existant généralement en vol, voir chapitre XX et fig. 8).

Son rayon de courbure moyen (bec du profil) est R=200 mm dans la partie AB et son épaisseur $e=1{,}25$ mm.

Il peut supporter, avant plissement, une contrainte de compression $n_{co}=$ 15,8 kg/mm² (abaque) dans cette partie AB.

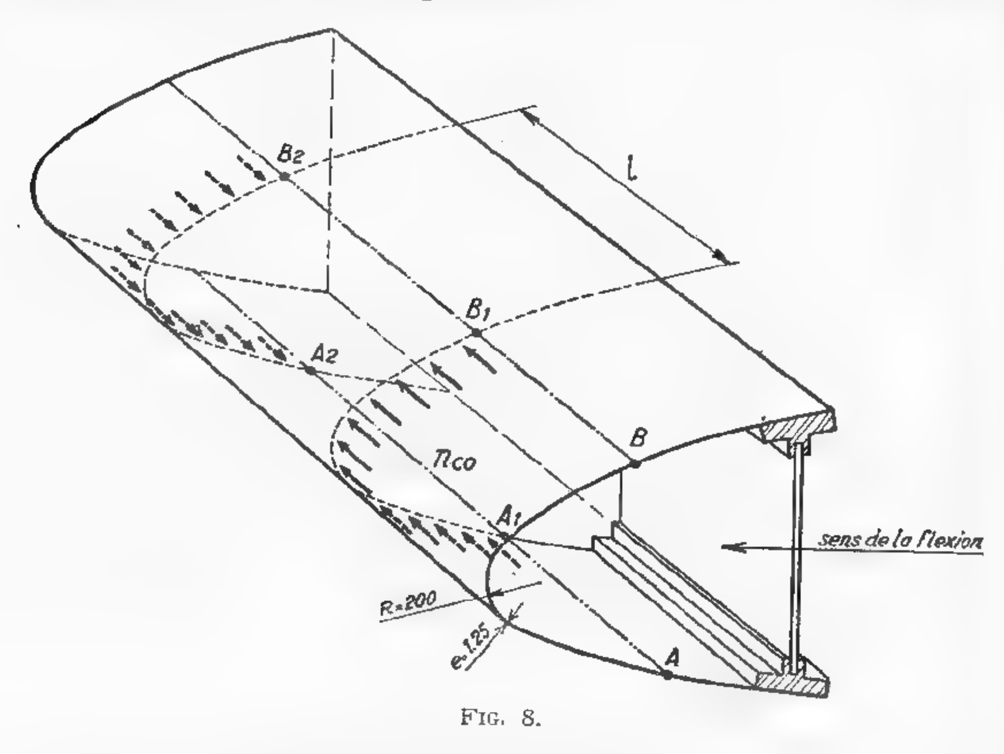


Fig. 8.

La demi-longueur d'onde théorique ayant pour valeur $\frac{\lambda}{2}=55$ mm, les nervures devront être espacées, au maximum, de

$$l=5\times 55=275 \text{ mm}$$

pour que le revêtement travaille, sans plissement aux taux n_{co} dans la partie considérée.

2.4 CALCUL, APRÈS PLISSEMENT PAR COMPRESSION, DES CONSTRUCTIONS EN TOLE MINCE RAIDIE.

2.41 Conditions expérimentales. — Considérons un panneau rectangulaire de tôle mince, raidi par des *profilés parallèles* de même métal (raidisseurs ou lisses) *intimement reliés à la tôle* (par rivetage ou soudure électrique par points, par exemple). Ces raidisseurs sont eux-mêmes sollicités, avec la tôle, par l'effort de compression uniformément réparti exercé, par exemple, par les plateaux d'une machine d'essai.

Notons que cet état de sollicitation simultanée des raidisseurs et de la tôle correspond à tous les cas pratiques d'utilisation des tôles minces semelles de caisson, revêtement de fuselage-coque, etc...

Nous nous placerons, par exemple, dans le cas d'un panneau plan à quatre raidisseurs également espacés (fig. 9 *a*).

2.42 Répartition des contraintes.

2.421 *Avant plissement de la tôle.* — Au début de l'essai, c'est-à-dire pour de faibles charges ne produisant pas d'instabilité de la tôle, la contrainte de compression se répartit uniformément sur l'ensemble du pan-

neau, et l'on a

$$n_{ct} = n_{cr} = \frac{F}{S_t + S_r}$$

en désignant par :

n_{ct} et S_t la contrainte de compression et la section de la tôle,
n_{cr} et S_r la contrainte de compression et la section des raidisseurs.

On a donc affaire à un *ensemble homogène* dont la contrainte se représente, par exemple, par la droite (1) du diagramme de la figure 9 *b*.

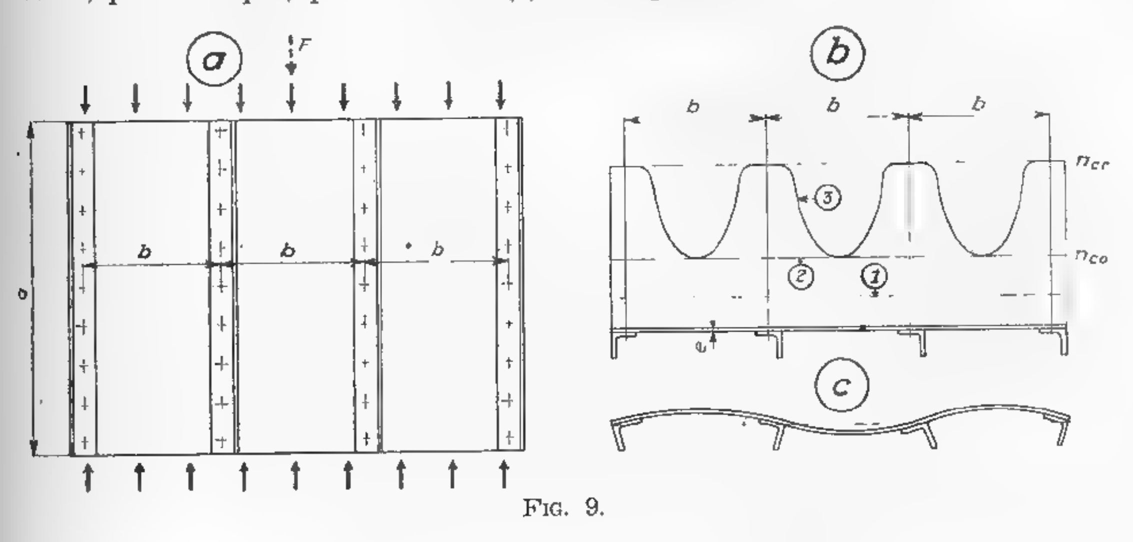


Fig. 9.

2.422 *Après plissement de la tôle.* — Pour une certaine charge F_0 telle que

$$n_{ct} = n_{cr} = \frac{F_0}{S_t + S_r} = n_{co}$$

les plaques délimitées par les raidisseurs deviennent *instables* et des *plissements* s'amorcent. Cette contrainte correspond à la *contrainte critique* de chaque plaque de largeur *b*, compte tenu de ses conditions de liaisons marginales (rigidité en torsion des raidisseurs, en particulier). La déformation d'ensemble affecte généralement l'allure schématisée par la figure 9 *c* (coupe transversale au milieu du panneau). Le diagramme des contraintes est encore linéaire (droite (2), fig. 9 *b*).

Si la charge F continue à croître, on constate (en disposant des tensomètres en différents points de la tôle et des raidisseurs) que la contrainte de la tôle affecte l'allure sinueuse de la courbe (3) de la figure 9 *b*.

La tôle ne supporte toujours, approximativement, que sa contrainte critique n_{co} au milieu des intervalles b, mais cette contrainte croît rapidement pour atteindre, au niveau des raidisseurs, une valeur très sensiblement égale à la contrainte n_{cr} de ces raidisseurs [1]. Cette allure s'explique par suite de la liaison intime raidisseurs-tôle qui impose, à ces deux éléments, les mêmes raccourcissements relatifs au niveau des génératrices rectilignes créées par les raidisseurs.

Le panneau constitue donc, du point de vue de la transmission de ses charges appliquées, un *ensemble hétérogène.*

2.43 **Définition de la « largeur équivalente ».** — Après plissement, *la tôle continue donc à encaisser une certaine fraction de la charge F, mesu-*

1. — On obtiendrait rigoureusement le taux n_{cr} si la dilatation élastique de la tôle était nulle dans le sens transversal.

rée par l'aire délimitée par la courbe sinueuse (3) *de la figure* 9 *b* (reproduite figure 10 *a*). Le raidisseur B, par exemple, est « *intéressé* » par une charge supportée par la tôle *mn* et cette charge est mesurée par l'aire curviligne *mm' o n'n*.

Remplaçons cette aire curviligne par celle d'un *rectangle, de hauteur* n_{cr}, et désignons par 2*c* la *largeur* du « *rectangle équivalent* » ainsi obtenu.

La dimension *c*, ainsi définie, se désigne par « *largeur équivalente* » (ou *largeur portante*) de tôle intéressée par un raidisseur de part et d'autre de sa ligne de liaison.

La largeur équivalente est donc la largeur fictive d'une bande de tôle, travaillant au même taux que le raidisseur, et supportant la même charge que la tôle réelle affectée, géométriquement, à ce raidisseur (du côté considéré).

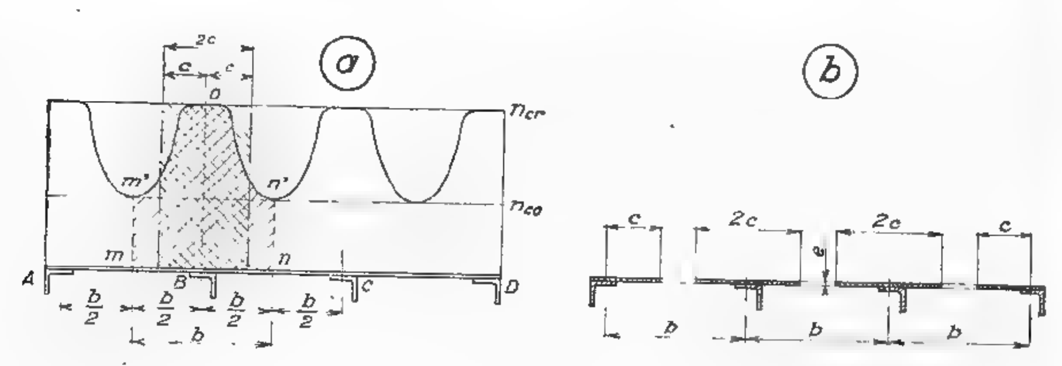


Fig. 10.

On voit que cette notion permet d'assimiler le panneau à un « *ensemble homogène fictif* » (fig. 10 *b*), la seule valeur de contrainte à considérer étant, désormais, celle des raidisseurs, qui est définie par

$$n_{cr} = \frac{F}{S'_t + S_r}$$

S'_t désignant la surface de tôle correspondant aux largeurs équivalentes. La valeur limite de cette contrainte, qui correspond à la *contrainte critique de flambage des raidisseurs*, est celle qui conditionne finalement la *résistance du panneau en compression.*

2.44 Etude expérimentale de la largeur équivalente. — Des essais systématiques ont permis de constater que le rapport

$$\frac{c}{b} = \frac{\text{largeur équivalente de chaque côté d'un raidisseur}}{\text{intervalle entre raidisseurs}}$$

est une fonction d'un autre rapport sans dimension

$$\frac{n_{co}}{n_{cr}} = \frac{\text{contrainte réelle des raidisseurs}}{\text{contrainte critique de la tôle}}$$

Cont. critique tôle
Cont. réelle raid.

La figure 11 représente la courbe moyenne, obtenue expérimentalement, en portant en abscisses la racine carrée de ce second rapport [1].

2.45 Formules usuelles donnant la largeur équivalente. — Les résultats expérimentaux ci-dessus ont été traduits par diverses *formules* d'un

---

1. — Remarquons que le rapport *c/b* n'atteint pas exactement 0,5 quand n_{co}, ce qui résulte de « l'effet de Poisson » signalé dans la note précédente.

emploi plus ou moins pratique. Nous donnons ci-dessous les deux plus répandues.

2.451 *Formule de* KARMAN. — Cette formule assimile la courbe expérimentale de la figure 11 à une fonction du second degré ayant pour équation

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = 0{,}25\ \frac{n_{c0}}{n_{cr}}\ .$$

Elle se traduit, selon les coordonnées de la figure 11, par une droite de pente 0,5. On en déduit une première *expression générale de la formule de* KARMAN :

$$\boxed{c = 0{,}5\ b\sqrt{\frac{n_{c0}}{n_{cr}}}\ .}$$

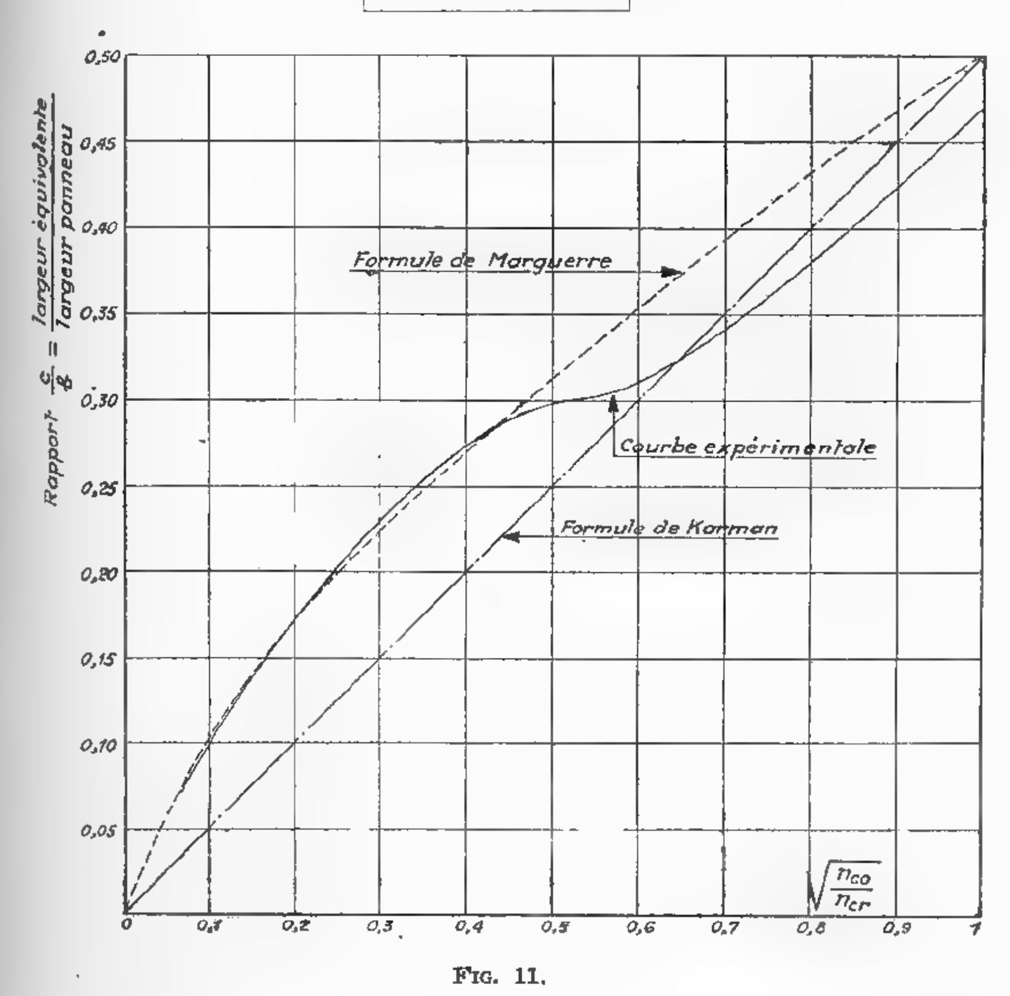


FIG. 11.

Elle s'applique aussi bien aux panneaux courbes qu'aux panneaux plans (soumis à une ou deux compressions). Elle nécessite la détermination préalable de leurs taux critiques n_{c0} (§ **2.1** à **2.3**).

Expression simplifiée. — Dans le cas des *panneaux plans soumis à une seule compression*, la formule ci-dessus se simplifie, en explicitant la valeur de la contrainte critique :

$$n_{c0} = K_c\ E\left(\frac{e}{b}\right)^2 .$$

Elle devient, en effet

$$c = 0{,}5\, e \sqrt{K_c \frac{E}{n_{cr}}}$$

où ne figure plus la largeur b des panneaux.

En adoptant pour K_c la *valeur défavorable* $K_c \doteq 3{,}64$ (§ 2.164), on obtient sensiblement

$$\boxed{c = 0{,}95\, e \sqrt{\frac{E}{n_{cr}}}}\, .$$

C'est *l'expression simplifiée classique* de la formule de KARMAN.

Remarques. — *a)* Cette formule peut également s'établir directement de la manière suivante :

Supposons qu'il existe deux raidisseurs fictifs à l'extrémité de chaque largeur équivalente c (de part et d'autre d'un raidisseur réel), et écrivons que la contrainte critique n'_{co} du panneau fictif, ainsi délimité, est égale à la contrainte réelle n_{cr} du raidisseur, nous obtenons, avec $K_c = 3{,}64$

$$n'_{co} = 3{,}64\ E \left(\frac{e}{2\,c}\right)^2 = n_{cr}$$

d'où

$$c = e \sqrt{\frac{3{,}64}{4}\frac{E}{n_{cr}}} \sim 0{,}95\, e \sqrt{\frac{E}{n_{cr}}}$$

b) On exprime quelquefois la formule simplifiée de KARMAN avec un coefficient égal à 1,26 (au lieu de 0,95). Cette expression s'obtient quand on suppose les bords des panneaux parfaitement encastrés au niveau des raidisseurs, c'est-à-dire quand on adopte $K_c = 6{,}35$ au lieu de 3,64 (voir **Planche 37**). Notons que cette hypothèse n'est valable que dans le cas de forts raidisseurs de sections fermées présentant une très grande rigidité en torsion. Ce cas se rencontre peu fréquemment en pratique et le coefficient 0,95 est à conseiller d'une manière générale.

2.452 *Formule de* MARGUERRE. — Cette formule assimile la courbe expérimentale à une fonction du troisième degré en $\frac{c}{b}$. Elle s'exprime par la relation

$$\boxed{c = 0{,}5\, b \sqrt[3]{\frac{n_{co}}{n_{cr}}}}\, .$$

Sa courbe représentatrice est également tracée figure 11.

On voit qu'elle traduit mieux les résultats expérimentaux que la formule de KARMAN, pour les faibles valeurs de c/b (tôles minces ou raidisseurs espacés). Elle ne se prête pas à une simplification analogue à celle de la formule de KARMAN.

2.46 Remarques au sujet de la largeur équivalente.

2.461 *Procédé de calcul correct.* — On voit que, même en utilisant l'expression simplifiée de la formule de KARMAN, il est nécessaire de connaître le taux de travail n_{cr} du raidisseur pour calculer la largeur équivalente.

Or, pour une charge de compression totale F à supporter par un panneau, ce taux de travail est donné par

$$n_{cr} = \frac{F}{S'_t + S_r} \qquad (\S\ 2.43)$$

et la « section équivalente » de tôle S'_t dépend elle-même de l'inconnue : largeur équivalente.

Conclusion : Un calcul exact doit, dans le cas général, être conduit par approximations successives.

On se donne, *à priori*, une contrainte n_{cr}, d'où une valeur de c à laquelle correspond une nouvelle valeur de n_{cr}, etc... (Généralement, deux approximations judicieuses suffisent pour encadrer la solution.) Notons cependant que, dans certains cas simples, le problème peut être directement mis en équation, surtout si l'on utilise la formule de KARMAN qui ne conduit qu'à des équations du second degré.

2.462 *Procédé de calcul rapide.* — Pour un *calcul de première approximation*, on pourra se contenter de la méthode rapide et défavorable ci-après :

On admet, pour le calcul de c, une valeur de n_{cr} égale à la contrainte maximum admissible pour le raidisseur (conditionnée par le flambage local ou général).

En adoptant ainsi, pour les profilés laminés en AU4G un taux n_{cr} égal à 28 kg/mm², on trouve à l'aide de la formule simplifiée de KARMAN (panneaux plans)

$$c = 0{,}95\, e \sqrt{\frac{7000}{28}}$$

soit :

$$\boxed{c = 15\ e.}$$

C'est l'approximation bien connue et le plus souvent utilisée.

Remarquons que, pour les profilés en tôle pliée AU4G où n_{cr} est rarement supérieur à 22 kg/mm², on trouve, dans les mêmes conditions

$$c = 17\ e.$$

2.463 *Cas particuliers.* — Nous insistons sur le fait que la largeur équivalente c doit être comptée *à partir de la ligne de fixation raidisseur-tôle et de part et d'autre de cette ligne* (quand la tôle est continue).

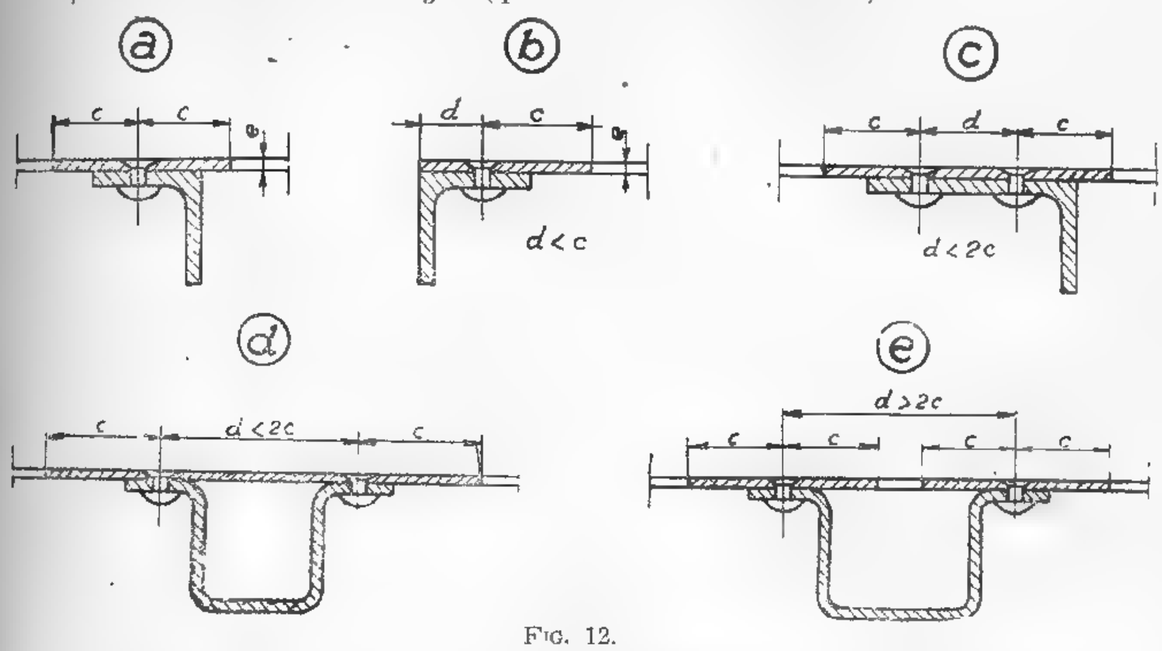


FIG. 12.

La figure 12 représente quelques *cas particuliers d'assemblages raidisseurs-tôle.* Les parties hachurées représentent les sections équivalentes à

faire intervenir dans les calculs. On voit qu'un assemblage tel que celui de la figure 12 d où l'on a : $d < 2c$ constitue un véritable profilé fermé avec la tôle de revêtement.

Quand les raidisseurs d'une structure sont suffisamment serrés ou quand l'épaisseur e est suffisamment forte, on peut obtenir

$$2\,c = b, \qquad \text{ou même} \qquad 2\,c > b.$$

Dans le premier cas, cela signifie que $n_{c0} = n_{cr}$ et dans le deuxième que $n_{c0} > n_{cr}$. Dans ces deux cas, l'ensemble tôle-raidisseur constitue un *corps homogène en compression* (fig. 13).

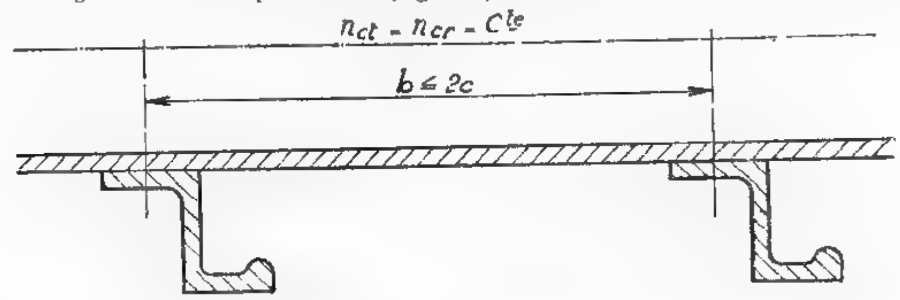


Fig. 13.

Le poids minimum d'une construction en tôle épaisse (semelle de caisson de voilure, par exemple) est généralement obtenu pour $2c = b$ (pas de tôle fictivement perdue). On recherchera donc ce résultat.

Exemple

tôle $e = 5$, $n_{cr} = 28$ kg/mm².

On admettra

$b = 2\,c = 30\;e = 150$ mm.

Remarquons, enfin, que si l'on utilise la formule de Marguerre, la largeur b des panneaux ne disparaît pas quand on explicite n_{c0} dans cette formule. On trouvera donc, pour un même ensemble possédant des raidisseurs inégalement espacés, des largeurs équivalentes différentes de chaque côté de ces raidisseurs. On obtient le même résultat avec la formule de Karman si les conditions aux limites de chaque panneau partiel sont différentes (c'est-à-dire si le coefficient K_c n'est pas le même).

2.47 Liaison des raidisseurs à la tôle.

2.471 *Condition à réaliser.* — Pour que la contrainte d'un panneau raidi soit limitée uniquement par la contrainte admissible pour les raidisseurs (flambage local ou général) *il faut que la tôle n'ait pas tendance à flamber prématurément entre deux points de fixation* (fig. 14).

La distance entre ces points (espacement P des rivets) doit donc être telle que la contrainte admissible au flambage de la bande de tôle équivalente soit au moins égale à n_{cr} = taux de travail du raidisseur.

2.472 *Formule de* Howland. — Cette formule se déduit directement de la formule d'Euler. On doit avoir (chap. XVI, § 2.3)

$$n_{c\lambda} = \frac{\pi^2\,E}{\lambda^2} \geqslant n_{cr}$$

soit, à la limite

$$n_{c\lambda} = n_{cr}.$$

Avec λ = élancement équivalent de la bande de tôle de largeur $2c$

$$\lambda = 0{,}5\,\frac{P}{\rho}$$

car on peut considérer (fig. 14) la bande de tôle comme étant encastrée au niveau de chaque rivet (tangente à la déformée verticale).

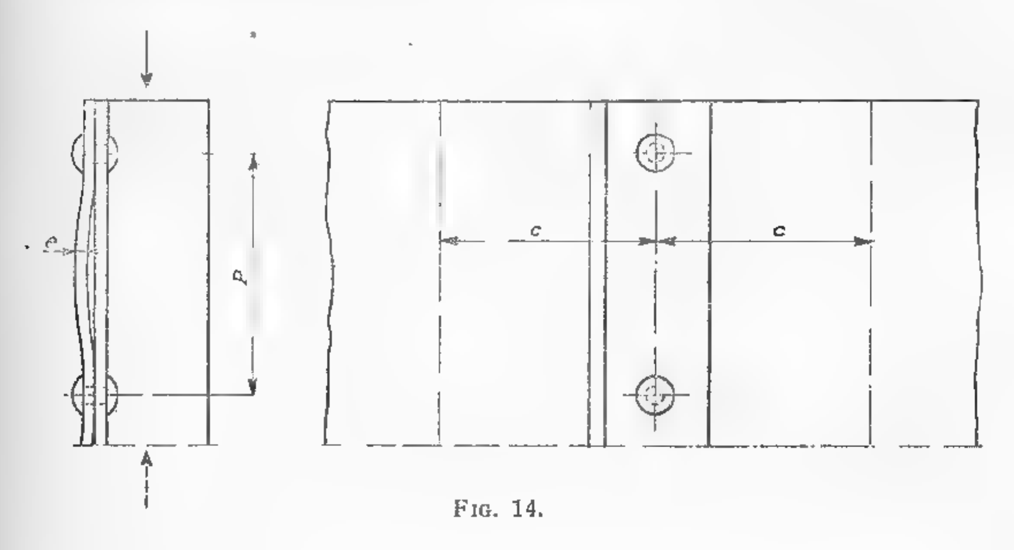


Fig. 14.

On a donc

$$\lambda^2 = \frac{P^2}{4\,\rho^2} \quad \text{avec } \rho^2 = \frac{I_{min}}{S}$$

soit

$$\rho^2 = \frac{2\,c\,e^3}{12\,.\,2\,c\,e}$$

(rectangle de largeur $2c$ et d'épaisseur e).

$$\rho^2 = \frac{e^2}{12}$$

d'où

$$\lambda^2 = \frac{3\,P^2}{e^2}.$$

On doit donc avoir, à la limite

$$n_{cr} = \frac{\pi^2\,E\,e^2}{3\,P^2}$$

soit

$$P = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\,e\sqrt{\frac{E}{n_{cr}}} = 1{,}814\;e\sqrt{\frac{E}{n_{cr}}}.$$

La condition de non flambage s'exprime donc par l'inégalité

$$\boxed{P \leqslant 1{,}814\;e\sqrt{\frac{E}{n_{cr}}}.}$$

C'est *la formule de* Howland qui donne *la limite supérieure du pas de rivetage*, en fonction de la contrainte n_{cr} du raidisseur et du module d'élasticité E de la tôle.

Remarques. — On voit, en comparant cette expression à la formule simplifiée de Karman donnée ci-dessus pour la détermination de la largeur équivalente c que l'on a

$$P_{max} = \frac{1{,}814}{0{,}95}\,c = 1{,}91\;c.$$

Application numérique.

Tôle AU4G

$$e=1,6 \qquad n_{cr}=12 \text{ kg/mm}^2$$

$$P_{max}=1,814 \ . \ 1,6\sqrt{\frac{7000}{12}}=70 \text{ mm.}$$

On se rend compte de suite que cette formule donne, dans ce cas, un pas de rivetage supérieur à la pratique.

Limites d'utilisation. — La formule de HOWLAND étant déduite de celle d'EULER, elle n'est valable que dans les mêmes limites d'application, c'est-à-dire *pour des contraintes n_{cr} inférieures à la limite de proportionnalité n_e'* du métal utilisé (chap. XVI, § 2.52).

Cette condition conduit, pratiquement, à limiter l'emploi de cette formule pour des contraintes n_{cr} inférieures à 14 kg/mm² dans le cas des tôles en duralumin.

2.473 *Utilisation de la théorie du module réduit.* — La théorie du module réduit de flambage (chap. XVI, § 3.1) permet d'utiliser la formule de HOWLAND au delà de la limite de proportionnalité. Il suffit d'y remplacer le module d'élasticité d'origine E par le *module réduit* E_r correspondant au taux *n_{cr} considéré.*

Application numérique. — Utilisons les courbes données au chapitre XVI, figure 10 *a* (alliage léger genre AU4G1) dans les conditions suivantes :

$$e=1,6 \text{ mm} \qquad n_{cr}=25 \text{ kg/mm}^2.$$

On trouve, en partant de la graduation de gauche jusqu'à la courbe (1) (état non écroui) et en élevant une verticale sur la courbe (3)

$$E_r=5100 \text{ kg/mm}^2$$

d'où

$$P_{max}=1,814 \ . \ 1,6\sqrt{\frac{5100}{25}}=41,4 \text{ mm.}$$

2.474 *Abaque de* NEWELL. — En l'absence des courbes caractéristiques concernant le métal utilisé, on pourra employer un abaque reproduit **Planche 39,** dû à NEWELL [1]. Cet abaque est établi pour les *tôles de duralumin* (E = 7.000 kg/mm²) en raccordant à la courbe d'EULER (formule de HOWLAND) celles données par la formule de JONHSON (chap. XVI, § 3.22) pour différentes valeurs de limite élastique, considérées ici comme contraintes maxima [2].

Application numérique. — Dans les mêmes conditions que ci-dessus, soit

$$e=1,6 \qquad \text{et} \qquad n_{cr}=25 \text{ kg/mm}^2$$

on trouve en adoptant $n_e=28$ kg/mm² (limite élastique conventionnelle)

$$P_{max}=31 \text{ mm.}$$

L'abaque semble donc donner des résultats désavantageux.

2.475 *Remarque.* — Pour certaines constructions en tôle épaisse ou fortement raidie (semelles de caisson de voilure, par exemple), on arrive à des valeurs de n_{cr} avoisinant la contrainte admissible à rupture en compression simple ($n_{cr}=30$ à 35 kg/mm² pour le duralumin). L'expérience montre alors que le pas P doit être de l'ordre de 12 à 15 *e* pour les tôles de duralu-

1. — *Référence* : Journal of the Aéronautical Sciences, avril 1937.

2. — Il existe également des abaques analogues basés sur la formule de Rankine.

min[1] et que l'on a intérêt, au surplus, à *quinconcer les rivets de fixation de deux raidisseurs voisins*, de façon à contrarier la formation de plis perpendiculaires au sens de l'effort appliqué.

2.476 *Diamètre des rivets.* — Il n'existe pas, à notre connaissance, de règle précise permettant la détermination du diamètre des rivets. On les dimensionne d'habitude en fonction des épaisseurs à serrer

Exemples

tôles de 5 +5	rivets de 6,4
» 3,2+3,2	» 5
» 1,6+1	» 3,2.

3. TRAVAIL DES TOLES MINCES EN FLEXION

3.1 REMARQUE PRELIMINAIRE.

Nous n'exposerons, ci-dessous, que l'étude du phénomène de plissement lui-même, c'est-à-dire la recherche des *contraintes critiques*, cette étude servant essentiellement d'intermédiaire pour celles à suivre.

Les panneaux fléchis sont, en effet, généralement soumis simultanément à un *cisaillement* provenant de la transmission d'un effort tranchant. L'influence de ce cisaillement devient alors prépondérante pour l'étude de la tenue des constructions après plissement. Nous traiterons ce problème dans un cas particulier, au paragraphe **6.**

3.2 FLAMBAGE DES PLAQUES PLANES ISOTROPES SOUMISES A UN MOMENT FLECHISSANT PUR.

L'état de sollicitation est schématisé par la figure 15 *a* qui précise également les *notations* utilisées.

Cet état peut, par exemple, être réalisé expérimentalement à l'aide d'un montage analogue à celui représenté par la figure 15 *b*.

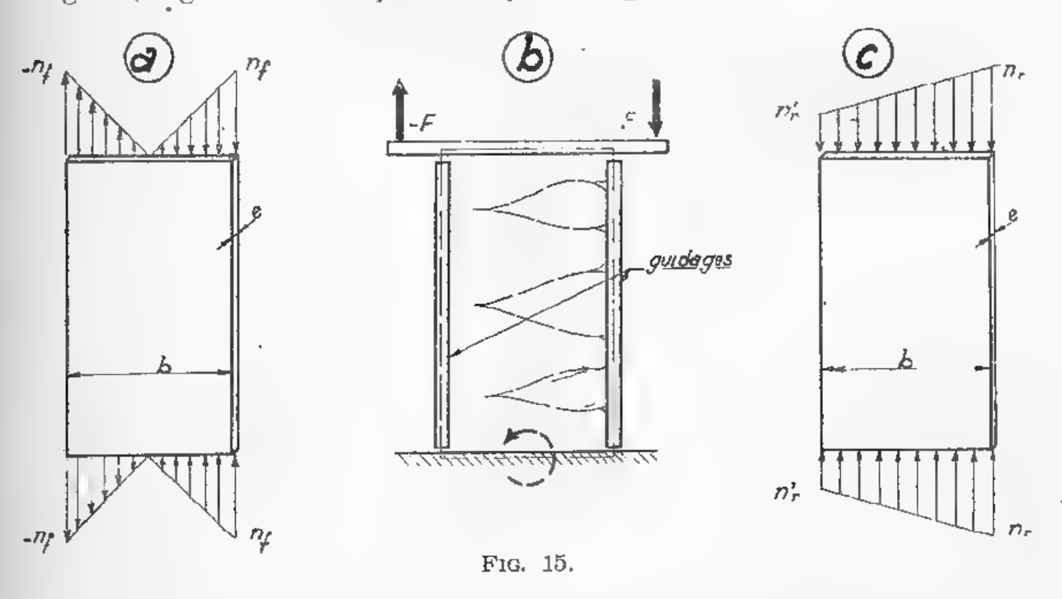


Fig. 15.

1. — En utilisant les courbes du chapitre XVI, fig. 10, on trouve, pour n_{cr} = 33 kg/mm²

$$E_r=2250 \quad \text{d'où} \quad P_{max}=1,814\, e \sqrt{\frac{2250}{33}}=15\, e.$$

Pour une certaine valeur de moment fléchissant, les régions de la plaque *comprimées* par ce moment deviennent instables. Il se produit un *plissement* dont l'allure est schématisée figure 15 *b*.

On désigne par *contrainte critique de flexion* n_{f_0} *la contrainte maximum* existant au niveau des bords de la plaque, quand celle-ci devient instable. Elle est donnée par l'expression générale

$$n_{f_0} = K'_f \, E \left(\frac{e}{b} \right)^2 .$$

La variation théorique de K_f en fonction de l'allongement a/b des panneaux est donnée **Planche 41,** *diagramme* 1, dans le cas particulier *des plaques articulées sur leurs quatre côtés.*

Remarque. — L'examen de cette courbe montre que l'on peut, pratiquement, dans le cas particulier des panneaux articulés, adopter pour K_f sa valeur asymptotique

$$K_f = 21{,}6.$$

On voit que ce coefficient est, environ, six fois plus élevé que celui correspondant aux mêmes plaques soumises à une compression pure ($K_c = 3{,}64$). Cet accroissement traduit *l'influence stabilisatrice des parties tendues sur les parties comprimées.*

Par analogie, on adopte souvent, pour des *plaques encastrées sur leurs quatre côtés,*

$$K_f = 6{,}35 \times 6 = 38{,}2.$$

Pour les cas usuels (âmes de longerons, par exemple), on pourra adopter la *valeur moyenne*

$$K_f = 30.$$

3.3 FLAMBAGE DES PLAQUES PLANES ISOTROPES SOUMISES A UNE COMBINAISON DE FLEXION ET DE COMPRESSION PURES.

L'état de sollicitation est représenté par la figure 15 c.

L'instabilité se produit, du côté surcomprimé par la flexion, pour une *contrainte résultante maximum* (ou contrainte critique)

$$n_{r_0} = n_f + n_c$$

donnée par l'expression générale

$$n_{r_0} = K_f \, E \left(\frac{e}{b} \right)^2 .$$

Nous donnons, **Planche 41,** *diagramme* 2, les courbes théoriques de variation du coefficient K'_f, dans le cas de *plaques articulées sur leurs quatre côtés.* Ces courbes correspondent à différentes valeurs des allongements a/b et sont tracées en fonction du rapport

$$\frac{n'_r}{n'_r} = \frac{\text{contrainte résultante du côté tendu par la flexion}}{\text{contrainte résultante du côté comprimé par la flexion}} .$$

On retrouve les coefficients théoriques de flexion pure et de compression pure aux deux extrémités de ce diagramme.

Notons que la courbe $a/b = 1{,}5$ pourra, pratiquement, être utilisée pour tous les allongements supérieurs à cette valeur.

3.4 FLAMBAGE DES PLAQUES COURBES ISOTROPES SOUMISES A UNE FLEXION PURE.

De même qu'en compression pure, la courbure des panneaux a une *influence favorable* sur leur stabilité en flexion pure.

D'après la publication américaine A. N. C. 5, on peut admettre pour n_{fo} des valeurs supérieures d'environ 30 % aux valeurs de n_{co} déterminées, selon le paragraphe **2.3**, pour les mêmes plaques. Prendre alors comme dimension b la largeur développée de ces plaques.

4. TRAVAIL DES TOLES MINCES EN CISAILLEMENT : CHAMP DE TENSIONS DIAGONALES

4.1 REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Nous ne traiterons, dans ce paragraphe, que *le cas théorique* d'un panneau de tôle mince bordé, sollicité initialement en *cisaillement pur* (effort tranchant ou torsion).

Le phénomène plus complexe, mais plus généralement réalisé, qui est celui de *superposition d'efforts de flexion au cisaillement*, sera étudié aux paragraphes **5** et **6.**

Comme pour la compression, nous examinerons successivement :

a) Le phénomène d'instabilité lui-même (plissement) qui prend ici le nom de *champ de tensions diagonales* (§ **4.2** à **4.4**).

b) Le mode de travail après plissement et plus spécialement *les sur-sollicitations*, c'est-à-dire les efforts supplémentaires qui en découlent (§ **4.5**).

4.2 EXPÉRIENCES DE DEFINITION DU PHÉNOMENE D'INSTABILITE EN CISAILLEMENT.

4.21 Montages d'essai.

4.211 *Montages en cadre* (fig. 16). — On peut réaliser une sollicitation en *cisaillement pur* d'un panneau plan en le montant dans un *cadre articulé* à ses quatre sommets ABCD, et en soumettant ce cadre à *un effort de traction dirigé suivant l'une de ses diagonales.*

Le cadre (composé d'éléments suffisamment rigides pour être considérés comme indéformables en traction) est relié à la tôle d'essai par une série de rivets ou boulons très rapprochés.

La tôle n'est pas solidaire directement des axes B et C (ce qui se réalise, par exemple, par un trou dans la tôle de diamètre supérieur à celui de l'axe).

Le cadre peut être carré (fig. 16 *a*) ou rectangulaire (fig. 16 *b*).

Par suite de la réalisation du montage, l'effort appliqué F et la réaction — F doivent se décomposer en deux efforts F_1 et F_2 agissant sur les côtés du cadre et sollicitant la tôle par ses fixations sur ces côtés.

On peut admettre que les fixations situées sur un côté sont également chargées, ce qui revient, à la limite, à solliciter chaque côté par une charge uniformément répartie par unité de longueur. Montrons que cette charge que nous désignerons par τ est constante sur les quatre côtés.

Dans le cas du carré la proposition est évidente.

Dans le cas du rectangle on a (fig. 16 *b*) :

côtés BD et AC

$$\tau_1 = \frac{F_1}{a} ;$$

côtés AB et CD

$$\tau_2 = \frac{F_2}{b} .$$

Or, la similitude du triangle des forces et du triangle ABC donne précisément

$$\frac{F_1}{a} = \frac{F_2}{b}.$$

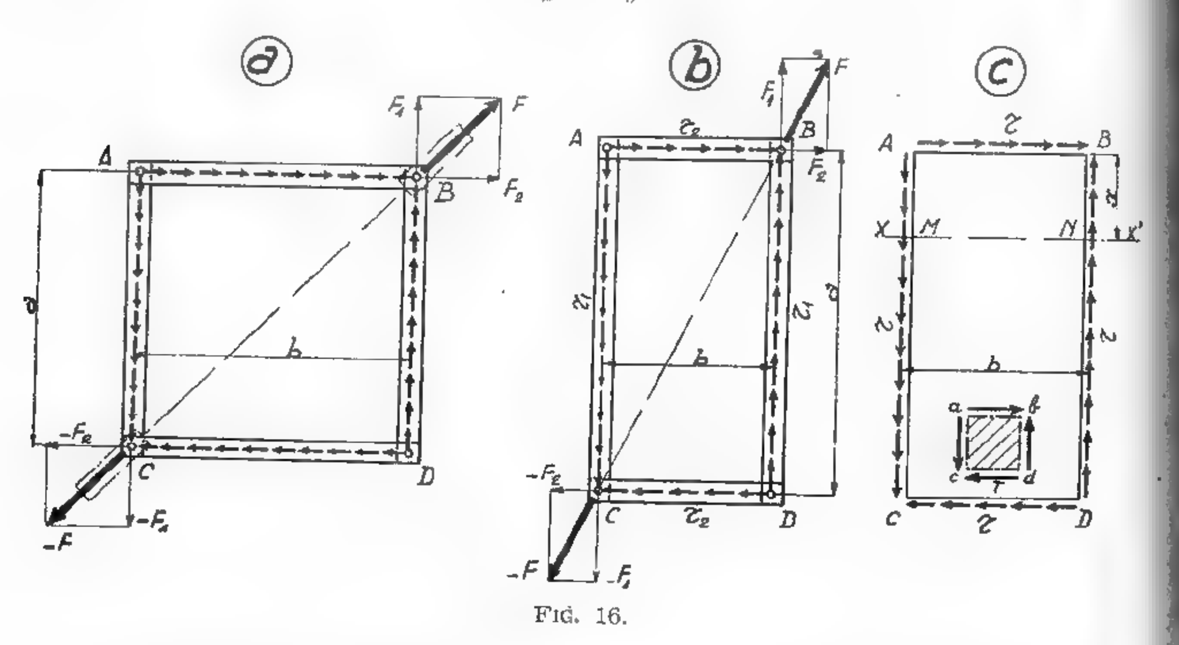


FIG. 16.

La force par unité de longueur $\tau = \tau_1 = \tau_2$ représente *l'intensité du flux* (ou écoulement) *de cisaillement* appliqué à la plaque de tôle considérée.

La *contrainte de cisaillement* est donnée par

$$t = \frac{\tau}{e} \quad \text{avec } e = \text{épaisseur de la tôle.}$$

Remarques. — *a*) On démontre aisément qu'il n'existe que du *cisaillement pur* dans les panneaux. Il suffit, en effet, d'envisager une section quelconque XX' située à l'abscisse x dans un panneau rectangulaire (fig. 16 *c*), par exemple. Considérons le système de forces appliquées aux trois côtés AB — AM et BN situés au-dessus de cette section. On voit immédiatement que l'effort normal est nul.

Le moment fléchissant vaut

M = m[t] des forces sur AB + m[t] des forces sur AM et BN (couple).

$$M = \tau b \cdot x - \tau x \cdot b = 0.$$

Il reste un effort tranchant constant : $T = \tau b$.

b) La démonstration précédente $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ montre donc, une fois de plus, *le principe de réciprocité et d'égalité* des cisaillements longitudinaux et transversaux.

c) Les figures précédentes illustrent ce que l'on appelle *un état de cisaillement pur* qui se représenté toujours par quatre lignes de flèches formant un système de deux couples égaux et antagonistes (chap. VIII, § 2.2).

4.212 *Montage en torsion* (fig. 17). — Un autre montage, aussi correct mais plus difficile à réaliser, consiste à solliciter en torsion une succession de panneaux formant un cylindre. L'équilibre d'un panneau s'établit de la même façon. On trouve toujours un flux de cisaillement d'intensité τ constante sur tout le périmètre du panneau (voir Torsion des corps creux à parois minces, chap. XIII, § 4.13). Le panneau est donc également sollicité,

initialement, en *cisaillement pur*. Cet essai permet, en outre, d'essayer des panneaux courbes.

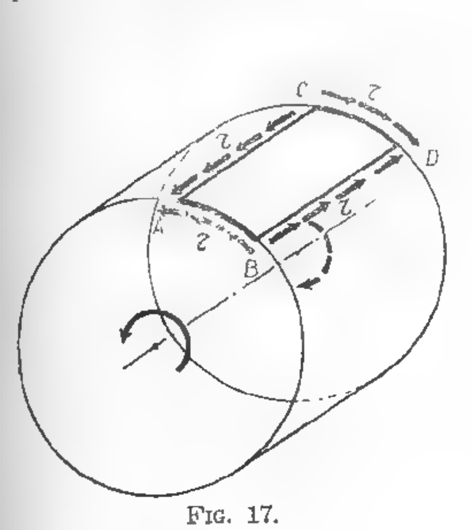


FIG. 17.

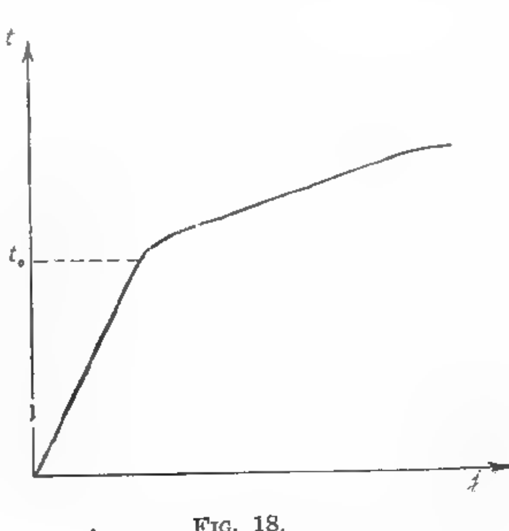


FIG. 18.

4.22 **Observations d'essai.** — Au début de l'essai, tout se passe normalement, comme pour des pièces prismatiques ordinaires. Si l'on dispose un appareil (comparateur par exemple), permettant de mesurer l'allongement de la diagonale BC des cadres, ce qui permet de calculer *l'angle de glissement j*, on constate que cet angle croît linéairement avec la charge, c'est-à-dire avec la contrainte de cisaillement t (voir fig. 18).

Puis, pour une certaine valeur : t_o de la contrainte t, on constate que la courbe s'incurve assez brutalement et qu'il se forme sur la tôle une série *de plis parallèles inclinés, environ, à 45° sur les côtés du cadre.* Les mêmes observations sont faites avec le montage en torsion.

La contrainte t_o, correspondant à ce changement d'état, s'appelle : *contrainte critique de cisaillement* et le phénomène de plissement lui-même prend le nom de *champ de tensions diagonales* ou, plus simplement, de *traction diagonale* [1].

4.3 EXPLICATION THÉORIQUE, IMAGÉE, DU PHÉNOMÈNE DE PLISSEMENT.

4.31 **Etat de sollicitation élémentaire avant plissement.** — Isolons un petit élément carré *abcd* (fig. 19 *a*) dans l'un des panneaux d'essai, les côtés de cet élément étant parallèles à ceux du cadre (voir position de l'élément (fig. 16 *c*).

Au début de l'essai, cet élément est sollicité uniquement par quatre contraintes tangentielles t égales et se faisant équilibre (état de cisaillement pur). On sait que la déformation en cisaillement se fera suivant *ab'cd'* si l'on suppose, par exemple, le côté *ab* fixe (chap. VIII, § 2.2).

On voit immédiatement que *la diagonale bc tend à s'allonger et la diagonale ad à se raccourcir.* On en déduit donc qu'elles sont respectivement *tendue* et *comprimée.*

On a ainsi une sensation physique très nette d'une propriété essentielle du cisaillement pur, démontrée en élasticité, qui peut se représenter ainsi : si l'on considère *un élément découpé à 45° par rapport au premier* (par exem-

1. — Insistons, de nouveau, sur le fait que cette contrainte critique ne correspond pas à une limite de résistance, mais seulement à un *changement de mode de travail.*

ple élément *efgh* sur la figure 19 *a*), cet élément est sollicité sur ses quatre faces par *quatre contraintes normales égales* (fig. 19 *b*) produisant de la *compression* sur les faces *ef* et *hg* et de la *traction* sur les autres faces.

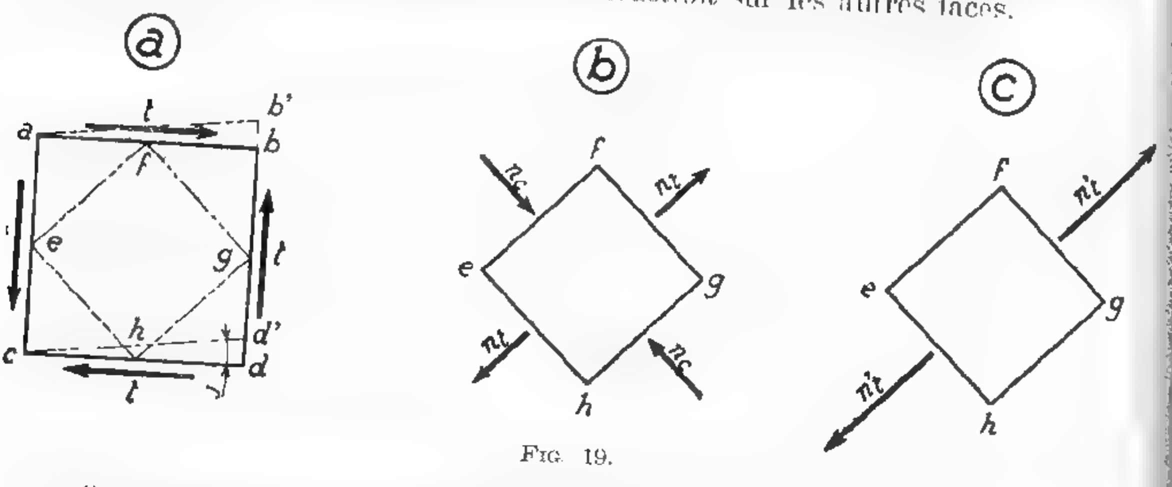


Fig. 19.

On démontre que ces contraintes n_c et n_t, appelées : *contraintes normales principales*, sont égales (en valeur absolue) aux contraintes t, soit

$$n_c = n_t = t.$$

On voit donc que *le cisaillement pur est un phénomène qui nécessite, de la part du corps auquel il s'applique, l'absorption d'une compression orientée à 45° par rapport aux directions de cisaillement*

4.32 **Etat de sollicitation théorique après plissement.** — Si cette compression ne peut plus être transmise par suite d'un *flambage*, on voit que le corps ne travaillera plus en cisaillement pur. C'est le cas des plaques minces au delà de leurs contraintes critiques t_o.

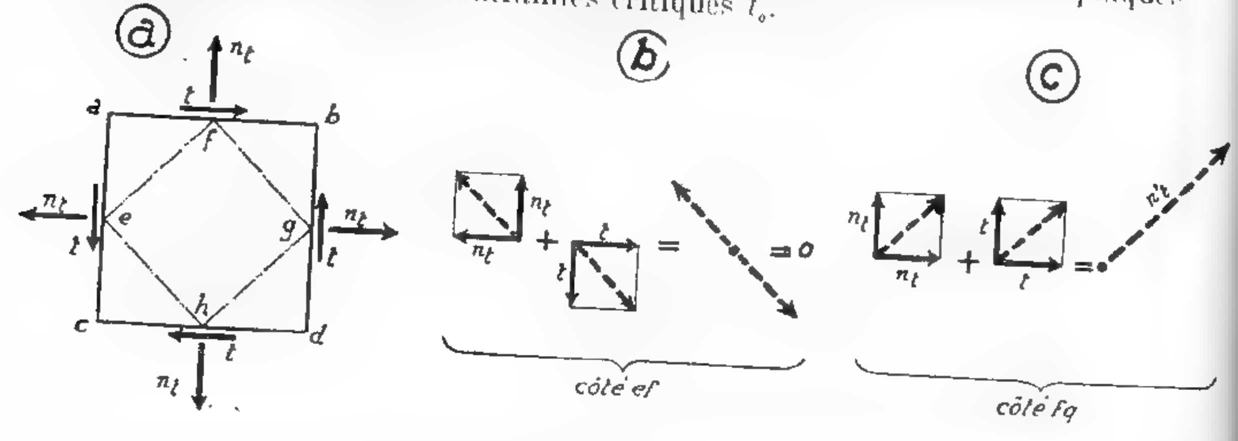


Fig. 20.

Il n'existe plus, théoriquement, après cette limite, qu'une seule contrainte normale dirigée en *traction* sur l'élément *efgh* (fig. 19 *c*). On conçoit que, cette nouvelle contrainte n'_t doit être supérieure à n_t. (Nous démontrerons plus loin qu'elle est précisément égale à $2n_t$.)

Remontons maintenant de l'élément oblique *efgh*, après plissement (fig. 19 *c*), à l'élément droit *abcd* dans le même état. On obtient la figure 20 *a*. Il est facile de le vérifier en combinant les contraintes aux points *a* (fig. 20 *b*) et *b* (fig. 20 *c*). On voit que la contrainte suivant *ef* est nulle, alors qu'elle s'accroît suivant *fg*.

La figure 20 *a* représente *l'état de sollicitation théorique après plissement*. On voit qu'il diffère de l'état initial, en cisaillement pur (fig. 19 *a*).

par l'apparition de *contraintes de traction dirigées normalement aux quatre côtés de la plaque.*

4.33 **Etat de sollicitation réel, après plissement.** — En réalité, on peut admettre raisonnablement, qu'après plissement, la tôle continue à transmettre par *cisaillement pur sa contrainte critique* t_0. Cette hypothèse est, en effet, en accord avec les théories du flambage par compression, où les éléments flambés réagissent élastiquement avec un effort égal à leur charge critique (équilibre indifférent sous cette charge, voir chap. XVI, § **2.1**) [1].

Il en résulte *l'état de sollicitation réel, après plissement,* représenté par la figure 21 où nous avons adopté les notations

$$t_1 = t - t_0 \qquad \text{et} \qquad n_t - n_t \quad t_0$$

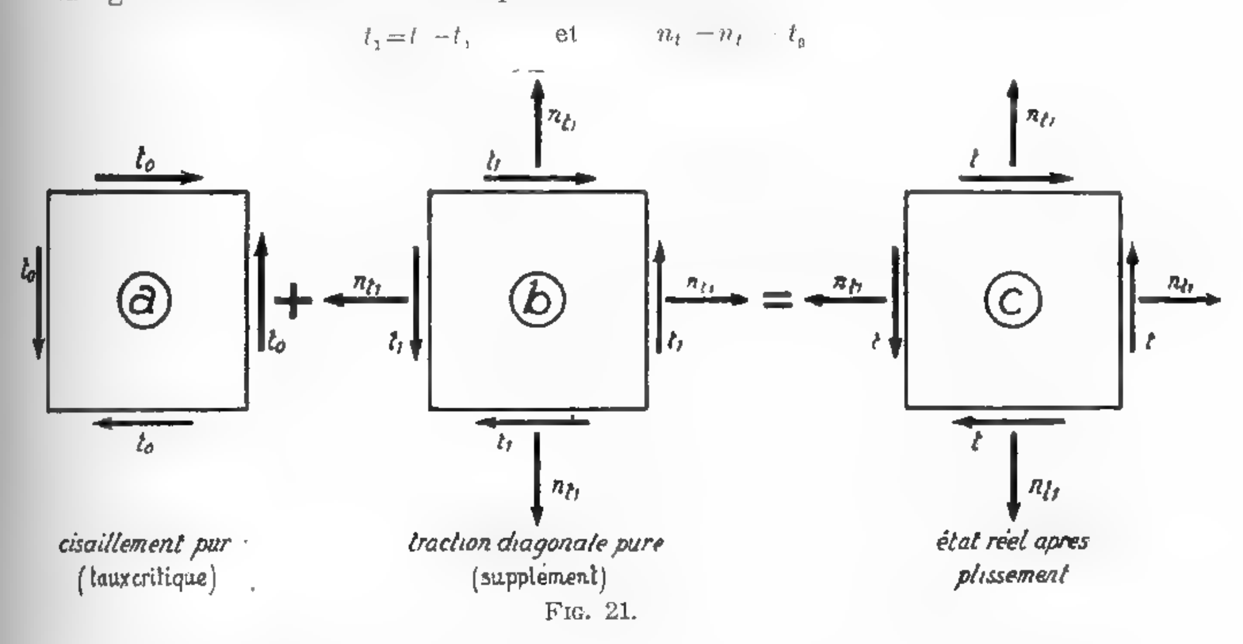


FIG. 21.

4.34 **Conclusions.**

4.341 Quand une plaque isotrope, soumise à un état de cisaillement pur, atteint sa limite de stabilité, il apparaît un « *champ de plissement* » dont l'orientation est égale à 45° par rapport à la direction de l'effort tranchant [2].

4.342 La plaque ne subit qu'une contrainte de traction pure, appelée « *contrainte de traction diagonale* », suivant la direction de ces plis.

4.343 La plaque subit, en outre, des contraintes de traction suivant les quatre directions normales à son encadrement (fig. 20 *a*). Cet encadrement est donc sollicité, par réaction, vers le centre de la plaque. C'est pourquoi l'on dit qu'une plaque mince bordée soumise à un état de traction diagonale « *tire sur ses bordures* ». Nous démontrerons d'ailleurs, plus géométriquement, cette propriété essentielle au paragraphe **4.5** ci-après.

4.35 **Remarque.** — On désigne encore, quelquefois, le mode de travail en traction diagonale, par « *travail en diagonale tendue* ». Cette désignation revient à assimiler la triangulation fournie par une plaque, à son encadre-

1. — Dans le cas du cisaillement, la compression correspondante est celle orientée à 45° par rapport à t et elle a pour valeur $n_c = t$.

2. — En réalité, la rigidité des éléments de bordure fait que cet angle se trouve modifié au voisinage immédiat de ces éléments, les plis ayant tendance à s'orienter normalement à l'encadrement.

ment à un système de deux *diagonales souples*. La diagonale comprimée se détend et seule la diagonale tendue transmet l'effort appliqué [1].

4.4 CONTRAINTE CRITIQUE DE CISAILLEMENT.

4.41 Plaques rectangulaires isotropes planes.

4.411 *Formule.* — Le phénomène d'instabilité apparaît, en cisaillement pur, quand la contrainte t atteint une valeur *critique* t_0 qui s'exprime sous la forme générale donnée au paragraphe **1.5**, soit

$$t_0 = K_s\, E\left(\frac{e}{b}\right)^2.$$

Dans cette formule, *b désigne la plus petite des deux dimensions du plan de la plaque rectangulaire.*

4.412 *Coefficient* K_s — Le coefficient K_s se détermine *théoriquement*, selon la méthode exposée succinctement au paragraphe **1.4**.

Il dépend, pour un même matériau, de *l'allongement* a/b des plaques et de leurs *conditions de guidages.*

Diagramme. — Nous donnons **Planche 40** (*diagramme* **1**), les courbes de variation de K_s en fonction de l'inverse : b/a de l'allongement [2] et pour les deux conditions théoriques extrêmes : *quatre côtés articulés* et *quatre côtés encastrés.*

On remarquera que les valeurs de K_s sont nettement plus élevées que celles correspondant à la compression pure. Cet accroissement est dû à « *l'influence stabilisatrice* » des tractions qui accompagnent le cisaillement.

Formule pratique. — La formule simple suivante, qui se traduit par la droite (3) indiquée sur le diagramme 1 de la **Planche 40**, peut être utilisée, pratiquement, pour la plupart des cas usuels

$$K_s = 5 + 6\,\frac{b}{a}.$$

4.413 *Abaque.* — Nous donnons, **Planche 40** (*diagramme* **2**), un abaque établi en utilisant la formule pratique ci-dessus, donnant la valeur de K_s. Cet abaque permet la détermination directe de la contrainte critique t_0, en fonction des dimensions des panneaux. Il est établi pour des *plaques en duralumin* ($E = 7.000$ kg/mm², $\sigma = 0{,}3$). Son usage est indiqué sur la Planche 40.

On remarquera que les *graduations logarithmiques* correspondent à l'échelle supérieure (carrés) de la règle à calculs de poche (longueur 125 mm), ce qui facilitera les interpolations.

4.412 *Remarques.* — L'allure des courbes donnant K_s et t_0, Planche 40, montre que la contrainte critique dépend relativement peu de l'allongement des plaques. Elle est par contre, *très sensible à la grandeur de leur plus petite dimension.*

---

1. — Si l'on suppose, cependant, que ces diagonales possèdent une certaine tension initiale, on sait (Ch. VI, § 3.3) qu'une part de l'effort sera absorbée pour détendre la diagonale comprimée avant de tendre l'autre. On peut, physiquement assimiler la contrainte t_0 à l'influence de cette tension initiale.

2. — Ce paramètre ne varie que de 0 à 1 puisque b est, par définition, le plus petit côté.

3. — *Référence :* Précis d'aérotechnique, feuille Rd 1-6.

Exemple : Un panneau de fuselage-coque de petite dimension $b=150$ mm (intervalle entre les lisses) et d'épaisseur $e=1$ mm, admet les contraintes critiques suivantes, selon l'espacement a entre les couples (valeurs d'après abaque planche 40) :

1) $a=300$ mm : $\frac{b}{a}=0{,}5$ $\quad t_0=2{,}5$ kg/mm²

2) $a=500$ mm : $\frac{b}{a}=0{,}3$ $\quad t_0=2{,}1$ kg/mm²

3) $a=\infty$ (couples non reliés au revêtement) : $\frac{b}{a}=0$; $t_0=1{,}55$ kg/mm².

Dans cette dernière solution on retrouve la même stabilité que dans la solution 1) en serrant les lisses à un pas : $b=118$ mm au lieu de 150 mm. Cette disposition peut, parfois, être avantageuse.

4.42 Plaques isotropes de courbure cylindrique. — De même qu'en compression ou en flexion, la courbure des plaques exerce une « *influence stabilisatrice* » sensible sur leurs caractéristiques de flambage en cisaillement pur.

4.421 *Flambage par cisaillement d'un tube circulaire mince.* — Le cisaillement, constant, est obtenu par une sollicitation en torsion (fig. 22 *a*).

D'après Ballerstedt et Wagner [1], la contrainte critique est donnée par

$$t_0 = K'_s\, E \left(\frac{e}{l}\right)^2 + 0{,}1\, E\, \frac{e}{R}$$

avec

$K'_s=5$ dans le cas des extrémités appuyées,
$K'_s=9{,}1$ dans le cas des extrémités encastrées,
l=longueur, et R=rayon du tube.

Cette formule a été vérifiée pour R/e compris entre 250 et 4000 et pour l/R compris entre 0,25 et 5.

Remarquons que le premier terme de la formule : $K_s\, E\left(\frac{e}{l}\right)^2$ représente, très sensiblement, la contrainte critique de la plaque plane obtenue par

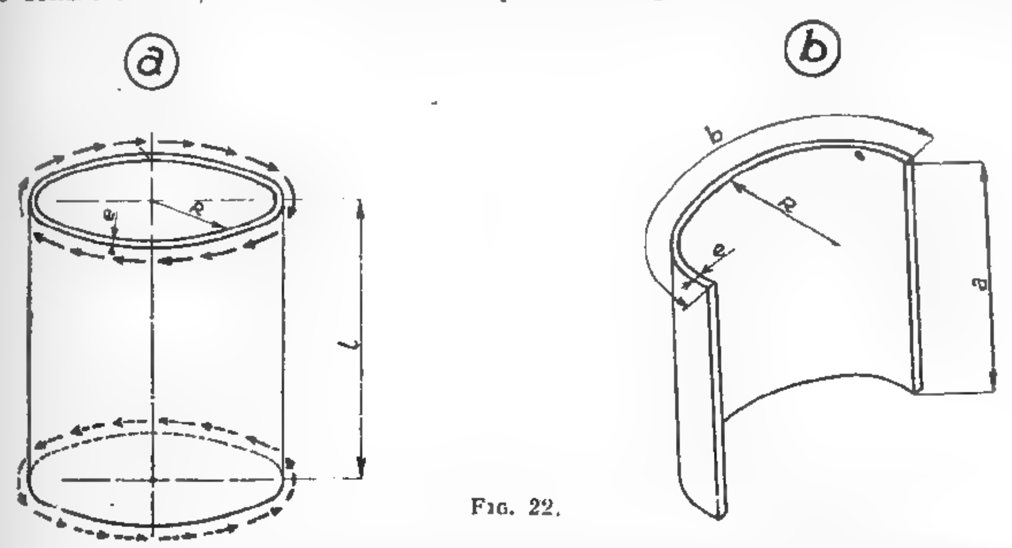


Fig. 22.

développement du tube (petite dimension l et coefficient K_s' voisin des coefficients K_s donnés ci-dessus dans le cas des plaques de grand allongement). Le second terme représente *l'action stabilisatrice de la courbure.*

1. — *Référence :* Luftfahrtforschung du 20-9-1936

4.422 *Flambage, par cisaillement, d'une paroi cylindrique.* — D'après Ebner [1], la contrainte critique est donnée par

$$t_c = \frac{t'_0}{2} + \sqrt{t''^2_0 + \left(\frac{t'_0}{2}\right)^2}$$

avec t'_0=contrainte critique de cisaillement de la plaque plane obtenue par développement de la paroi (§ **4.41** et fig. 22 *b*) ;
t''_0=contrainte critique de cisaillement du tube circulaire de même rayon R (§ **4.421**).

4.423 *Application numérique.* — Supposons que le panneau de fuselage-coque étudié au paragraphe 4.414, dans le cas où a=500 mm (solution 2) possède un rayon de courbure R=1,5 m.

Nous avons : t'_0=2,1 kg/mm² (§ **4.414**).

Pour calculer t''_0, adoptons pour K'_s la valeur moyenne

$$K_s' = \frac{9{,}1+5}{2} = 7{,}05$$

il vient, avec $l=a$=500 mm (§ **4.421**)

$$t_0'' = 7{,}05 \quad 7000 \left(\frac{1}{500}\right)^2 + 0{,}1 \cdot 7000 \frac{1}{1500} = 0{,}197 + 0{,}466 = 0{,}663 \text{ kg/mm}^2$$

d'où

$$t_0 = 1{,}05 + \sqrt{0{,}663^2 + 1{,}05^2} = 1{,}05 + 1{,}24 = 2{,}29 \text{ kg/mm}^2.$$

4.5 ÉTUDE THÉORIQUE D'UN PANNEAU PLAN ISOLÉ, APRÈS ÉTABLISSEMENT D'UN CHAMP DE TRACTION DIAGONALE.

La théorie exposée ci-après, sous forme de simples démonstrations géométriques, est, généralement, connue sous le nom de « *théorie des champs de traction* ».

Signalons que cette théorie peut se conduire, d'une manière particulièrement élégante, en utilisant la représentation géométrique des contraintes autour d'un point, connue sous le nom de « *cercle de* Mohr ».

4.51 Notations et analogie physique. — Considérons un panneau rectangulaire ABCD (fig. 23 *a*) soumis à une sollicitation en cisaillement engendrant une contrainte : $t>t_0$; c'est-à-dire un flux de cisaillement (force par unité de longueur du périmètre)

$$\tau > \tau_0 \qquad \text{avec} \quad \tau = \frac{t}{e} \quad \text{et} \quad \tau_0 = \frac{t_0}{e}$$

Pour nous placer, immédiatement, dans un cas général, nous désignerons par β *l'angle formé par la direction des plis avec l'encadrement*, cet angle étant mesuré selon l'indication de la figure 23 *b* [2].

En *cisaillement pur* nous aurons donc : β = 45°. Nous indiquerons pour chaque résultat les simplifications correspondantes des formules.

Nous savons, qu'après établissement du plissement, la tôle ne subit qu'une contrainte de traction pure suivant la direction des plis. Nous pourrons donc assimiler cette tôle à une *succession de bandes sans raideur transversale* telles que *mnpq* (fig. 23 *a*), analogues à des fils, ces bandes étant inclinées de l'angle β.

---

1. — *Référence :* Cahier aérotechnique, n° 47.

2. — Nous verrons, en effet, que la flexion, qui accompagne, généralement, le cisaillement, influe sur la valeur de β.

Le rôle de ces bandes sera de transmettre le *supplément de sollicitation* (au delà de la valeur critique)

$$t_1 = t - t_0 \qquad \text{soit} \qquad \tau_1 = \tau - \tau_0$$

donnant lieu à l'état de traction diagonale pure (§ 4.33).

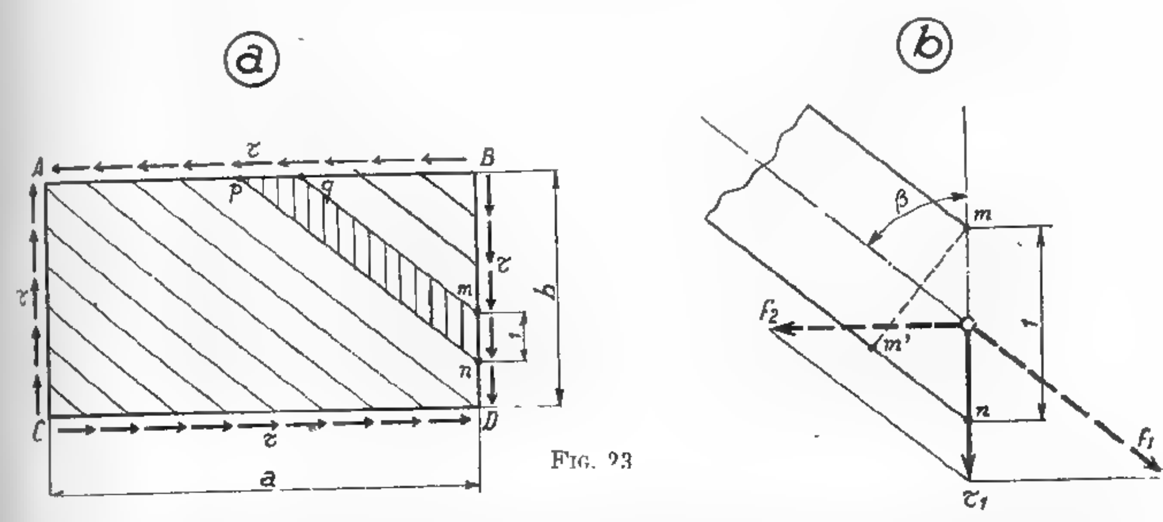


Fig. 23

4.52 Contrainte de traction de la tôle. — Isolons la bande de tôle *mnpq* et supposons, pour simplifier les notations, qu'elle intercepte sur le côté BD un segment $\overline{mn}$ de longueur égale à l'unité (1 mm par exemple, fig. 23 *b*). Cette bande reçoit donc, en traction diagonale pure, une force tangentielle

$$\tau_1 = \tau - \tau_0 = t_1 \; e.$$

Par hypothèse, elle ne peut opposer à cet effort qu'une *réaction dirigée* suivant son orientation. Il faut donc qu'un autre élément fournisse une autre direction de réaction. Ce ne peut être que *l'encadrement*, grâce à sa rigidité en flexion. Nous obtenons ainsi la décomposition de forces indiquée sur la figure 23 *b* :

force $f_1 = \dfrac{\tau_1}{\cos \beta}$ suivant la direction de la bande,

force $f_2 - \tau_1 \operatorname{tg} \beta$ normalement au côté BD.

La section droite de la bande envisagée a pour valeur

$$s = \overline{mm'} \cdot e = \overline{mn} \cdot e \,.\, \sin \beta = e \sin \beta.$$

La *contrainte de traction* est donc

$$n_{t_1} = \frac{f_1}{s} = \frac{\tau_1}{e \sin \beta \cos \beta} \,.$$

Or,

$$\frac{\tau_1}{e} = t_1 \qquad \text{et} \qquad \sin \beta \cos \beta = \frac{\sin 2\,\beta}{2} \;\text{donc}$$

$$n_{t_1} = \frac{2\; t_1}{\sin 2\,\beta} = 2\;\frac{t - t_0}{\sin 2\,\beta}\,.$$

C'est l'expression de la *contrainte de traction diagonale pure*, due au supplément de contrainte t_1 au delà de la contrainte critique. Notons que pour $\beta = 45°$, on obtient ($\sin 90° = 1$)

$$n_{t_1} = 2\; t_1 = 2\;(t - t_0).$$

A cette contrainte, il convient d'ajouter la *contrainte de traction due à la superposition de l'état critique de cisaillement pur* (fig. 21 *a*) qui est sensiblement égale à t_0 [1].

On a donc, suivant la direction des plis, une *contrainte de traction totale* de la tôle, connue sous le nom de *contrainte de traction diagonale*, ayant pour valeur approchée (défavorable)

$$n_{t_1} = t_0 + 2\frac{t - t_0}{\sin 2\beta}.$$

Pour $\beta = 45°$ on obtient (valeur exacte)

$$n_t = 2t - t_0.$$

La contrainte de traction diagonale est, dans ce cas, *égale au double de la contrainte totale, apparente, de cisaillement, diminué de la contrainte critique de cisaillement du panneau.*

4.53 Sollicitations supplémentaires des bordures.

4.531 *Efforts appliqués.*

a) *Côtés verticaux* AC *et* BD. — D'après ce que nous venons de voir, le côté BD est soumis à une succession de *forces normales uniformément réparties* f_2 *le sollicitant vers l'intérieur du panneau.* Ces forces ont pour valeur, *par unité de longueur,*

$$f_2 = \tau_1 \operatorname{tg} \beta$$

soit, en désignant par τ_0 le *flux de cisaillement critique :* $\tau_0 = t_0\, e$,

$$f_2 = (\tau - \tau_0) \operatorname{tg} \beta \quad \text{et pour } \beta = 45° \quad f_2 = \tau - \tau_0.$$

On démontre aisément que le côté AC est soumis à la même sollicitation dirigée symétriquement, c'est-à-dire *vers l'intérieur du panneau.*

b) *Côtés horizontaux* AB *et* CD. — A l'aide d'une décomposition de forces analogues à celle effectuée ci-dessus (fig. 23 *b*), on démontre que les côtés AB et CD sont également soumis à des sollicitations uniformément réparties, orientées vers l'intérieur du panneau et ayant pour intensité, par unité de longueur

$$f_3 = (\tau - \tau_0) \operatorname{cotg} \beta \quad \text{et pour } \beta = 45° \quad f_3 = \tau - \tau_0 = f_2.$$

4.532 *Conséquences.* — Avant l'établissement du champ de traction, le panneau était soumis au système de sollicitations représenté, figure 24 *a*. Après plissement, les bordures sont, *en supplément, sollicitées vers l'intérieur du panneau* par les systèmes de force réparties f_2 et f_3 (fig. 24 *b*).

Il est essentiel de bien remarquer que ces « *sursollicitations* » *des bordures forment, par elles-mêmes, un système en équilibre.* Sous leur action, *les éléments de bordure tendent à s'infléchir vers le centre du panneau, en prenant mutuellement réaction les uns sur les autres* (fig. 24 *c*).

1. — Cette contrainte n'est rigoureusement égale à t_0 que dans le cas où $\beta = 45°$ (cisaillement pur). Mais nous verrons ci-après que β s'écarte peu de cette valeur.

Il en résulte une *compression* et une *flexion* supplémentaires de ces éléments, évaluées ci-après.

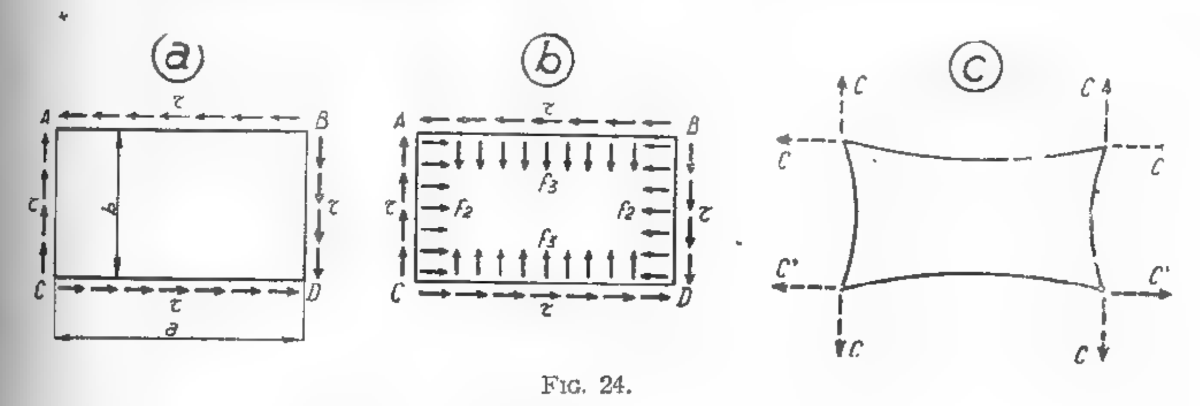


FIG. 24.

4.533 *Compression des bordures.*

a) Côtés verticaux AC *et* BD (de dimension b). Ils fournissent appui aux côtés horizontaux de dimension a, d'où un effort de compression

$$C = \frac{f_3 \cdot a}{2}$$

soit

$$\boxed{C = \frac{a}{2}(\tau - \tau_0)\ \text{cotg}\ \beta} \quad \text{et pour } \beta = 45° \quad \boxed{C = \frac{a}{2}(\tau - \tau_0).}$$

b) Côtés horizontaux AB *et* CD (de dimension a)

$$C' = \frac{f_2\, b}{2}$$

soit

$$\boxed{C' = \frac{b}{2}(\tau - \tau_0)\ \text{tg}\ \beta} \quad \text{et pour } \beta = 45° \quad \boxed{C' = \frac{b}{2}(\tau - \tau_0).}$$

Ces compressions se superposent à celles existant, éventuellement, par suite de la mise en charge du panneau (transport des forces τ).

4.534 *Flexion des bordures.* — Au milieu des éléments de bordure, supposés articulés aux quatre angles du panneau, l'on obtient les moments fléchissants maxima suivants :

Côtés verticaux (dimension b)

$$M_{max} = \frac{f_2\, b^2}{8}$$

soit

$$\boxed{M_{max} = \frac{b^2}{8}(\tau - \tau_0)\ \text{tg}\ \beta} \quad \text{et pour } \beta = 45° \quad \boxed{M_{max} = \frac{b^2}{8}(\tau - \tau_0).}$$

Côtés horizontaux (dimension a)

$$M'_{max} = \frac{f_3\, a^2}{8}$$

soit

$$\boxed{M'_{max} = \frac{a^2}{8}(\tau - \tau_0)\ \text{cotg}\ \beta} \quad \text{et pour } \beta = 45° \quad \boxed{M'_{max} = \frac{a^2}{8}(\tau - \tau_0).}$$

4.54 *Remarque.* — La théorie des champs de traction est souvent présentée en admettant que la tôle travaille exclusivement en traction diagonale après plissement, c'est-à-dire en supposant nuls les termes t_0 ou τ_0 des formules ci-dessus [1].

Cette approximation (défavorable) n'est acceptable que si la contrainte critique t_0 est très faible vis-à-vis de la contrainte de cisaillement réelle d'utilisation. Or, en pratique, avec les dimensions usuelles, la correction présentée ci-dessus ne peut être négligée.

4.6 DÉFORMABILITÉ EN CISAILLEMENT, APRÈS PLISSEMENT.

L'allure de la courbe expérimentale, donnée ci-dessus figure 18, met en évidence un *accroissement de la déformabilité* des panneaux sollicités en cisaillement, après apparition de leur instabilité.

Le phénomène a été étudié expérimentalement par WAGNER et LAHDE [2]. En faisant apparaître un *module d'élasticité transversal corrigé* G', après plissement, on constate que le rapport

$$\rho = \frac{G'}{G} = \frac{\text{module corrigé}}{\text{module initial}}$$

décroît très rapidement quand la contrainte t devient supérieure à t_0.

Ce rapport se stabilise ensuite vers une valeur moyenne, sensiblement égale à $\rho = 0{,}7$, quand la contrainte réelle devient supérieure à cinq fois la contrainte critique.

On pourra, en pratique, adopter cette valeur dans les calculs de déformation après plissement.

5. TRAVAIL DES TOLES MINCES SOUMISES SIMULTANÉMENT A DES SOLLICITATIONS NORMALES ET TANGENTIELLES AGISSANT DANS LEURS PLANS

5.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Les éléments minces sont, en pratique, rarement sollicités en cisaillement pur. Celui-ci est, en général, accompagné d'une *flexion* (cas des âmes de longerons) ou d'une *compression* ou *traction* (cas des panneaux de fuselages-coques non situés au niveau de l'axe neutre), ou encore d'une *compression* et *flexion combinées.*

Le phénomène d'instabilité se caractérise, comme pour le cisaillement pur, par l'apparition d'un « champ de plissement » oblique que l'on englobe encore sous le nom de « *traction diagonale* ». Les sollicitations complémentaires appliquées aux éléments d'encadrement se déterminent selon la méthode exposée d'une façon générale (β différent de 45°) au paragraphe 4.5.

Nous nous limiterons donc, ci-après, à l'étude du phénomène de flambage lui-même ; c'est-à-dire à la recherche des *contraintes critiques* et à la détermination de l'angle β formé par les vagues de plissement.

5.1 FLAMBAGE DES PLAQUES PLANES RECTANGULAIRES, SOUMISES A DES SOLLICITATIONS NORMALES ET TANGENTIELLES UNIFORMES.

5.11 **Condition de stabilité.** – Les résultats que nous exposons ci-après sont extraits d'une étude théorique et expérimentale due à WAGNER [1].

---

1. — C'est sous cette forme qu'est présentée la théorie de base due principalement à WAGNER.

2. — *Référence :* Luftfahrtforschung, vol. 13, n° 8, du 20-8-1936. Traduction : Cahier aérotechnique, n° 12.

3. — *Référence :* Luftfahrtforschung du 6-11-35. Traduction : Cahier aérotechnique, n° 17.

Ils concernent des plaques rectangulaires de grand allongement (en pratique $a/b \geqslant 2{,}5$) soumises aux conditions de liaisons marginales idéales suivantes : quatre côtés articulés ou quatre côtés encastrés.

Dans le cas général (fig. 25 *a*), la plaque est soumise à un cisaillement produisant une contrainte t et à deux sollicitations perpendiculaires dirigées en traction ou compression donnant lieu, respectivement, à une contrainte normale uniforme n_x dirigée dans le sens longitudinal et à une contrainte normale uniforme n_y dirigée dans le sens transversal. Les résultats ci-après supposent ces dernières contraintes positives en traction.

Un *cas particulier*, très fréquent, dans les applications, est celui où $n_y = 0$ (fig. 25 *b*).

La *condition de stabilité* s'exprime par

$$t > t'_0 \qquad \text{avec} \qquad t'_0 = \mathrm{K\ E}\left(\frac{e}{b}\right)^2$$

Fig. 25.

K étant un coefficient, tributaire des contraintes n_x et n_y, dont les expressions sont données **Planche 42** pour les deux cas de fixations mentionnés ci-dessus.

La Planche 42 donne un *abaque à points alignés* permettant un usage commode de ces formules qui seraient d'une utilisation numérique malaisée [1]. Le critère de stabilité considéré est donc la contrainte de cisaillement t qui accompagne les contraintes normales n_x et n_y. Dans le cas particulier de la figure 25 *b*, la droite d'alignement devra aboutir aux graduations de droite correspondant à $n_y/m = 0$.

Remarque. — Il est délicat de préconiser une règle à suivre dans un cas de fixations pratiques d'un panneau (fixations intermédiaires entre une articulation et un encastrement parfait). Dans le même esprit qu'au paragraphe **1.63**, on peut conseiller, pour un panneau appartenant à une structure continue de part et d'autre de ce panneau, d'adopter la moyenne arithmétique des deux valeurs lues sur l'abaque.

5.12 Application numérique.

5.121 *Données.* — Considérons, de nouveau, le panneau de fuselage-coque étanche envisagé au paragraphe **2.24**, soit

$$e = 1{,}25 \text{ mm}, \quad b = 150 \text{ mm}, \quad \mathrm{E} = 7.000 \text{ kg/mm}^2$$

d'où

$$m = 7.000\left(\frac{1{,}25}{150}\right)^2 = 0{,}486 \text{ kg/mm}^2.$$

1. — Le calcul de cet abaque est dû à M. F. Fontaine, ingénieur à la S.N.C.A.S.E.

5.122 *Stabilité sans pression intérieure.* — Dans ce cas, $n_y = 0$ et n_x est dû aux efforts généraux de flexion de la coque [1].

Cas a) : *n_x dirigé en compression.* Adoptons $n_x = -1{,}4$ kg/mm² (valeur inférieure à la contrainte critique en compression pure)

soit $$n_x/m = -1{,}4/0{,}486 = -2{,}86.$$

L'abaque donne (alignement $n_y/m = 0$ avec n_x/m) :

panneau articulé : K = 1,85,
panneau encastré : K = 5,65.

En adoptant $$K = 0{,}5\ (1{,}85 + 5{,}65) = 3{,}75$$

on a

$$t'_0 = 3{,}75 \cdot 0{,}486 = \mathbf{1{,}82\ kg/mm^2}.$$

Cas b) : *n_x dirigé en traction.* Adoptons $n_x = 7$ kg/mm², soit : $n_x/m = 14{,}4$. On trouve (alignements analogues au cas ci-dessus) :

panneau articulé : K = 19,7,
panneau encastré : K = 21,1.

En adoptant $$K = 0{,}5\ (19{,}7 + 21{,}1) = 20{,}4\ ;$$

on a donc

$$t'_0 = 20{,}4 \cdot 0{,}486 = \mathbf{9{,}9\ kg/mm^2}.$$

Ces résultats font ressortir l'influence stabilisatrice de la traction longitudinale n_x, considération importante dans l'étude des fuselages-coques.

5.123 *Stabilité avec pression intérieure.* — D'après paragraphe **2.24** les contraintes supplémentaires dues à la pression sont :

$$n_{t_1} = 4\ \text{kg/mm}^2 \quad \text{et} \quad n_{t_2} = n_y = 8\ \text{kg/mm}^2$$

d'où $$n_y/m = 16{,}5.$$

Pour obtenir la même contrainte critique de cisaillement que dans le cas *a*, il faudrait :

panneau articulé (alignement $n_y/m = 18{,}5$; K = 1,85) :

$$n_x/m = -9\ ;$$

panneau encastré (alignement $n_y/m = 18{,}5$; K = 5,65) :

$$n_x/m = -8{,}6.$$

Valeur moyenne : −8,8 d'où $n_x = -8{,}8 \cdot 0{,}486 = -4{,}3$ kg/mm².

La contrainte de compression admissible due à la flexion générale (valeur à comparer avec − 1,4 kg/mm² du cas *a*) vaut donc

$$-4{,}3 - 4 = \mathbf{-8{,}3\ kg/mm^2}.$$

Ce résultat fait ressortir (de même qu'au parag. **2.24**) l'influence stabilisatrice considérable de la pression intérieure sur les mailles comprimées d'une coque (la contrainte critique de compression devient environ 6 fois plus forte dans l'exemple considéré).

5.2 FLAMBAGE DES PLAQUES COURBES CYLINDRIQUES, SOUMISES A UN CISAILLEMENT ET A UNE COMPRESSION OU TRACTION UNIFORMES.

Pour les plaques de faible courbure (panneaux de fuselage-coques, par exemple) on pourra, défavorablement, utiliser les résultats du paragraphe

---

1. - On peut admettre que ces efforts généraux engendrent une contrainte longitudinale n_x constante sur le panneau envisagé, par suite de la faible grandeur de ce panneau vis-à-vis de la section totale de la coque.

précédent. C'est d'ailleurs ce que nous avons fait, implicitement, dans la précédente application numérique.

Pour des courbures plus importantes, nous reproduisons ci-dessous des formules dues à WAGNER et BALLERSTEDT [1] qui sont relatives à des plaques cylindriques de grand allongement, sollicitées longitudinalement en traction ou compression (c'est-à-dire sur les côtés galbés), en supplément à un cisaillement. Le schéma de principe est donc analogue à celui de la fig. 25 *b* (avec la dimension *b* galbée).

En posant :

$$u = \frac{n_x}{n_{c_0}} = \frac{\text{contrainte normale appliquée}}{\text{contrainte critique en compression pure}} \, .$$

$$v = \frac{t}{t_0} = \frac{\text{contrainte tangentielle appliquée}}{\text{contrainte critique en cisaillement pur}} \, .$$

la *condition de stabilité* s'exprime par :

a) si $u > o$ (compression + cisaillement) :

$$v \leqslant \sqrt{1-u} \, ;$$

b) si $u < o$ (traction + cisaillement) :

$$v \leqslant 1 - 0{,}5\, u.$$

5.3 FLAMBAGE DES PLAQUES PLANES RECTANGULAIRES, COMPRIMÉES, FLECHIES ET CISAILLÉES.

La *condition de stabilité* est traduite par l'abaque ci-dessous (fig. 25 *bis*) extrait de la publication américaine A.N.C.5.

Cet abaque fait apparaître les trois rapports :

$$\alpha = \frac{t}{t_0} = \frac{\text{contrainte de cisaillement}}{\text{contrainte critique en cisaillement pur}} \, .$$

$$\beta = \frac{n_f}{n_{f_0}} = \frac{\text{contrainte maximum de flexion}}{\text{contrainte maximum critique en flexion pure}} \, .$$

$$\gamma = \frac{n_c}{n_{c_0}} = \frac{\text{contrainte de compression (uniforme)}}{\text{contrainte critique en compression pure}} \, .$$

Connaissant deux de ces rapports on en déduit le troisième qui donne ainsi la sollicitation correspondante admissible sans plissement.

Cas particulier. — Un cas particulier, très fréquent, est celui où $n_c=0$: plaque soumise à un cisaillement et à une flexion pure (sans effort normal). On utilisera alors la courbe $\gamma=0$ qui est un arc de cercle d'équation.

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Application numérique [2].

Soit une âme de longeron de dimensions :

h=300 mm. (hauteur entre semelles) ;
d=200 mm. (distance entre montants) ;
e=2.5 mm.
en duralumin (E=7000 kg/mm²).

En flexion pure, le côté chargé étant la dimension *h* on a, d'après le paragraphe 3.2 :

$$n_{f_0} = 30 \cdot 7000 \left(\frac{2.5}{300}\right)^2 = 14{,}6 \text{ kg/mm}^2.$$

1. — *Référence* : Luftfahrtforschung du 20-9-1936.

2. — Nous donnerons ci-après (§ 6.73) une autre application numérique, présentée sous une forme d'utilisation plus directe.

En cisaillement pur, la petite dimension étant d, on a, d'après l'abaque de la planche 40 :

$$t_0 = 9{,}9 \text{ kg/mm}^2.$$

Envisageons une contrainte maximum de flexion (au niveau des semelles) :

$$n_f = 10 \text{ kg/mm}^2$$

d'où :

$$\beta = \frac{10}{13{,}3} = 0{,}751.$$

Le plissement aura lieu pour une contrainte de cisaillement t, telle que :

$$\alpha = \frac{t}{t_0} = 0{,}66 \qquad \text{(abaque)}$$

soit :

$$t = 0{,}66 \cdot 9{,}9 = 6{,}54 \text{ kg/mm}^2.$$

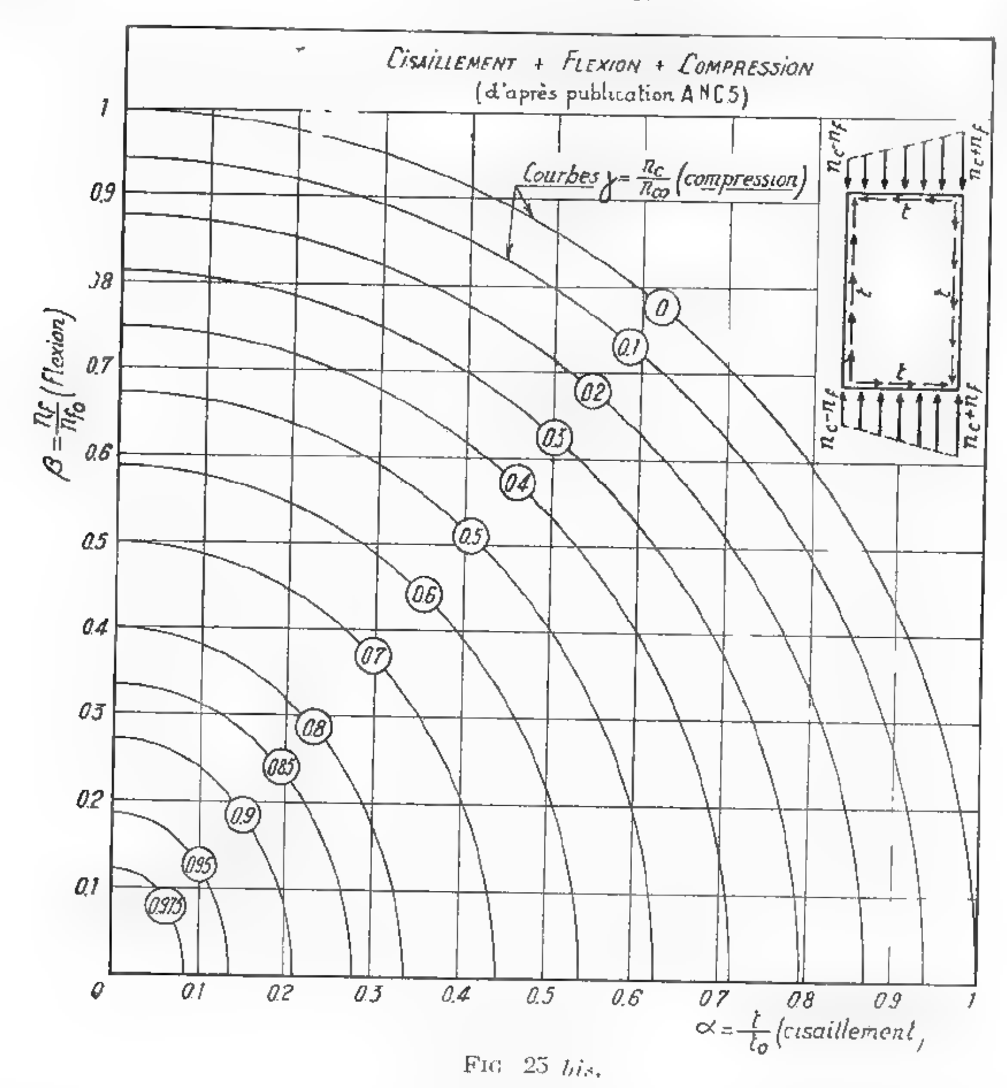


Fig. 25 *bis*.

5.4 CARACTERISTIQUES DU PHENOMENE DE PLISSEMENT.

Ainsi que nous l'avons indiqué ci-dessus, l'instabilité se manifeste par un *champ de plissements obliques*.

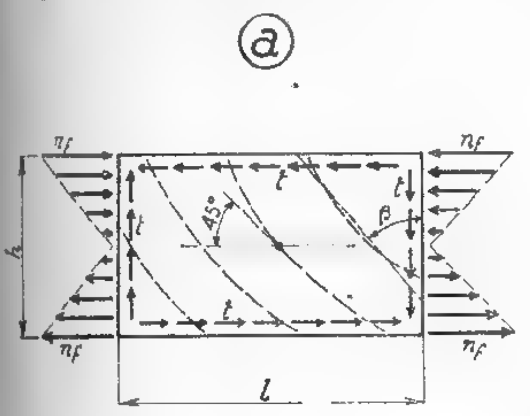
L'allure de ces plissements s'étudie théoriquement (à l'aide du cercle de Mohr) et expérimentalement.

On constate que les plis conservent, vers le milieu des panneaux, une orientation voisine de 45°. Ils tendent, par contre, à s'infléchir tangentiellement aux membrures tendues et perpendiculairement aux membrures

comprimées par les sollicitations normales exercées avec le cisaillement.

La figure 26 *a* représente l'allure théorique des plis obtenus pour une sollicitation en flexion + cisaillement.

En fait, cette allure se trouve influencée par les conditions locales propres à chaque cas particulier.



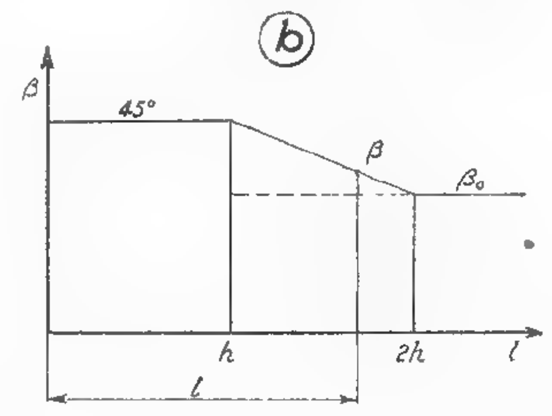


Fig. 26.

Règles pratiques en flexion + cisaillement. — On a établi, expérimentalement, les règles suivantes qui réduisent le problème à celui de « plis linéaires équivalents » inclinés d'un angle β par rapport aux côtés où s'exerce la sollicitation en flexion [1].

En désignant par l et h les deux dimensions du panneau (fig. 26 *b*) on obtient

a) si $l<h$ $\quad\beta \approx 45°$

b) si $l>2\,h$ $\quad$ l'angle β est défini par la relation théorique :

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\,\beta = 2\,\frac{t}{n_f}}$$

en désignant par n_f la contrainte maximum de flexion et par t la contrainte de cisaillement.

c) si $h<l<2\,h$, on peut admettre une variation linéaire de β entre 45° et la valeur β_0 trouvée par la formule ci-dessus pour $l=2h$.

On a donc (voir fig. 26 *b*)

$$\beta = 45° - (45° - \beta_0)\,\frac{l-h}{h}$$

Remarques.

En pratique, le cas *b*) est peu fréquent et l'on obtient rarement, dans ce cas, un angle β inférieur à $\frac{45°}{2} = 22°30'$ qui correspond à un rapport

$$2\,\frac{t}{n} = 1 = 2\,\frac{t_a}{n_a}$$

en désignant par t_a et n_a les contraintes normale et tangentielle admissibles.

L'angle β varie donc, pratiquement, entre 22°30' et 45°. Remarquons que la *valeur β = 45° introduit de telles simplifications dans les calculs qu'on l'adopte souvent, d'une façon générale, pour tous les calculs de dimensionnement.*

1. — *Référence :* Calcul théorique et pratique des constructions en tôle mince, par J. Dupin (E. N. S. A., juillet-août 1937).

De nombreuses théories, en particulier celles de WAGNER, sont conduites en utilisant exclusivement cette valeur $\beta = 45°$.

6. CALCUL PRATIQUE D'UN LONGERON MÉTALLIQUE A AME MINCE APRÈS INSTABILITÉ DE L'AME

6.0 REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Le calcul des *longerons à âmes minces* constitue l'une des applications principales des théories ci-dessus.

Nous avons étudié, au chapitre IX, paragraphe **7.**, les principes de dimensionnement rapide de ces longerons, sans tenir compte des efforts complémentaires dus, éventuellement, au plissement de leurs âmes. Nous verrons, cependant, que les simplifications qui ont été apportées, lors de cette étude, aux théories générales de la flexion des poutres, sont dues en majeure partie à ce phénomène d'instabilité.

L'objet de l'étude ci-après est de chiffrer pratiquement les « sursollicitations » qui découlent du plissement.

Signalons que cette question a fait l'objet de nombreuses études donnant lieu à des calculs matériels plus ou moins complexes.

On s'est, notamment, beaucoup appuyé sur les résultats d'expériences exécutées par LAHDE et WAGNER [1]. Ces résultats permettent d'apporter aux sollicitations complémentaires correspondant à la théorie des champs de traction pure, des « *coefficients correcteurs* » traduisant l'influence des rigidités locales au voisinage des éléments de bordure des panneaux.

Or, ces coefficients ne peuvent être obtenus, en pratique, qu'en extrapolant largement les résultats expérimentaux de base.

Ceux-ci ont, en effet, porté sur des tôles de très faible épaisseur (tôles de laiton de 0,1 à 0,4 mm) soumises à des conditions de fixation idéales et présentant des contraintes critiques très faibles ($t_0 < 0,5$ kg/mm²). Le rapport t/t_0, correspondant à ces essais est, par suite, considérablement supérieur à ceux rencontrés en construction usuelle. Nous ne reproduirons donc pas ces résultats.

La méthode que nous proposons est conforme à celle préconisée par le S. T. Aé [2]. Elle se trouve en accord avec les principes théoriques exposés ci-dessus au paragraphe **4.5**.

Afin de la rendre plus concrète, nous effectuerons, au paragraphe **6.7**, une application numérique complète.

Cette méthode se généralise aisément aux différents types de construction en tôle mince (fuselage coques, par exemple), ainsi que nous le verrons ci-après (§ **6.8** et chapitre XXII).

6.1 DONNÉES DU PROBLÈME (fig. 27).

Considérons un longeron composé de deux *semelles* concentrées AB et CD et d'une *âme* d'épaisseur mince e, raidie par des *montants*, tels que EF, GH, KL...

Pour nous placer dans un cas usuel, nous supposerons que les semelles convergent longitudinalement, sous un angle α, cet angle étant suffisamment faible pour que l'on puisse confondre sa mesure, en radians, avec sa tangente et pour que l'on puisse, pratiquement, assimiler les panneaux d'âme à des rectangles (cas d'un longeron d'aile, par exemple). Nous supposerons également l'âme non ajourée.

Dans une section courante, située au milieu de l'un des panneaux de largeur l (intervalle entre montants), nous désignerons par :

M le moment fléchissant
T l'effort tranchant total } évalués au coefficient de calcul à la rupture

1. — *Référence :* Luftfahrtforschung du 20-8-1936. Traduction : Cahier aérotechnique, n° 42

2. — *Référence :* Note n° 26 S. T. Aé/E. G. du 20-2-1944.

h la hauteur apparente de l'âme (distance entre ses fixations aux semelles) ;

h' la distance entre les centres de gravité des semelles (hauteur équivalente de l'âme, voir chap. IX, § 3.75 et 7.3).

L'effort tranchant réduit T' agissant en cette section est donné, avec les conventions de signes indiquées sur la figure 27, par expression

$$T' = T - \frac{M}{h} \cdot \text{tg } \alpha$$

(chap. IX, § 3.84 et 7.32).

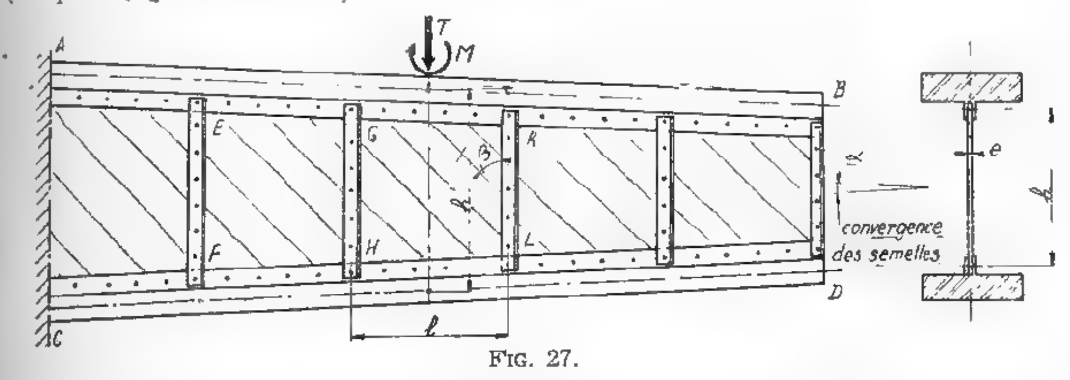


FIG. 27.

6.2 RÉPARTITION DES CONTRAINTES DE L'AME, DANS LES SECTIONS DROITES DU LONGERON.

6.21 Avant plissement de l'âme. — L'ensemble de la poutre (âme et semelles) forme alors un *corps homogène* auquel on peut appliquer intégralement les formules de la flexion plane.

Un élément d'âme situé à une distance z de l'axe neutre (fig. 28 *a*) est donc soumis à :

une contrainte normale (flexion) $n = \frac{M}{I} z$,

une contrainte tangentielle (cisaillement) $t - \frac{T'}{I} \frac{W}{e}$

avec, dans la section droite considérée :

I = moment d'inertie de l'ensemble semelles-âme,
W = moment statique, par rapport à l'axe neutre, de la partie de section située d'un même côté de l'élément envisagé.

Les *contraintes normales de l'âme* sont donc réparties selon la fig. 28 *b*. L'âme supporte une partie du moment fléchissant, car les forces correspondant à cette distribution engendrent un moment par rapport à l'axe neutre.

La répartition des *contraintes tangentielles* se fait selon l'allure représentée, également, figure 28 *b*. Nous avons vu au chapitre IX, §§ 3.73 et 7.31, qu'on peut, en pratique, confondre la courbe correspondante avec la droite moyenne donnée par [1]

$$t - \frac{T'}{h'e}$$

c'est-à-dire admettre un flux de cisaillement constant : $\tau = \frac{T'}{h'}$ avec h' = *hauteur équivalente de l'âme* (distance entre les centres de gravité des semelles, voir chap. IX, § 7.2).

1. — L'uniformité de cette répartition n'est, dans ce cas, qu'une simple hypothèse simplificatrice.

6.22 Instabilité de l'âme. — A un certain « coefficient de charge » la combinaison des contraintes n et t donne lieu à une *instabilité* de l'âme qui se manifeste par un plissement oblique incliné d'un angle β (§ **5.** : panneau de dimensions l et h).

Nous conviendrons de désigner par t'_0 la valeur particulière de t qui correspond à cet *état critique sous charges combinées.* A cette valeur correspond un *flux critique* : $\tau'_0 = t'_0 \cdot e$ (voir Application numérique, § **6.73**).

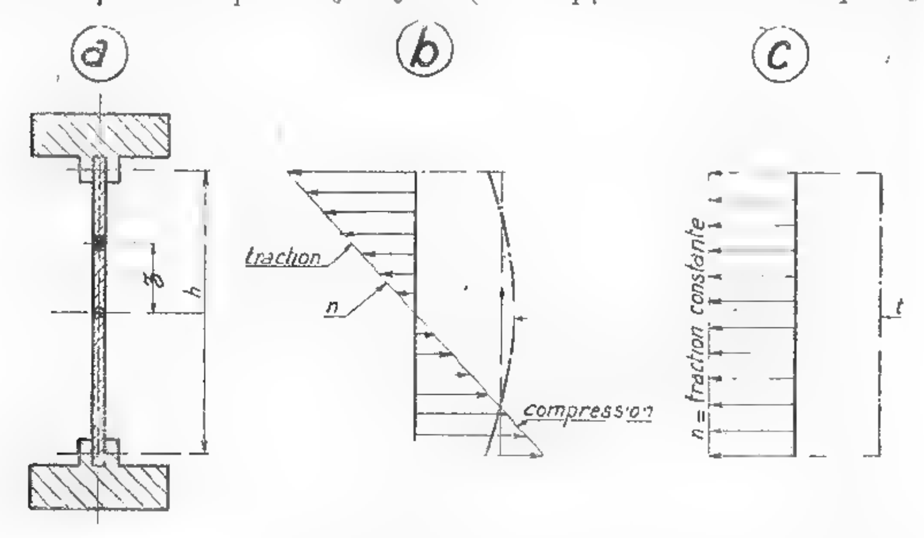


Fig. 28.

6.23 Après plissement de l'âme. — Au delà de la charge critique, les bords du panneau sont soumis à un *flux uniformément réparti* d'intensité

$$\tau = \frac{T'}{h'}.$$

De plus, l'âme ne subit, dans une même section, qu'une *contrainte normale constante,* dirigée en *traction* et ayant pour valeur

$$n = \frac{f_2}{e} = (t - t'_0) \text{ tg } \beta$$

(voir § **4.531**) [1].

Nous obtenons donc un *diagramme de contraintes normales* selon la figure 28 c. Ces contraintes étant toutes orientées dans le même sens (traction), elles ne peuvent donc pas équilibrer de moment.

6.24 Conclusion. — *Après instabilité, l'âme ne participe plus, effectivement, à la transmission du moment fléchissant. On doit donc calculer l'inertie de la poutre en négligeant la section de l'âme.*

6.25 Remarques. — *a*) Cette conclusion s'accorde avec l'hypothèse simplificatrice conseillée au chapitre IX, § **7.**, pour le calcul de I.

b) En fait, une partie de l'âme se trouve stabilisée au voisinage des semelles. On pourra donc, néanmoins, intéresser une certaine bande d'âme au niveau de celles-ci. On admet généralement que leur largeur est égale à la « largeur équivalente » des tôles minces comprimées (§ **2.45**), soit, d'après Karman

$$c = 0{,}95\ e \sqrt{\frac{E}{n_f}}.\ [2]$$

1. — Les forces qui correspondent à cette contrainte engendrent la sollicitation uniforme f_2 des bordures.

2. — On pourra pratiquement, en première approximation, adopter $c = 15\ e$.

Il est évident que dans le cas de semelles importantes, la section supplémentaire ainsi déterminée reste négligeable, en pratique, pour le calcul de l'inertie de l'ensemble des sections du longeron.

c) Les méthodes de calcul exposées au chapitre IX, paragraphe **7.**, restent donc valables, pour la détermination des contraintes dues aux efforts généraux. Il nous reste à évaluer les *contraintes complémentaires* dues au phénomène de plissement.

6.3 CALCUL DE LA TOLE D'AME.

Pour vérifier la tôle d'âme, il y a lieu de tenir compte de *l'affaiblissement de résistance dû aux trous de rivets*. Nous désignerons par P le pas de rivetage et par d le diamètre des rivets de la liaison âme-semelles (qui crée, d'une façon générale, un affaiblissement supérieur à la liaison âme-montants). Dans le cas d'une liaison par soudure électrique par points on prendra pour les tôles d'AU4G

$$d = 0{,}6\ d'$$

avec d' = diamètre du point (voir chap. VIII, § **6.4**).

Condition de cisaillement. — De même qu'avant plissement il convient de vérifier la condition de cisaillement donnée par

$$\boxed{t \leqslant t_a \left(1 - \frac{d}{P}\right)} \qquad \text{avec} \qquad t = \frac{T'}{h'e}$$

en désignant par t_a la contrainte de cisaillement pur admissible (égale à $0{,}5\ n_a$, avec n_a = contrainte de traction admissible).

Condition de traction. — La contrainte de traction diagonale n_t (trous non déduits) est donnée par la formule du paragraphe **4.52**, soit, dans le cas général

$$n_t = t'_0 + 2\ \frac{t - t'_0}{\sin 2\ \beta}.$$

Nous admettons que l'affaiblissement de la tôle est mesuré par le rapport (fig. 29)

$$\rho = \frac{DC}{BC} = \frac{P\cos\beta - d}{P\cos\beta} = 1 - \frac{d}{P\cos\beta}.$$

On devra donc vérifier la condition

$$\boxed{n_t \leqslant \rho\ n_a}$$

soit, dans le cas d'un angle $\beta = 45°$

$$\boxed{2\ t - t'_0 \leqslant n_a \left(1 - \frac{d\sqrt{2}}{P}\right).}$$

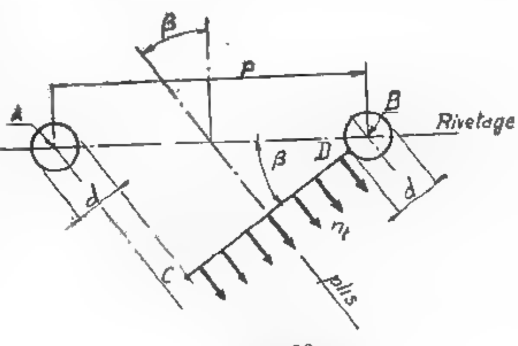


Fig. 29.

Remarque. — D'après les résultats expérimentaux de Lahde et Wagner, il convient d'observer une certaine prudence pour le dimensionnement de l'âme qui peut, en réalité, supporter des contraintes plus élevées que les contraintes théoriques, notamment aux angles des panneaux.

Il semble que, pour les valeurs usuelles de $\frac{t}{t'_0}$ (soit environ 2 à 4), il convienne de se réserver une marge de sécurité de l'ordre de 20 % (voir Application numérique, § **6.75**).

6.4 CALCUL DU RIVETAGE AME-SEMELLES.

Avant plissement, les rivets ne sont soumis qu'à des efforts dirigés parallèlement aux semelles (dûs au glissement longitudinal de flexion). Avec l'approximation admise ci-dessus, en ce qui concerne le taux de cisaillement moyen de l'âme (§ **6.21**), ils assurent donc la transmission d'un effort:

$$\tau = \frac{T'}{h'}$$

par unité de longueur du rivetage. C'est ce que nous avions indiqué au chapitre IX, paragraphe **8.3**.

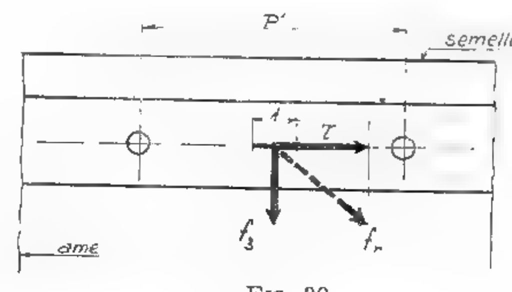


FIG. 30.

Après plissement, nous avons vu que la tôle « tire sur ses bordures ». On obtient le long des semelles, qui matérialisent les bordure AB et CD du panneau étudié au paragraphe **4.531**, un effort par unité de longueur

$$f_3 = (\tau - \tau'_0) \text{ cotg } \beta \qquad (\text{avec } \tau'_0 = t'_0\ e).$$

Les rivets sont sollicités par la résultante f_r de τ et de f_3, soit (fig. 30)

$$f_r = \sqrt{\tau^2 + f^2_3}$$

(force par unité de longueur),

Si l'on désigne par R la *charge admissible à rupture* pour un rivet [1] on doit donc avoir un « pas résistant » P' du rivetage [2], tel que

$$\boxed{P' f_r < R}$$

Dans le cas où $\beta = 45°$, on obtient la relation directe

$$\boxed{P' \sqrt{\tau^2 + (\tau - \tau'_0)^2} < R}$$

Remarquons que, dans ce cas, une *valeur défavorable* de P' est donnée par la relation simple

$$P' = \frac{R}{\tau \sqrt{2}}$$

(valeur obtenue en supposant $\tau_0' = 0$).

1. — La charge R peut être : soit la résistance au cisaillage d'une section de rivet (simple cisaillage), soit la résistance de deux sections (double cisaillage), soit, enfin, la force admissible au mâtage de la tôle d'âme sur le rivet si ce critère prédomine (ch. VIII, § **7.**).

2. — Le pas résistant P' est égal au pas apparent P, pour un rivetage à une rangée, et à la moitié de ce pas pour un rivetage à deux rangées identiques, etc... (Voir ch. IX, § **8.1**).

6.5 CALCUL DES SEMELLES.

6.51 Sollicitations avant plissement. — La contrainte de flexion n_f est donnée par la formule courante

$$n_f = \frac{M}{\left(\frac{I}{r}\right)}.$$

Nous avons vu, au chapitre IX, paragraphe **7.2**, que l'on peut, en pratique, assimiler le moment fléchissant M à deux composantes

$$F = \pm \frac{M}{h'}$$

agissant en *traction* ou *compression uniformes* dans chaque section droite des semelles.

Cette approximation se justifie d'autant plus que l'âme est mince et elle devient encore plus voisine de la réalité si l'âme est instable (puisqu'elle ne participe effectivement plus à la résistance en flexion).

6.52 Compression supplémentaire. D'après ce que nous avons vu au paragraphe **4.533**, chaque semelle supporte, par suite du plissement de l'âme dans un panneau de hauteur h (fig. **24**) une *force de compression supplémentaire*

$$\boxed{C' = \frac{h}{2}(\tau - \tau'_0) \ \mathrm{tg}\ \beta}$$

On obtient donc, finalement, les *efforts normaux résultants* suivants (en valeurs absolues)

semelle comprimée par la flexion générale :

$$N_c = F + C';$$

semelle tendue par la flexion générale :

$$N_t = F - C'$$

d'où les *contraintes normales*, uniformes dans une même section droite de surface S d'une semelle [1]

$$n_c = \frac{N_c}{S} \qquad \text{et} \qquad n_t = \frac{N_t}{S}.$$

Dans le *cas particulier* où $\beta = 45°$, on obtient

$$\boxed{C' = \frac{h}{2}(\tau - \tau'_0).}$$

Si l'on néglige le flux critique τ_0' devant le flux réel τ et si l'on assimile h' à h, l'on obtient l'expression approchée simple

$$\boxed{C' = \frac{T'}{2}.}$$

L'effort de compression supplémentaire est sensiblement égal à la moitié de l'effort tranchant réduit. C'est le résultat approché que l'on utilise généralement, dans les calculs rapides.

1. — La section S des semelles pourra être évaluée en tenant compte d'une largeur d'âme intéressée c (Voir paragr. suivant et fig. 31 *b*).

6.53 Flexion supplémentaire. — Nous savons, qu'après établissement du champ de traction, chaque semelle est sollicitée vers l'intérieur des panneaux par une charge par unité de longueur (§ **4.53**).

$$f_3 = (\tau - \tau'_0) \text{ cotg } \beta.$$

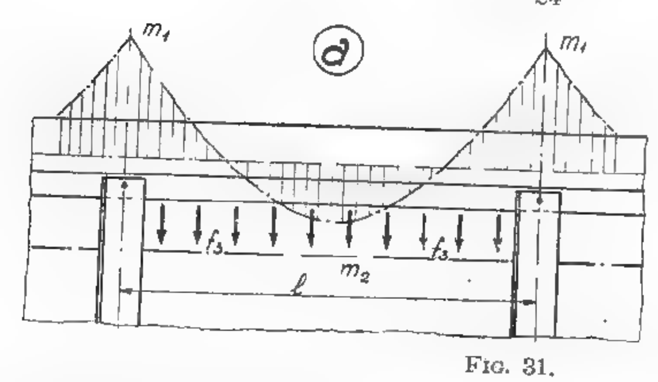
Une semelle se comporte, à cet égard, comme une poutre continue reposant sur N appuis constitués par les montants. Il est suffisant, en pratique, d'assimiler chaque travée à une poutre bi-encastrée (par continuité) d'où les expressions suivantes des moments maxima (chap. XVIII, § **4.45** et fig. **31** *a*) :

au niveau des montants (moment max. maximorum).

$$m_1 = -\frac{f_3 l^2}{12};$$

au milieu des panneaux

$$m_2 = \frac{f_3 l^2}{24}.$$



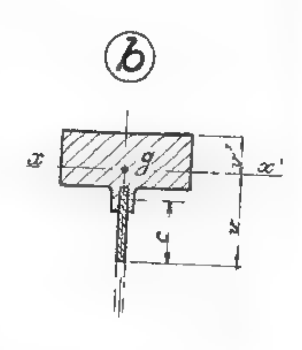


Fig. 31.

Chaque semelle résiste à ces « *moments secondaires* » par *flexion isolée*. On pourra, cependant, intéresser avec elle une bande d'âme dont la largeur *c* est généralement admise égale à la largeur équivalente en compression (§ **2.45**).

(soit : $c = 15\ e$, en première approximation).

Désignons par $\left(\frac{i}{v}\right)$ et $\left(\frac{i}{v'}\right)$ les modules d'inertie de la semelle qui correspondent à cette flexion secondaire autour de l'axe neutre xx' (fig. **31** *b*).

On obtient les *contraintes supplémentaires* maxima suivantes qui sont atteintes au niveau des montants :

$$n_{cs} = \frac{m_1}{\left(\frac{i}{v}\right)} \qquad \text{(compression côté intérieur)}$$

$$n_{t_1} = \frac{m_1}{\left(\frac{i}{v'}\right)} \qquad \text{(traction côté extérieur.)}$$

Cas particulier. — Pour $\beta = 45°$, nous savons que

$$f_3 = \tau - \tau'_0 = \frac{T'}{h'} - \tau'_0.$$

En négligeant $\tau_0' = t_0'e$, on obtient la valeur défavorable utilisée en première approximation

$$\boxed{m_1 = \frac{T'\ l^2}{12\ h'}} \qquad \text{(valeur absolue).}$$

6.54 Contraintes résultantes.

Semelle comprimée : $n_r = n_c + n_{c1}$;
Semelle tendue : $n'_r = n_t + n_{t1}$.

6.6 CALCUL DES MONTANTS (OU RAIDISSEURS).

6.60 Remarques préliminaires. — Nous désignerons par *montant courant* un montant non situé en bordure du longeron (*montant extrême*) et non chargé de transmettre à l'âme une charge concentrée extérieure importante (*montant d'introduction de charge*).

Les montants sont réalisés par des profilés laminés ou étirés, ouverts ou fermés, situés d'un seul côté ou bien de part et d'autre de l'âme.

Leur liaison directe aux semelles n'est pas obligatoire quoique celle-ci assure une meilleure transmission des efforts. Ils sont reliés à la tôle d'âme par rivetage (ou soudure par points).

Leurs contraintes admissibles sont généralement conditionnées par leur tenue au *flambage local* et au *flambage général*. On peut admettre, sur ce dernier point, que le flambage ne peut tendre à avoir lieu que dans le sens perpendiculaire à la tôle d'âme (celle-ci assurant un appui efficace dans son plan).

6.61 Calcul des montants avant plissement de l'âme. — Avant plissement de l'âme, un *montant courant* ne subit, théoriquement, aucune charge, puisque chaque panneau travaille en cisaillement pur. Cependant, la présence de ces montants est précisément nécessaire pour fragmenter l'âme en panneaux suffisamment étroits pour qu'ils ne plissent pas. On s'impose même souvent, pour certaines constructions (structures-caissons en particulier) un pas l, tel que les panneaux d'âme restent stables jusqu'aux charges maxima de calcul, afin d'éviter, notamment, les sursollicitations des semelles, étudiées ci-dessus.

Le rôle des montants est alors d'avoir une *rigidité de flexion* suffisante pour que *l'ensemble de l'âme* (tôle + montants) admette une contrainte critique de flambage supérieure à la contrainte réelle de cisaillement de l'âme.

Cet ensemble constitue une *plaque plane raidie* (ou plaque orthotrope). La théorie de la stabilité de ces éléments montre que leur *contrainte critique de cisaillement* est donnée par l'expression [1]

$$t_c = \frac{33\ \mathrm{E}}{b^2 \cdot e} \sqrt[4]{\left(\frac{\mathrm{I}_1}{a}\right)^3 \cdot \frac{\mathrm{I}_2}{b}}$$

avec : a et b = côtés du panneau raidi, e = épaisseur de la tôle ;
I_1 = moment d'inertie d'une section du panneau raidi parallèle au côté a ;
I_2 = moment d'inertie d'une section du panneau raidi parallèle au côté b (ces moments d'inertie étant relatifs aux axes d'inertie parallèles à la tôle d'âme).

Dans le cas qui nous occupe, c'est-à-dire dans celui d'une *âme raidie verticalement*, on a donc, avec nos notations précédentes

$$t_c = \frac{33\ \mathrm{E}}{h^2 \cdot e} \sqrt[4]{\left(\frac{\mathrm{I}_1}{l}\right)^3 \cdot \frac{e^3}{12}}.$$

avec I_1 = moment d'inertie d'un raidisseur et de la tôle d'âme entre raidisseurs (largeur l) par rapport à un axe passant par le centre de gravité de cet ensemble et parallèle à l'âme

et l'on doit avoir $t < t_c$ avec $t = \frac{\mathrm{T}'}{h' e}$

1. — *Référence* : WAGNER et LAHDE. Luftfahrtforschung, vol. 13, n° 8, 20-8-1936 (Cahier aérotechnique, n° 42).

Cette condition permet de vérifier si les montants sont suffisamment *rigides*.

Application numérique. — Ame en duralumin AU4G ; $E=7000$ kg/mm² ; $e=3{,}2$ mm ; $h=500$ mm. On désire tenir, sans plissement diagonal de l'âme, une contrainte de cisaillement $t=15$ kg/mm².

Cette condition impose un intervalle l entre montants (petit côté de chaque panneau) au plus égal à 183 mm [1]. Nous adopterons :

$$l=180 \text{ mm.}$$

Déterminons l'inertie à donner aux montants. On doit avoir, à la limite :

$$15=\frac{33\cdot 7000}{500^2\cdot 3{,}2}\sqrt[4]{\left(\frac{I_1}{180}\right)^3\frac{3{,}2^3}{12}} \quad \text{soit} \quad 15=0{,}289\sqrt[4]{I_1^3\cdot 46{,}9\cdot 10^{-3}}$$

$$15=0{,}756\cdot 10^{-2}\, I_1^{3/4} \quad \text{d'où} \quad I_1=\sqrt[3]{\left(\frac{1500}{0{,}756}\right)^4}=25000 \text{ mm}^4.$$

Il faut donc

$$I_1 \geqslant 25000 \text{ mm}^4.$$

Deux cornières standard de $25\times 25\times 2$ disposées symétriquement par rapport à l'âme donnent un moment d'inertie évalué, dans ce cas particulier de montant symétrique, par rapport à l'axe xx' de la tôle d'âme (fig. 32) :

$$I_1=I_{xx'}=2\cdot 5790+2\cdot 96{,}9\cdot 8{,}6^2+\frac{180}{12}\cdot 3{,}2^3=26370 \text{ mm}^4.$$

Ce type de montant satisfait donc à la condition recherchée.

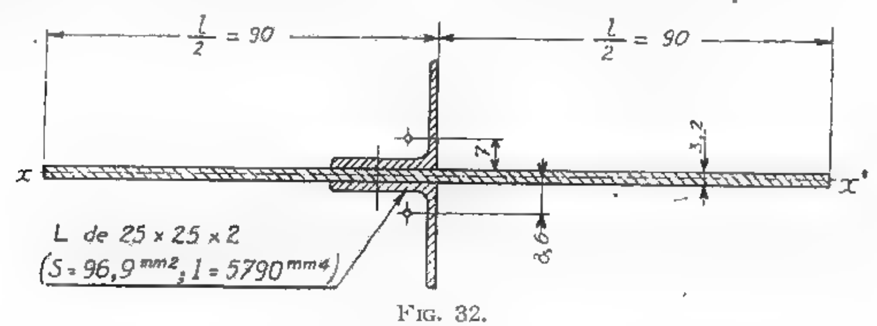


FIG. 32.

Remarques. — *a) Cette condition de stabilité d'ensemble de l'âme raidie doit être satisfaite dans tous les cas, même si l'âme plisse entre les montants.*

b) On peut appliquer la formule générale ci-dessus au cas de *raidisseurs longitudinaux* se substituant aux montants (solution adoptée sur certaines âmes de caissons, ainsi que sur leurs semelles).

c) Il est toujours préférable, pour des âmes très chargées, d'utiliser pour montants des *profilés disposés symétriquement*, comme dans l'application ci-dessus. Des cornières à boudins de raidissement (situés vers l'extérieur) ou des profilés genre Ω assurent également une meilleure stabilisation que des cornières simples.

La condition ci-dessus guide donc, pratiquement, le choix du *type* de montants (ou raidisseurs).

6.61 Calcul d'un montant courant, après plissement de l'âme.

6.620 *Notations.* — Considérons un montant courant AB (fig. 33 *a*) séparant deux panneaux d'âme 1 et 2, de largeurs l_1 et l_2 et de hauteurs équivalentes moyennes h'_1 et h'_2 (§ **6.21**).

---

1. — Ce résultat s'obtient *Planche* 40, diagramme 2, en partant de $t_0=15$, $e=3{,}2$ et en recherchant par approximations la valeur de b satisfaisant au rapport b/a.

Désignons, dans chacun des panneaux, par :

T'_1 et T'_2 les efforts tranchants réduits moyens,
τ_1 et τ_2 les flux de cisaillement ($\tau_1 = T'_1/h'_1$ et $\tau_2 = T'_2/h'_2$),
t'_{01}, τ'_{01} et t'_{02}, τ'_{02} les contraintes et flux critiques (§ **6.22**),
β_1 et β_2 les angles des plis.

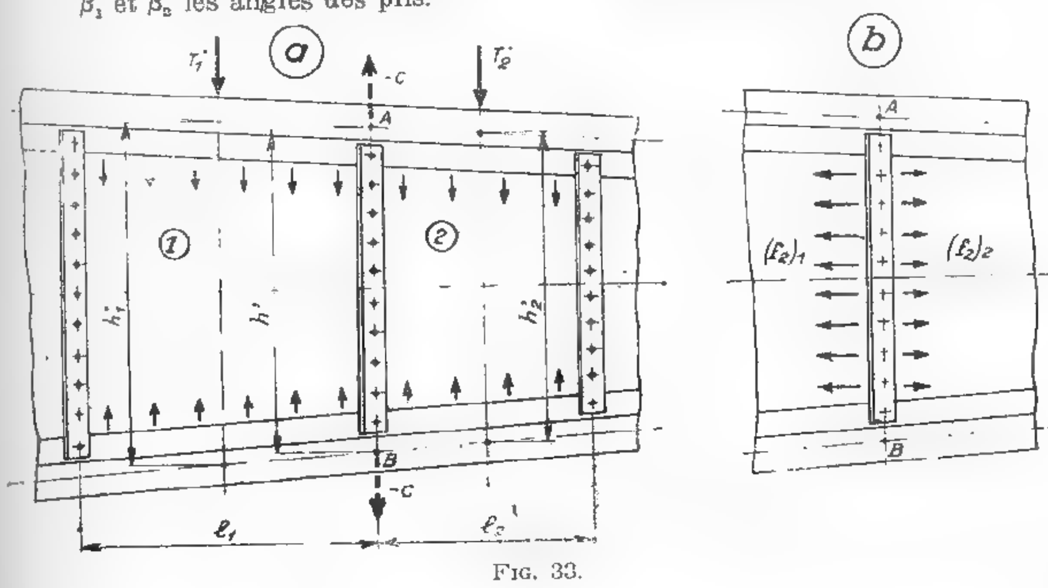


FIG. 33.

6.621 *Effort de compression.* — D'après ce que nous avons vu au paragraphe **4.533**, le montant qui fournit aux semelles des réactions d'appui nécessaires à leur flexion secondaire, subit un effort de compression donné, dans le *cas général* ci-dessus, par

$$C = C_1 + C_2 = \frac{l_1}{2}(\tau_1 - \tau'_{01}) \operatorname{tg} \beta_1 + \frac{l_2}{2}(\tau_2 - \tau'_{02}) \operatorname{tg} \beta_2.$$

Cas particuliers. — *a*) Si $\beta_1 = \beta_2 = 45°$ et si, de plus $l_1 = l_2 = l$ (cas très fréquent), l'on obtient

$$C = \frac{l}{2}(\tau_1 + \tau_2 - \tau'_{01} - \tau'_{02})$$

soit encore, en posant :

$$\tau = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{T'}{h'} = \frac{\text{eff. tranchant réduit}}{\text{hauteur équivalente}} \text{ au niveau du montant}$$

$$\tau'_0 = \frac{\tau'_{01} + \tau'_{02}}{2} = \text{flux critique moyen.}$$

$$\boxed{C = l\,(\tau - \tau'_0).}$$

b) Remarquons que, dans le même cas particulier, une *expression défavorable* de C, à utiliser en première approximation, est donnée (en négligeant τ_0) par

$$C = \frac{T'\,l}{h'}.$$

6.622 *Contrainte de compression.* — Pour calculer la contrainte de compression des montants, il y a lieu de faire intervenir avec leur section propre S_r une *bande d'âme intéressée*, déterminée selon les prescriptions du paragraphe **2.45** [1].

1. — On pourra toujours, en première approximation, adopter $c = 15\ e$, de part et d'autre du rivetage de jonction.

Désignons par S'_τ la « section effective » du montant ainsi obtenue, la contrainte de compression est donnée directement par

$$n_c = \frac{C}{S'_\tau}.$$

6.623 *Rivetage montant-âme.* — On peut admettre que l'introduction de la compression C s'effectue par les premiers rivets au voisinage des semelles (la tôle servant de gousset)[1].

Le pas du *rivetage courant* doit satisfaire à la *condition de stabilité de la tôle entre rivets* étudiée au paragraphe **2.47**. C'est cette seule considération qui impose une jonction continue de la tôle d'âme aux montants courants.

6.624 *Efforts de flexion.* — Dans le cas général, adopté ci-dessus, où les flux τ_1 τ_2 sont différents, le montant doit résister, par *flexion*, à la *différence* entre les charges réparties f_2 provenant des panneaux 1 et 2 (fig. 33 *b* et § **4.531**).

On obtient donc une sollicitation normale d'intensité p, par unité de longueur, définie par

$$p = (\tau_1 - \tau'_{01}) \text{ cotg } \beta_1 - (\tau_2 - \tau'_{02}) \text{ cotg } \beta_2$$

(action positive vers le panneau 1).

Pour $\beta_1 = \beta_2 = 45°$, une *valeur défavorable* est donnée par l'expression simple

$$p = \frac{T'_1 - T'_2}{h'}$$

On peut calculer le montant comme une poutre encastrée sur les semelles (présence de l'âme) en tenant compte de la largeur d'âme intéressée.

Cette sollicitation conduit, généralement, à de faibles contraintes et on peut la négliger en première approximation.

6.63 Calcul d'un montant d'extrémité, après plissement de l'âme. — En désignant par l et h' la largeur et la hauteur équivalente du panneau

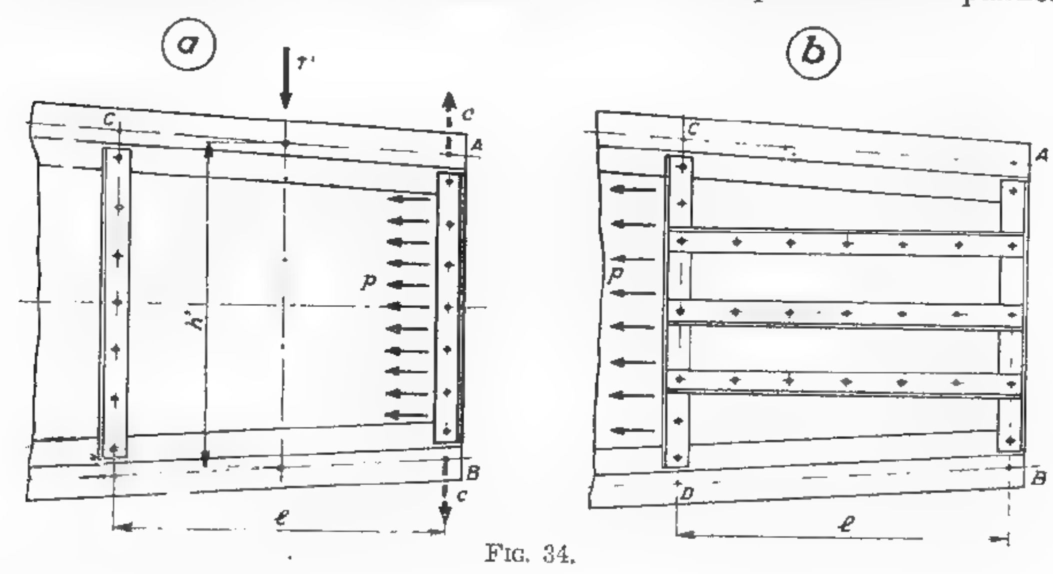


Fig. 34.

1. — Il est cependant préférable, à cet égard, de relier directement les montants aux semelles.

extrême soumis à un flux $\tau = \frac{T}{h'}$, on obtient sur le montant extrême AB (fig. 34 *a*) :

Force de compression $C = \frac{l}{2} (\tau - \tau'_0) \operatorname{tg} \beta$,

Sollicitation répartie en flexion (vers le panneau) : $p = (\tau - \tau'_0) \operatorname{tg} \beta$.

On remarquera que la flexion prend ici une importance accrue, par rapport aux montants courants (totalité et non différence de flux).

Il en résulterait, souvent, des contraintes prohibitives du montant. Une solution, couramment adoptée, consiste à étayer longitudinalement le dernier montant par de petits raidisseurs le reliant au montant voisin (fig. 34 *b*) On réalise ainsi une véritable poutre ABCD de hauteur l qui s'oppose aux actions p [1].

6.64 Calcul des montants d'introduction de charges. — Aux contraintes précédentes établies pour les montants courants ou, éventuellement, pour ceux d'extrémité, il y a lieu d'ajouter celles provenant, dans chaque cas particulier, de l'introduction dans l'âme d'une charge concentrée.

6.7 APPLICATION NUMÉRIQUE.

Nous donnons ci-après une application numérique concernant la *vérification d'une section droite d'un longeron à âme mince après établissement d'un champ de traction diagonale.*

Cette application a pour but de faire ressortir l'importance relative des « *sursollicitations théoriques* » dues au phénomène d'instabilité de l'âme. Elle comprend également la recherche pratique d'une contrainte critique sous charges combinées ainsi que le calcul des montants-raidisseurs de l'âme.

6.71 Données. — La figure 35 *a* représente la *section droite* du longeron envisagé, située au milieu d'un panneau formé par deux montants voisins (fig. 35 *b*).

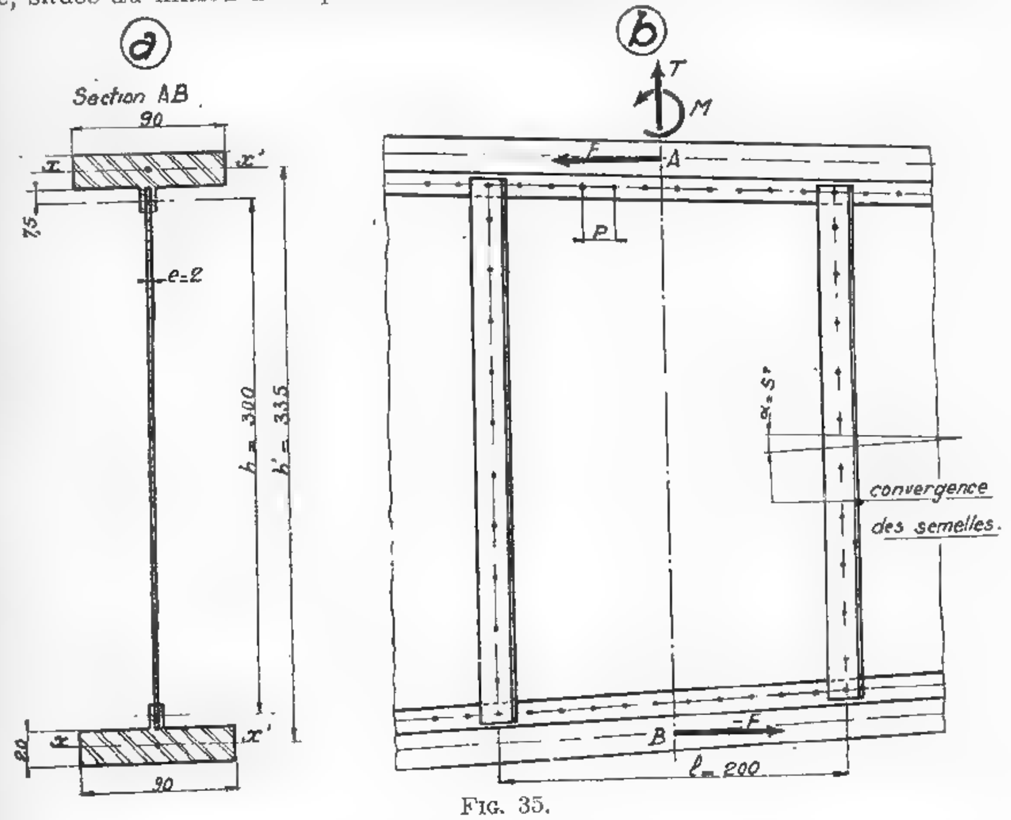


FIG. 35.

(1) Cette solution est surtout utilisée pour les travées extrêmes des caissons de torsion de voilure. Elle présente une analogie avec celle réalisée pour les structures entoilées (par suite de la tension de la toile).

Toute la structure est en duralumin AU4G. Les caractéristiques géométriques du panneau sont :

Epaisseur âme : $e=2$ mm.; largeur : $l=200$ mm. ; hauteur (entre rivures) : $h=300$ mm.

Hauteur équivalente de l'âme : $h'=335$ mm.

Charges appliquées (évaluées au coefficient de calcul à la rupture)

Effort tranchant total : T=12000 kg,

Moment fléchissant : M=15000 mkg.

6.72 Contraintes de base (compte non tenu du plissement éventuel de l'âme.

Composantes de flexion :

$$F=\pm\frac{M}{h'}=\pm\frac{15000\,.\,10^3}{335}=\pm 44800 \text{ kg.}$$

Contrainte moyenne des semelles (supposées encaissant seules la flexion, et en négligeant les pattes de fixation des âmes, par suite de leur perçage)[1] :

$$n_1=\pm\frac{F}{S_s}=\pm\frac{44800}{40\,.\,20}=24{,}9 \text{ kg/mm}^2.$$

Effort tranchant réduit :

$$T'=T-\frac{M}{h'}\,\text{tg}\,\alpha=12000-44800\cdot 0{,}087=8100 \text{ kg.}$$

Flux de cisaillement appliqué à l'âme :

$$\tau=\frac{T'}{h'}=\frac{8100}{330}=24{,}6 \text{ kg/mm.}$$

Contrainte de cisaillement de l'âme :

$$t=\frac{\tau}{e}=\frac{24{,}6}{2}=12{,}3 \text{ kg/mm}^2.$$

6.73 Contraintes critiques du panneau d'âme.

En *cisaillement pur* on a, d'après l'abaque planche 40

$$\left(\text{avec } \frac{a}{b}=\frac{l}{h}=\frac{200}{300}=0{,}666 \quad ; \quad b=l=200 \text{ mm} \qquad \text{et} \qquad e=2 \text{ mm}\right),$$

$$t'_0=6{,}4 \text{ kg/mm}^2.$$

En *flexion pure* on a, d'après le paragraphe 3.2

(avec K=30, b=côté chargé=h=300 mm)

$$n_{f_0}=30\cdot 7000\cdot\left(\frac{300}{2}\right)^2=9{,}34 \text{ kg/mm}^2.$$

Contrainte critique en sollicitation combinée. — Aux charges de rupture envisagées ci-dessus la contrainte maximum de flexion de l'âme, au niveau de la jonction âme-semelles, serait (sans tenir compte de son instabilité) :

$$n_f\approx n_1\,\frac{h}{h'}=24{,}9\,\frac{300}{335}=22{,}3 \text{ kg/mm}^2.$$

A un coefficient de calcul quelconque, on a donc entre n_f et t la relation

$$\frac{n_f}{t}=\frac{22{,}3}{12{,}3}=1{,}81 \qquad \text{d'où} \qquad n_f=1{,}81\ t.$$

---

1. — Nous négligerons également la bande d'âme intéressée

Or, d'après le paragraphe 5.3, l'instabilité en flexion + cisaillement se produit quand on a :

$$\alpha^2+\beta^2=1, \quad \text{avec} \quad \alpha=\frac{t}{t_0}=\frac{t}{6,4} \quad \text{et} \quad \beta=\frac{n_f}{n_{f_0}}=\frac{1,81\ t}{9,34}$$

soit donc :

$$\left(\frac{t}{6,4}\right)^2+\left(\frac{1,81\ t}{9,34}\right)^2=1$$

d'où l'on tire

$$t=4\ \text{kg/mm}^2.$$

Vérification graphique. — On a pour cette valeur de t :

$$\alpha=\frac{4}{6,4}=0,626 \quad \text{et} \quad \beta=\frac{1,81\times 4}{9,34}=0,775.$$

Les coordonnées de ces deux paramètres se recoupent bien sur la courbe $\gamma=0$, *de l'abaque*, fig. 25 *bis*.

La valeur $t=4$ kg/mm² qualifie donc le *taux de cisaillement qui, joint à la flexion correspondante, produit l'instabilité de l'âme.* C'est la valeur t_{f_0} utilisée dans les expressions ci-dessus.

Nous avons donc :

$$\boxed{t'_0=4\ \text{kg/mm}^2}$$

et

$$\tau'_0=t'_0\,e=4\cdot 2=8\ \text{kg/mm} \qquad \text{(flux critique)}.$$

Angles des plis. — Nous sommes dans le cas $l < h$. Nous adopterons donc, d'après le paragraphe 5.4 :

$$\beta=45°.$$

6.74 Calcul du rivetage âme-semelles (voir § 6.4).

Charge répartie normale aux semelles :

$$f_s=\tau-\tau'_0=24,6-8=16,6\ \text{kg/mm}.$$

Charge résultante :

$$f_r=\sqrt{\tau^2+f_s^2}=\sqrt{24,6^2+16,6^2}=29,7\ \text{kg/mm}.$$

Adoptons des rivets AU4G de diamètre $d=4$ mm, travaillant au double cisaillage (fig. 35 *a*). Le calcul montre que la condition de mâtage sur l'âme prédomine et donne une charge admissible par rivet :

$$R=p_a\cdot d\cdot e=60\cdot 4\cdot 2=480\ \text{kg}$$

Pas de rivetage maximum :

$$P'=\frac{480}{29,7}=16,2\ \text{mm}.$$

Nous adopterons :

$$\boxed{P=P'=16\ \text{mm}} \quad \text{(rivetage sur une seule rangée).}$$

6.75 Vérification de l'âme (voir § 6.3).

6.751 *Condition de cisaillement.*

$$t_a=20\ \text{kg/mm}^2 \quad \text{(tôle AU4G)}$$

d'où

$$t_a\left(1-\frac{d}{P}\right)=20\left(1-\frac{4}{16}\right)=15\ \text{kg/mm}^2 > t=12,3\ \text{kg/mm}^2.$$

La condition est donc satisfaite avec une *marge de sécurité de :*

$$100\,\frac{15-12{,}3}{12{,}3}=22\ \%.$$

6.752 *Condition de traction.*

$$n_a=40\ \text{kg/mm}^2$$

d'où :

$$n_a\left(1-\frac{d\sqrt{2}}{P}\right)=40\left(1-\frac{4\sqrt{2}}{16}\right)=25{,}8\ \text{kg/mm}^2,$$

$$n_t=2\ t-t'_a=2\cdot 12{,}3-4=20{,}6\ \text{kg/mm}^2.$$

La condition de traction est donc également satisfaite, avec une *marge de sécurité* (théorique) de

$$100\,\frac{25{,}8-20{,}6}{20{,}6}=25{,}2\%.$$

6.76 Vérification des semelles.

6.761 *Compression supplémentaire* (voir § **6.52**).

$$C'=\frac{300}{2}\,(24{,}6-8)=2790\ \text{kg}.$$

Supplément de contrainte correspondant :

$$\Delta\ n_c=\frac{C'}{S_s}=\frac{2790}{1800}=1{,}55\ \text{kg/mm}^2.$$

6.762 *Flexion supplémentaire* (voir § **6.53**).

Moment maximum (au niveau des montants) :

$$m_1=\frac{f_s\,l^2}{12}=\frac{16{,}6\cdot 200^2}{12}=55300\ \text{mmkg}.$$

Moment d'inertie de flexion d'une semelle (pattes négligées) (voir fig. 35 *a*)

$$\left(\frac{i}{v}\right)_{xx'}=\frac{90\cdot 20^2}{6}=6000\ \text{mm}^3$$

Contrainte correspondante :

$$n_{c_1}=-n_{t_1}=\frac{m_1}{\left(\frac{i}{v}\right)_{xx'}}=\frac{55300}{6000}=9{,}22\ \text{kg/mm}^2.$$

6.673 *Contraintes résultantes maxima.* — En admettant que les contraintes de base, caculées au milieu du panneau, soient identiques au niveau des montants, l'on obtient :

semelle supérieure (comprimée) :

$$n_c=24{,}9+1{,}55+9{,}22=\mathbf{35{,}67}\ \text{kg/mm}^2\ ;$$

semelle inférieure (tendue) :

$$n_c=-24{,}9+1{,}55-9{,}22=-\mathbf{32{,}57}\ \text{kg/mm}^2.$$

6.764 *Remarque.* — Le plissement de l'âme a donc pour effet d'accroître la contrainte de la semelle comprimée dans la proportion de :

$$100\,\frac{35{,}67-24{,}9}{24{,}9}=43{,}2\ \%.$$

Ce résultat explique que l'on s'impose fréquemment, dans ce type de structure, un raidissement de l'âme suffisant pour que celle-ci reste stable jusqu'aux

contraintes maxima de calcul. Cette solution peut en effet conduire en définitive à un poids plus léger de l'ensemble du longeron.

Signalons que, pour les longerons de grande hauteur, un excellent procédé de stabilisation de l'âme consiste à utiliser des *raidisseurs longitudinaux*. En effet, la contrainte critique de flexion (qui dépend directement du carré de la dimension hauteur) se trouve fortement accrue. Les montants verticaux peuvent, dans cette solution, n'être constitués que par les profilés de fixation des nervures.

6.77 **Calcul des montants courants.** — Nous supposerons que les panneaux adjacents au panneau considéré ont même largeur l et même contrainte supplémentaire $t-t_0$ (ce qui élimine le calcul des montants en flexion).

Effort de compression. — D'après le paragraphe 6.621 (cas particulier a), nous avons

$$C=200\ (24{,}6-8)=3320 \text{ kg.}$$

Dimensionnement en première approximation. — Fixons-nous, *à priori*, une contrainte de compression admissible égale à 20 kg/mm² (première estimation de contrainte admissible au flambage). Nous devons donc assurer une « section effective » S'_r d'un raidisseur telle que l'on ait :

$$S'_r \geqslant \frac{3320}{20}=166 \text{ mm}^2.$$

D'autre part, avec le taux de contrainte ci-dessus, la *largeur équivalente d'âme* intéressée par un montant a pour valeur, d'après la formule simplifiée de KARMAN (§ 2.451) :

$$2\ c=2\cdot 0{,}95\cdot 2\sqrt{\frac{700}{20}}=71 \text{ mm}$$

d'où une *section équivalente d'âme*

$$2\times 71=142 \text{ mm}^2.$$

Adoptons, par homogénéité avec la tôle, un montant constitué par une *cornière AU4G de* $20\times 20\times 2$ (section $S_r=76{,}6$ mm²). Nous obtiendrons donc, par cette première approximation :

une « section effective » de montant :

$$S'_r=142+76{,}6=218{,}6 \text{ mm}^2>166$$

et une contrainte :

$$n_r=\frac{3320}{218{,}6}=15{,}2 \text{ kg/mm}^2.$$

Deuxième approximation. — Fixons-nous :

$$n_c=13 \text{ kg/mm}^2,$$

d'où

$$2\ c=3{,}8\sqrt{\frac{7000}{13}}=88 \text{ mm}$$

et

$$S'_r=88\cdot 2+76{,}6=252{,}6 \text{ mm}^2$$

$$n_c=\frac{3320}{252{,}6}=13{,}1 \text{ kg/mm}^2,$$

peu différent de la valeur d'essai. Nous adopterons donc ces résultats.

Vérification au fambage. — D'après l'abaque de la *planche* 26, la cornière adoptée qui possède un « indice de minceur », $\beta=\frac{20}{2}=10$, admet un taux de *flambage local*

$$n_{c0}=27 \text{ kg/mm}^2 \quad [1]$$

(alignement de $\beta=10$, échelle AU4G avec $n_{ca}=40$ kg/mm²).

1. — Cette valeur est légèrement défavorable, car nous avons supposées libres les deux ailes de la cornière, alors que l'une d'elles est fixée sur l'âme.

Vérifions la tenue au *flambage général* de l'ensemble de la « section effective » du montant (fig. 36), ce flambage ne pouvant avoir lieu qu'autour de l'axe d'inertie yy' (par suite de l'appui fourni, dans le sens longitudinal, par la tôle d'âme).

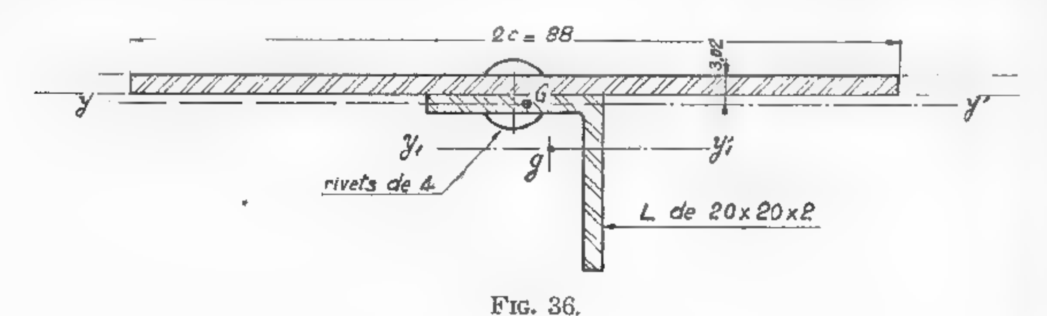


Fig. 36.

Moment d'inertie de l'ensemble :

$$I_{yy'}=5325 \text{ mm}^4.$$

Rayon de giration :

$$\rho_{yy'}=\sqrt{\frac{5325}{252}}=4,6\text{mm}.$$

Elancement (en supposant les extrémités du montant ariculées)

$$\lambda=\frac{300}{4,6}=65,2.$$

L'abaque de la *Planche 29* donne, avec la valeur de n_{c0} ci-dessus

$$n_{c\lambda}=14,5 \text{ kg/mm}^2.$$

Cette contrainte étant supérieure à la contrainte réelle $n_c=13,1$ kg/mm² du montant, l'échantillonnage choisi est convenable.

6.78 Rivetage âme-montant.

Transmission de l'effort de compression. — La cornière supporte un effort

$$C'=C\frac{S_r}{S_t'}=3320\frac{76,6}{252}=1000 \text{ kg}.$$

Adoptons des rivets de 4,AU4G (R=480 kg au mâtage, voir 6.74).

Les deux premiers rivets au voisinage des semelles, sont sensiblement suffisants pour assurer la mise en charge (voir fig. 35).

Rivetage courant.

Rivetage courant. — *L'abaque de la Planche 39 donne* (avec $n_{cr}=13,2$ et $e=2$), un pas maximum admissible

$$P_{max}=84 \text{ mm}.$$

Ce pas est supérieur à celui que l'on adoptera en pratique.

6.8 CONCLUSION ET GENERALISATION.

Le calcul d'un longeron à âme mince instable constitue donc un problème assez laborieux, par suite du grand nombre d'éléments à vérifier et des approximations successives auxquelles on est, généralement, conduit lors d'un calcul de dimensionnement.

Aussi conseillerons-nous, en définitive, d'adopter dans la grande majo-

1. — Un encastrement de ces extrémités ne pourrait, en effet, être fourni que par la rigidité en torsion des semelles qui est relativement faible.

rité des cas la valeur simple $\beta = 45°$ comme orientation du plissement. Il convient d'ailleurs, de remarquer que les théories ci-dessus ne possèdent pas une rigueur absolue. On néglige, en effet, pour les établir, les compatibilités qui doivent exister entre les déformations des tôles et de leurs éléments de bordure. Cette considération accroît la nécessité de calculs aussi simples que possible.

Les théories précédentes se généralisent aisément à d'autres types de structures de tôle mince.

Dans le cas d'un fuselage-coque, par exemple, les lisses remplacent les semelles, et les couples les montants. Des considérations particulières résultent, cependant, du fait du galbe et de la continuité de revêtement de part et d'autre des lisses. Nous reviendrons sur cette question au chapitre XXII.

CHAPITRE XX

GÉNÉRALITÉS SUR LES STRUCTURES D'AVIONS

STRUCTURES SANS REVÊTEMENT TRAVAILLANT

0. INTRODUCTION

Avant d'aborder l'exposé des méthodes de calcul applicables aux principaux types de structures aéronautiques modernes, il nous a paru intéressant de donner un aperçu rapide sur les différents procédés de construction des cellules d'avions et sur leurs propriétés communes.

Cet exposé ne constitue nullement un traité de construction des avions [1] ou un historique relatif à cette question.

Il a pour but essentiel de faire apparaître une *classification* sommaire des différents types de structures, cette classification étant exclusivement basée sur des considérations de résistance des matériaux, c'est-à-dire de passage des charges.

Nous avons inclus dans ce chapitre l'étude succincte du premier groupe de ces structures, qui ne présente plus guère, à l'heure actuelle, qu'un intérêt historique.

Les deux chapitres suivants sont réservés à l'étude plus approfondie des deux autres groupes.

1. CONFIGURATION GÉNÉRALE D'UN AVION CLASSIQUE

1.1 GÉNÉRALITÉS.

On sait que les appareils volants plus lourds que l'air (ou aérodynes) utilisent essentiellement des *surfaces sustentatrices* qui, du fait de leur déplacement relatif dans l'air, sont soumises à des *actions aérodynamiques* dont la composante verticale leur permet de se maintenir dans l'espace.

On sait également que le déplacement relatif de ces appareils est engendré et entretenu par des *propulseurs* constitués, pour la plupart d'entre eux, par des groupes moteurs-hélices ou, sur des appareils récents, par des réacteurs ou systèmes genre fusées. Notons cependant que cette propulsion peut n'être assurée que par une composante du poids de l'appareil (vol en descente planée).

Au cours des considérations générales ci-après, nous n'envisagerons que les types d'aérodynes les plus répandus connus sous le nom d'*avions* (ou hydravions) où les surfaces sustentatrices sont essentiellement localisées sur des éléments fixés d'une manière rigide par rapport au reste de l'appareil.

Notre objet actuel étant l'étude de la résistance des matériaux, nous

---

1. — Le lecteur se reportera très utilement, sur ce point, à l'ouvrage de M. G. du Merle : Construction des avions (Dunod, éditeur).

ne nous occuperons que de l'ossature générale de ces appareils, désignée par *planeur* (ou *cellule*).

1.2 CONFIGURATION EXTÉRIEURE.

On peut distinguer trois éléments principaux dans la structure du planeur d'un avion (ou hydravion) classique (voir fig. 1).

1.21 Voilure. — C'est l'élément chargé d'assurer la *sustentation* (surfaces sustentatrices mentionnées ci-dessus). On ne construit plus guère, actuellement, que des voilures *monoplanes* comprenant deux *ailes* en porte-à-faux de part et d'autre du fuselage (ailes cantilever). On sait que l'on a longtemps construit des voilures *biplanes* ou *multiplanes* ou *sesquiplanes* et, plus récemment, des voilures monoplanes soutenues par des *mâts* ou *haubans*.

La voilure peut, éventuellement, comporter les groupes moto-propulseurs (appareils multimoteurs) et le train d'atterrissage. Elle peut également contenir une partie de la charge utile (combustible, armement, etc...).

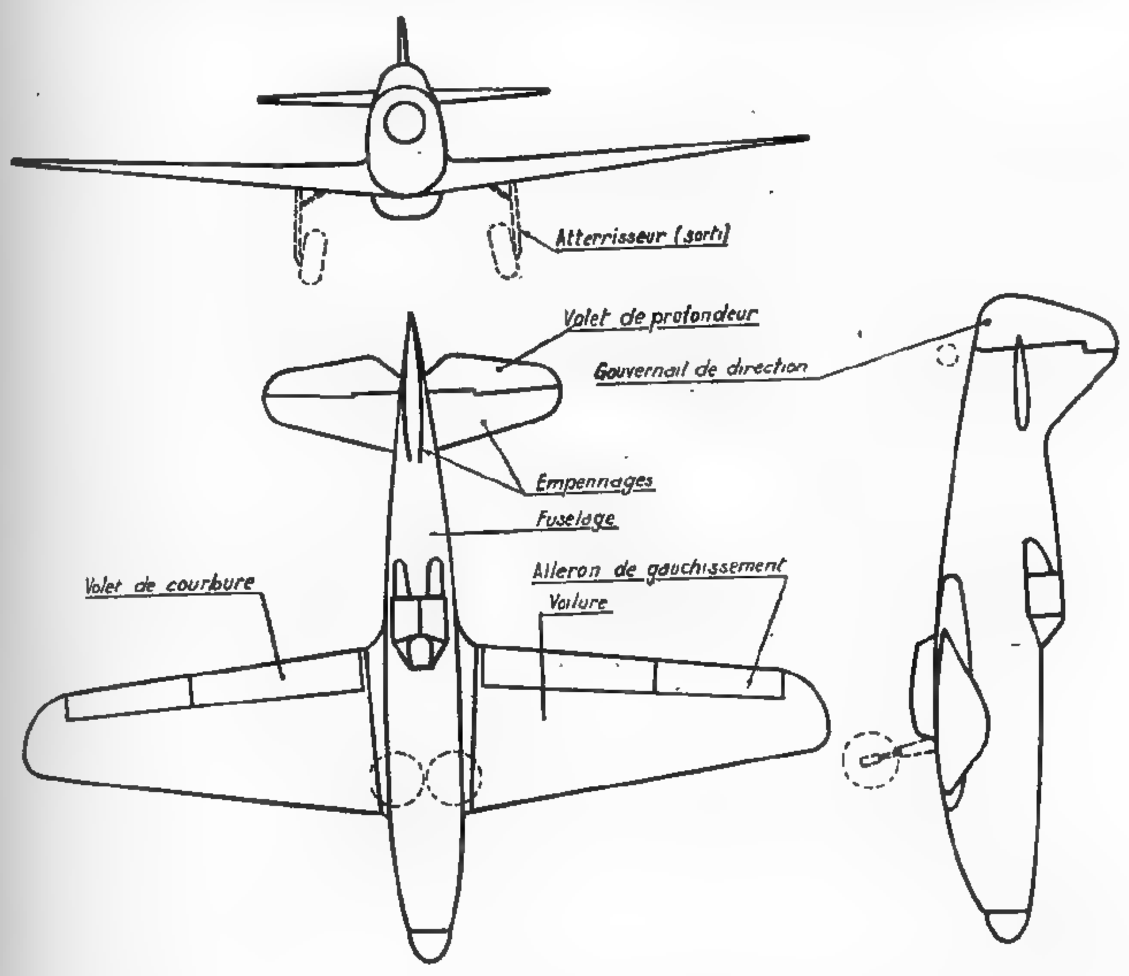


Fig. 1.

1.22 Fuselage. — Le fuselage constitue essentiellement l'élément recevant la charge utile (équipage, passagers, frêt, combustible, armement, etc...). Il ne participe guère à la sustentation générale et constitue donc « *l'élément à soutenir en l'air* » par les surfaces sustentatrices.

Il supporte le groupe motopropulseur, dans le cas des monomoteurs (ou trimoteurs). Il peut, éventuellement, supporter le train d'atterrissage

ou servir directement pour l'amérissage (hydravions à coque). Il constitue enfin le porte-empennages de tous les avions classiques.

1.23 **Empennages.** — Ces éléments ont pour but d'assurer la *stabilisation aérodynamique* et la *manœuvre* de l'appareil. Ils sont assimilables, comme configuration extérieure, à des petites voilures.

1.3 SOLLICITATIONS PRINCIPALES APPLIQUÉES AUX ÉLÉMENTS.

1.30 **Remarque préliminaire.** — Nous nous bornerons à définir ici les *sens prépondérants des efforts généraux* appliqués aux divers éléments, cette définition ayant principalement pour objet d'aboutir à une compréhension rationnelle de la réalisation interne des structures résistantes de ces éléments.

1.31 **Voilure.** – La voilure étant l'élément sustentateur est soumise, en vol normal, à des *charges aérodynamiques orientées de bas en haut.* Ces charges possèdent une faible composante située dans le plan de l'aile.

Notons que, pour les *profils* classiques et pour leurs *incidences* d'utilisation courantes, cette composante est généralement dirigée vers l'avant.

Une part des charges aérodynamiques est équilibrée directement par les *efforts d'inertie* des masses propres de l'aile et de ses aménagements [1]. C'est pourquoi on désigne communément ces efforts d'inertie par « *efforts de délestage* ».

La majorité des charges reste, néanmoins, à transmettre jusqu'au fuselage pour assurer son « soutien en l'air », c'est-à-dire pour équilibrer les forces d'inertie dues à sa masse qui, pour les avions classiques, est toujours importante vis-à-vis de celle de l'appareil complet.

Tous les types de structures de voilure reviennent donc à constituer un *élément longitudinal résistant, orienté dans le sens de l'envergure.* Cet élément constitue une *poutre soumise à des charges réparties* (actions aérodynamiques — efforts de délestage) *prenant des réactions concentrées sur le fuselage.*

Cette poutre travaille donc essentiellement en *flexion dirigée de bas en haut* (vol normal, fig. 2 *a*) [2] et, beaucoup plus faiblement, en flexion agissant dans le plan de l'aile.

L'étude aérodynamique de l'aile montre que *le centre de poussée* des actions aérodynamiques est sujet à certains *déplacements* dans le sens de la profondeur de l'aile, ce qui impose à l'élément longitudinal de posséder une certaine *rigidité en torsion* [3]. Cette considération se trouve fortement accrue quand la voilure possède des masses importantes excentrées, telles que des groupes moteurs par exemple. Les moments de torsion sont transmis au fuselage où ils participent à l'équilibre longitudinal général de l'appareil.

Signalons que les charges aérodynamiques, appliquées aux parois de la voilure sont généralement transmises à l'élément longitudinal par un système *d'éléments transversaux* appelés *nervures*.

---

1. — Au coefficient 1, c'est-à-dire sous l'action de la pesanteur seule, ces efforts d'inertie sont égaux aux *poids* de ces masses. Ils sont, dans un cas de calcul, multipliés par le *« facteur de charge »*, propre à ce cas (chap. II, § 1.26).

2. — En *vol sur le dos*, les considérations ci-dessus sont inversées (flexion négative). Par suite de l'action des *rafales aérodynamiques*, il est nécessaire d'envisager ce type d'évolution, même pour des appareils lourds ou de catégorie tranquille. Notons cependant que les charges correspondantes sont toujours moins élevées que celles agissant en vol normal.

3. — Nous verrons que cette considération a exercé une influence prépondérante sur le type de réalisation des structures.

Signalons enfin que la voilure peut, en supplément aux charges précédentes, être soumise dans certains cas de calculs, à des *charges dissymétriques* sur les deux ailes, provenant en particulier, de l'action des ailerons de gauchissement (fig. 2 *b*), ou à des *charges provenant des atterrisseurs latéraux*.

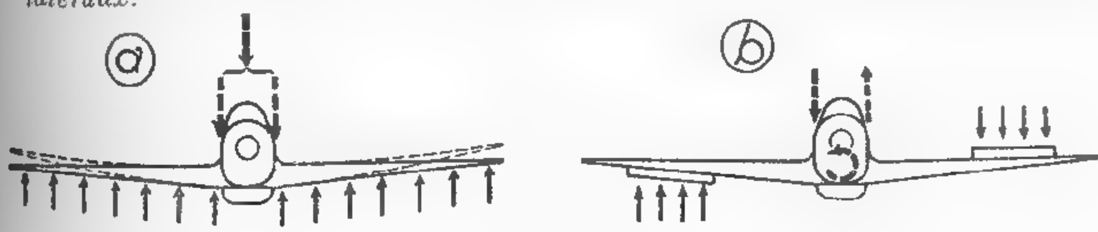


Fig. 2.

1.32 Fuselage. — Le fuselage est principalement soumis à l'action des *forces d'inertie* des masses qu'il supporte [1] (poids propre, charge utile, moteur, etc...) et aux *actions aérodynamiques provenant des empennages*.

Il se comporte, sous l'action de ces charges, comme une *poutre encastrée sur l'élément résistant de la voilure* [2]. Cette poutre est donc, également, principalement sollicitée en *flexion* et cette flexion peut agir *verticalement* (équilibre longitudinal de l'avion : fig. 3 *a*) ou *transversalement* (charges sur empennage vertical dans un virage, par exemple : fig. 3 *b*).

Le fuselage est, au surplus, généralement soumis à des *couples de torsion* provenant, par exemple, dans sa partie avant du couple-moteur et dans sa partie arrière des charges sur empennage vertical ou horizontal (charges dissymétriques). On peut également, à cet égard, le considérer comme encastré sur la voilure.

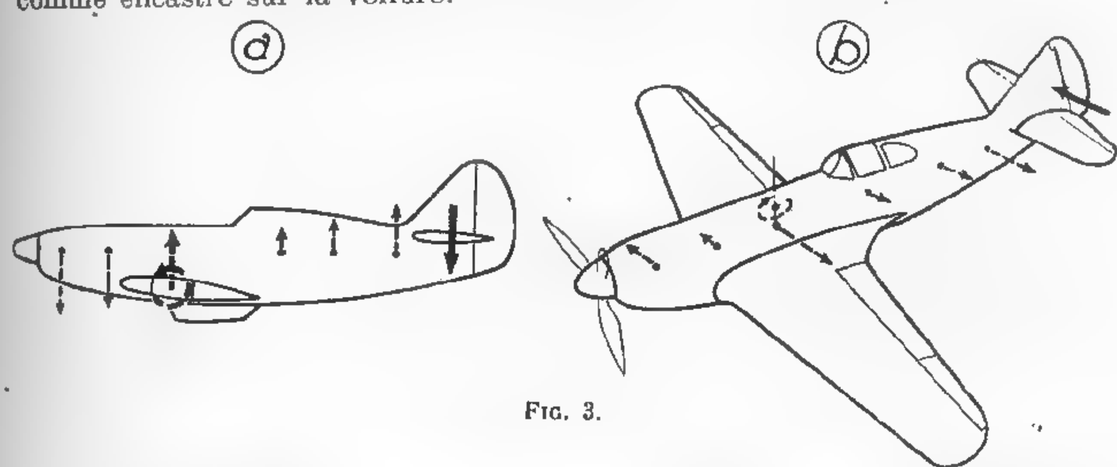


Fig. 3.

Le fuselage peut, enfin, être soumis à des charges provenant des réactions de l'atterrisseur auxiliaire (roue de queue ou roue avant d'un atterrisseur tricycle). Ces charges engendrent également une flexion et, éventuellement, une torsion du fuselage.

1.33 Empennages. — De même que la voilure, les empennages sont soumis à des *charges aérodynamiques* dont l'orientation est sensiblement normale à leurs plans.

1. — Ces forces d'inertie peuvent résulter d'accélérations de translation ou de rotation de l'avion.

2. — Remarquons que, comme pour tout système en équilibre, il est toujours purement conventionnel de distinguer les charges appliquées des réactions (chap. II, § 1.2). On pourrait, par exemple, supposer le fuselage chargé par les forces d'inertie et équilibré sur la voilure et sur l'empennage. Les conventions que nous indiquons sont celles généralement adoptées dans les calculs.

Signalons cependant que, contrairement à la voilure, les charges de calcul de l'empennage horizontal sont, en général, de même grandeur dans chaque sens (empennage porteur ou déporteur). Ces charges font également travailler les *ossatures longitudinales* de ces éléments en *flexion* et en *torsion*.

1.4 PRINCIPAUX FACTEURS INFLUENÇANT LA RÉALISATION DES STRUCTURES.

L'examen sommaire des sollicitations principales, effectué ci-dessus, nous a permis de conclure à la nécessité de *poutres longitudinales* travaillant essentiellement en flexion.

Comme le facteur *légèreté* a constitué, dès le début, le souci essentiel de l'avionneur, on conçoit naturellement le type de réalisation des premières structures où l'on a cherché à donner le plus de *hauteur* possible à ces poutres ; d'où la naissance des voilures biplanes ou multiplanes avec *triangulation* intermédiaire.

Par la suite, le souci *d'aérodynamisme*, c'est-à-dire de moindre résistance à l'avancement, a conduit à éliminer progressivement ces triangulations ou supports extérieurs. On arrive ainsi à la conception des voilures monoplanes en porte-à-faux où toute la structure résistante est incluse à l'intérieur du profil. Cette disposition est d'ailleurs opposée à celle qui serait déduite des seules considérations de résistance des matériaux puisque l'on ne dispose que de la *petite dimension* (épaisseur) des profils dans le sens des charges prédominantes. Sa réalisation n'a été possible que grâce à l'utilisation de *matériaux de choix* (alliages légers à haute résistance, aciers spéciaux ou bois sélectionnés).

Conjointement à cette évolution dans les formes extérieures, la tenue des éléments aux *efforts locaux* (pressions aérodynamiques, résistance aux intempéries), a conduit à utiliser des *revêtements rigides* (contreplaqués ou tôles) au lieu des *entoilages*. On a alors cherché à faire participer de plus en plus ces éléments de recouvrement extérieur à la résistance d'ensemble. Nous arrivons ainsi à la classification donnée ci-après qui respecte assez fidèlement, à cet égard, l'ordre chronologique d'évolution des structures.

Signalons, enfin, que le facteur « *utilisation* » a très souvent joué un rôle prépondérant dans la réalisation des structures. Ce facteur englobe, par exemple, des considérations de *possibilités d'aménagements*, de *démontages rapides* ou de *réparations aisées*.

Le choix final d'un type de structure résulte ainsi, bien souvent, d'un compromis plus ou moins heureux, entre ces divers facteurs.

2. CLASSIFICATION DES STRUCTURES

2.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Ainsi que nous l'avons déjà signalé, la classification que nous proposons ci-dessous résulte exclusivement de considérations de résistance des matériaux, c'est-à-dire *de procédés de calcul* (ou de passage des charges).

Nous distinguerons trois groupes principaux de types de structures.

Chacun de ces groupes s'applique indistinctement aux voilures, fuselages ou empennages.

Les constructions correspondantes peuvent être réalisées en matériaux divers (bois, alliages légers ou ultra-légers, ou aciers).

Signalons qu'il existe, en réalité, des types de structures intermédiaires entre les catégories proposées. Nous en donnerons quelques exemples par la suite.

2.1 PREMIER GROUPE : STRUCTURES SANS REVETEMENT TRAVAILLANT.

Dans ce type de structures, l'élément résistant est constitué par une *ossature* composée de *membrures concentrées*, généralement reliées entre elles par des éléments de *triangulation* extérieurs ou intérieurs.

Cette ossature se suffit à elle-même pour assurer la transmission de tous les efforts généraux, sans avoir recours aux surfaces extérieures de revêtement.

Ces revêtements sont généralement constitués par des *entoilages* ou encore par des *panneaux de contreplaqué ou de tôle* non reliés rigidement à l'ossature. Ces éléments de recouvrement ne constituent donc qu'un simple *capotage*, assurant la forme extérieure et la transmission des charges locales.

Nous étudierons sommairement ce premier groupe de structures au paragraphe **4.** du présent chapitre.

2.2 DEUXIEME GROUPE : STRUCTURES A AMES MINCES.

Dans ce type de structures, le *revêtement* est relié rigidement à des *membrures concentrées*. Mais ce revêtement mince ou non suffisamment raidi dans le sens longitudinal, ne participe qu'insensiblement à la résistance en flexion proprement dite, c'est-à-dire à la transmission des efforts internes normaux.

Le revêtement constitue, par contre, le seul élément de triangulation entre les membrures concentrées. Il assure donc, par cisaillement, le transport des efforts tranchants et, par suite, *la mise en charge longitudinale* de ces éléments concentrés appelés *semelles*.

Le revêtement forme généralement, avec l'aide éventuelle des âmes des longerons, un corps creux à parois minces qui transmet également, par cisaillement, les *moments de torsion* appliqués à la structure.

Citons, dès maintenant, comme exemples de constructions assimilables à ce type de structure, les voilures monolongerons avec caissons de torsion, les voilures bi-longerons avec caisson intermédiaire de torsion, les fuselages à quatre longerons avec tôles de revêtement mince non-raidies, etc...

On désigne encore ce type de constructions par *structures à revêtement semi-travaillant*. Nous préfèrerons, à cette appellation, celle de *structures à âmes minces* qui est plus générale.

L'étude de ce groupe de structures sera effectuée au chapitre XXI.

2.3 TROISIEME GROUPE : STRUCTURES-COQUES.

Dans ce type de structures, le *revêtement*, *suffisamment épais*, ou *suffisamment raidi longitudinalement*, assure par lui-même la transmission des *efforts normaux* et *tangentiels* de flexion ou participe d'une façon notable à la transmission de ces efforts.

Il assure également, par cisaillement, le passage des moments de torsion.

Comme exemples classiques de ces structures nous citerons : les *caissons de voilure* qui forment des poutres à larges semelles constituées par les surfaces extérieures d'intrados et d'extrados elles-mêmes, les *fuselages-coques* où le revêtement extérieur est généralement raidi longitudinalement ou transversalement ou mieux, dans certaines constructions dites « *monocoques* », est suffisamment stable pour assurer seul la transmission de tous les efforts (il forme alors un corps creux analogue à un tube).

On désigne encore ce type de structures par « *structures à revêtement travaillant* ». Nous préfèrerons l'appellation de « *structures-coques* » (ou

structures en coquilles) qui permet une distinction plus nette avec le groupe précédent.

Ce groupe de structures sera étudié au chapitre XXII.

3. AXES DE RÉFÉRENCE D'UNE STRUCTURE

3.0 POSITION DU PROBLÈME.

Un des premiers problèmes qui se posent lors de l'étude d'une structure, et notamment pour les deux derniers groupes de la classification ci-dessus, est de définir un *axe longitudinal de référence* par rapport auquel seront évalués les efforts (moments de torsion en particulier).

On a coutume de désigner cet axe par l'*axe élastique* de la structure. Outre son utilité pour les calculs de résistance des matériaux, sa connaissance est nécessaire pour les calculs de *vibrations*.

3.1 CENTRES DE RÉFÉRENCE DES SECTIONS DROITES.

3.11 Centre de cisaillement. — Au chapitre XI, paragraphe **3.**, nous avons été conduits à faire ressortir l'existence de *points particuliers* des sections droites des poutres prismatiques appelés *centre de cisaillement* C_c de ces sections.

Nous avons vu qu'il était nécessaire que les efforts tranchants appliqués à ces sections convergent vers ces points théoriques pour donner lieu à un *équilibre interne en flexion pure* (c'est-à-dire sans efforts internes dus à une torsion).

L'emplacement du centre de cisaillement d'une section est donc une caractéristique propre à cette section [1]. Il ne dépend que de ses paramètres propres à l'exclusion de ceux des parties qui avoisinent cette section.

3.12 Centres de flexion et de torsion.

3.121 *Définition.* — Pour une *section droite considérée d'une structure*, on définit les deux points particuliers suivants :

a) Le *centre de flexion* C_F : point de la section tel que toute force concentrée, passant par ce point, donne à cette section un déplacement en *translation pure*. C'est ce que schématise la figure 4 *a* dans le cas particulier d'une aile.

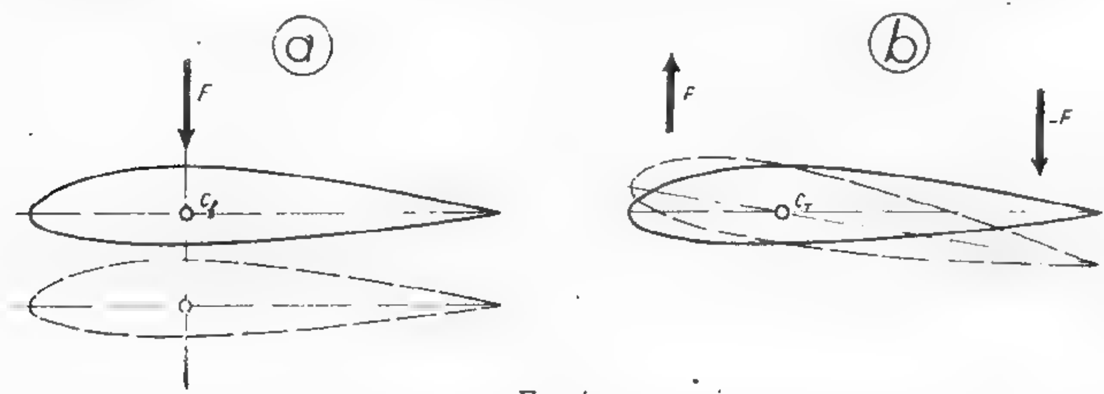


Fig. 4.

b) Le *centre de torsion* C_T : point autour duquel tourne la section quand on applique, à cette section, un couple pur de torsion (fig. 4 *b*). C'est également le centre du mouvement de rotation qui accompagne le dépla-

1. — Nous avons appris, au chapitre XI (§ 3.2) à le déterminer dans quelques cas particuliers. Nous exposerons au chapitre XXII une méthode plus générale applicable aux sections minces de forme quelconque.

cement en translation pure de la section considérée soumise à des charges ne passant pas par C_F (fig. 5 ci-après).

3.122 *Propriétés.* — Il est aisé de concevoir que la position de ces deux centres ne dépende pas que des caractéristiques propres à la section étudiée, mais aussi de celles des *parties avoisinantes de la structure.* Ce sont, en effet, les déformations de ces parties qui donnent lieu aux déplacements entrant en jeu dans la définition de ces points.

3.123 *Détermination expérimentale.* — On peut aisément déterminer le *centre de torsion* d'une section au cours d'un *essai statique* d'une structure. On réalise pour cela, successivement, deux chargements identiques F en deux points différents A et B appartenant à la section étudiée (fig. 5 *a* et 5 *b*) et l'on mesure les *flèches* au niveau de ces points. Le point C_T étant le seul qui se déplace de la même quantité y (flèche de flexion pure) au cours des deux chargements, on obtient les relations

$$l_1 = l\frac{\Delta a}{\Delta a + \Delta b} \qquad l_2 = l\frac{\Delta b}{\Delta a + \Delta b}$$

en posant

$$\Delta a = a_1 - a_2 \quad \text{et} \quad \Delta b = b_2 - b_1$$

(toutes les flèches étant comptées positivement dans le même sens).

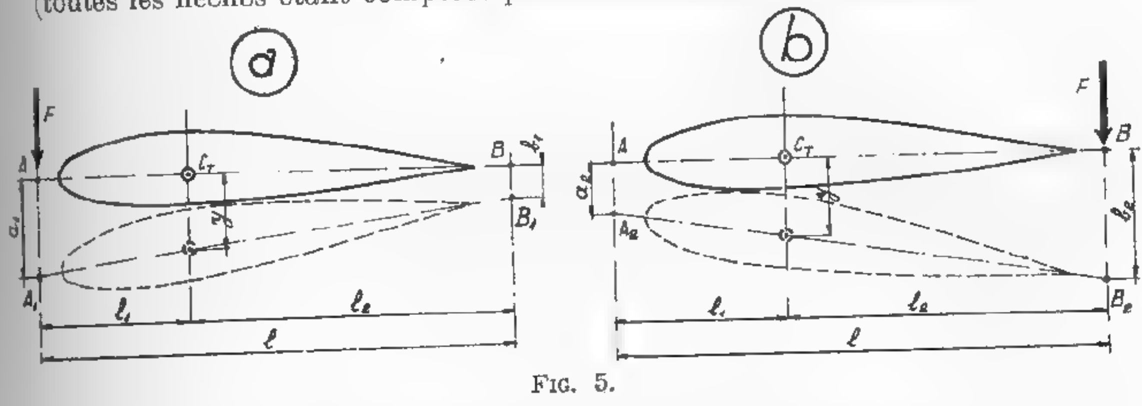


Fig. 5.

Cet essai permet également de déterminer les *rigidités* en torsion et en flexion de la structure.

Le *centre de flexion* est plus délicat à déterminer, car on doit, dans le cas général, procéder par tâtonnements.

3.124 *Cas particulier : centre élastique.* — Pratiquement, les structures sont souvent *homothétiques* et *longues* (voilures en particulier). Elles constituent alors des *poutres prismatiques* et l'on démontre que, *pour une même section* de ces poutres, *les trois points particuliers* C_G, C_F et C_T *sont confondus* [1].

On désigne alors ce « point particulier unique » par le *centre élastique* de la section considérée.

Il se détermine par le calcul (recherche de C_G, C_F ou C_T) et se vérifie expérimentalement à l'aide de l'essai décrit ci-dessus.

3.2 AXE ÉLASTIQUE D'UNE STRUCTURE.

3.21 **Définition théorique.** — On définit *l'axe élastique* d'une structure comme étant le lieu des points d'application des forces ne donnant pas de torsion en aucune section de cette structure. Un système de charges trans-

1. — Il est cependant nécessaire que la section considérée soit située hors du voisinage immédiat d'un encastrement rigide de la structure.

versales quelconques, convergeant vers cet axe ne doit donc engendrer que des déplacements en translation des diverses sections, à l'exclusion de toute rotation.

3.22 Propriété. — *L'axe élastique doit être rectiligne.* En effet, si l'on suppose une ligne courbe ABC (fig. 6), une charge transversale appliquée en P donnera de la torsion en B et non en C, et par contre une charge appliquée en P' donnera de la torsion en C et non en B. Cette ligne ne correspond donc pas à la définition ci-dessus.

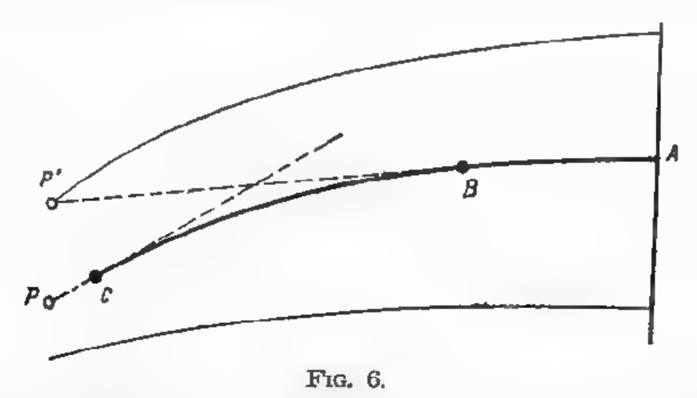


FIG. 6.

3.23 Cas particuliers. — Dans le cas d'une *structure homothétique longue*, cet axe est la *droite qui joint les centres élastiques des diverses sections droites.* Il suffit donc de calculer, ou de mesurer, l'emplacement de deux de ces centres.

L'axe élastique constitue également *l'axe de torsion* de la structure.

Une *structure quelconque* dont les centres de cisaillement des diverses sections droites ne sont pas alignés, *ne possède pas d'axe élastique.*

3.24 Remarques. — Pour les calculs aux *vibrations*, on convient cependant, dans ce dernier cas de structures quelconques, d'adopter pour « axe de torsion » la droite joignant les centres de cisaillement (déterminés par le calcul) ou les centres de torsion (déterminés expérimentalement) de deux sections voisines des deux extrémités de la structure. C'est ce que schématise la figure 7 dans le cas d'une structure de fuselage-coque possédant

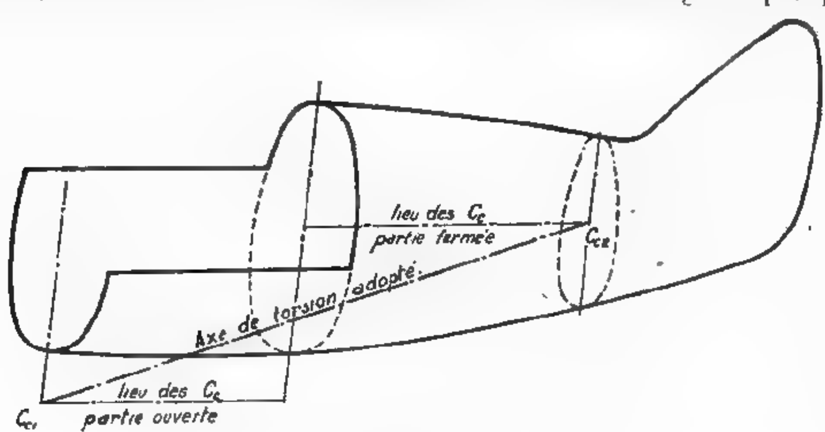


FIG. 7.

une partie arrière fermée et une partie avant ouverte (de longueur importante). On sait (chap. XI, § **3.**) que les centres de cisaillement des sections de la partie ouverte sont situés en dehors de ces sections tandis que ceux des sections de la partie fermée sont situés à l'intérieur. On adopte, par exemple, la droite moyenne C_{c1}— C_{c2}.

Pour les calculs de *résistance des matériaux*, nous verrons que l'on peut, pratiquement, dans ce cas, se dispenser de connaître l'axe de torsion lui-même. On adopte simplement un *axe de référence* pour le calcul des « moments de transport » (tenant lieu de moments de torsion) et la répartition des tensions internes s'opère en conséquence.

4. ETUDE SOMMAIRE DES STRUCTURES SANS REVÊTEMENT TRAVAILLANT

4.0 REMARQUES PRELIMINAIRES.

Ainsi que nous l'avons indiqué ci-dessus, ce type de structures fut le premier réalisé en construction aéronautique. Les faibles vitesses toléraient en effet, l'utilisation de surfaces de revêtement souples, réalisées par des entoilages.

Notons cependant que des *servitudes d'utilisation* ou des commodités *de fabrication* conduisent encore à utiliser ces structures sur certains appareils modernes. C'est ainsi qu'elles subsistent dans un grand nombre d'avions de tourisme (relativement lents) où le facteur prix de revient est prépondérant. On les rencontre encore, tout au moins en partie, dans certaines constructions de voilures ou de fuselages d'appareils militaires modernes devant présenter de larges ouvertures ou de grandes facilités de réparation. L'entoilage y est d'ailleurs, très souvent, remplacé par des revêtements en bois (contreplaqués) ou même par des panneaux de tôle non reliés d'une façon efficace à l'ossature résistante.

Il est assez délicat d'établir une classification rigoureuse entre les multiples variantes entrant dans cette catégorie de structures. Le plan d'étude que nous avons adopté résulte essentiellement de considérations sur les *procédés de calcul* applicables aux diverses catégories proposées.

4.1 STRUCTURES EN TREILLIS.

4.11 Principes généraux de réalisation. — Ce procédé consiste à réaliser des *poutres triangulées*, composées de *membrures longitudinales* (ou longerons) reliés par des *entretoises* (mâts, montants ou traverses) et par des *éléments de croisillonnement* assurant la transmission d'un nœud à l'autre des efforts tranchants agissant dans le plan de chaque face.

Les longerons, mâts ou traverses furent, à l'origine, réalisés en bois et évoluèrent rapidement vers une construction métallique (tubes en alliages légers ou en acier).

Les éléments de triangulation furent longtemps réalisés par des *éléments souples* (cordes à piano ou haubans ronds ou fuselés) [1] disposés suivant les *deux diagonales* de chaque travée. La longueur de ces éléments était généralement réglable, ce qui donnait à ces structures un avantage particulier de fabrication et d'entretien. Plus récemment, on substitua à ces éléments souples des diagonales uniques réalisées par des *éléments rigides* (travaillant en compression ou en traction) généralement réalisés par des tubes.

L'assemblage entre ces divers éléments constituait une particularité, plus ou moins heureuse, propre à chaque constructeur. Nous en donnons quelques exemples sur la figure 8.

---

1. — Voir chapitre VI, § 3, et planche 13.

Signalons que la *construction soudée* réalisée par des tubes d'acier au chrome-molybdène (acier 20CD4, planche 11) a apporté une amélioration sensible à ces procédés de construction. C'est celle qui subsiste le plus, notamment pour les fuselages ou les supports-moteurs. La soudure autogène des alliages légers est également en voie d'apporter un renouveau à ces procédés de construction.

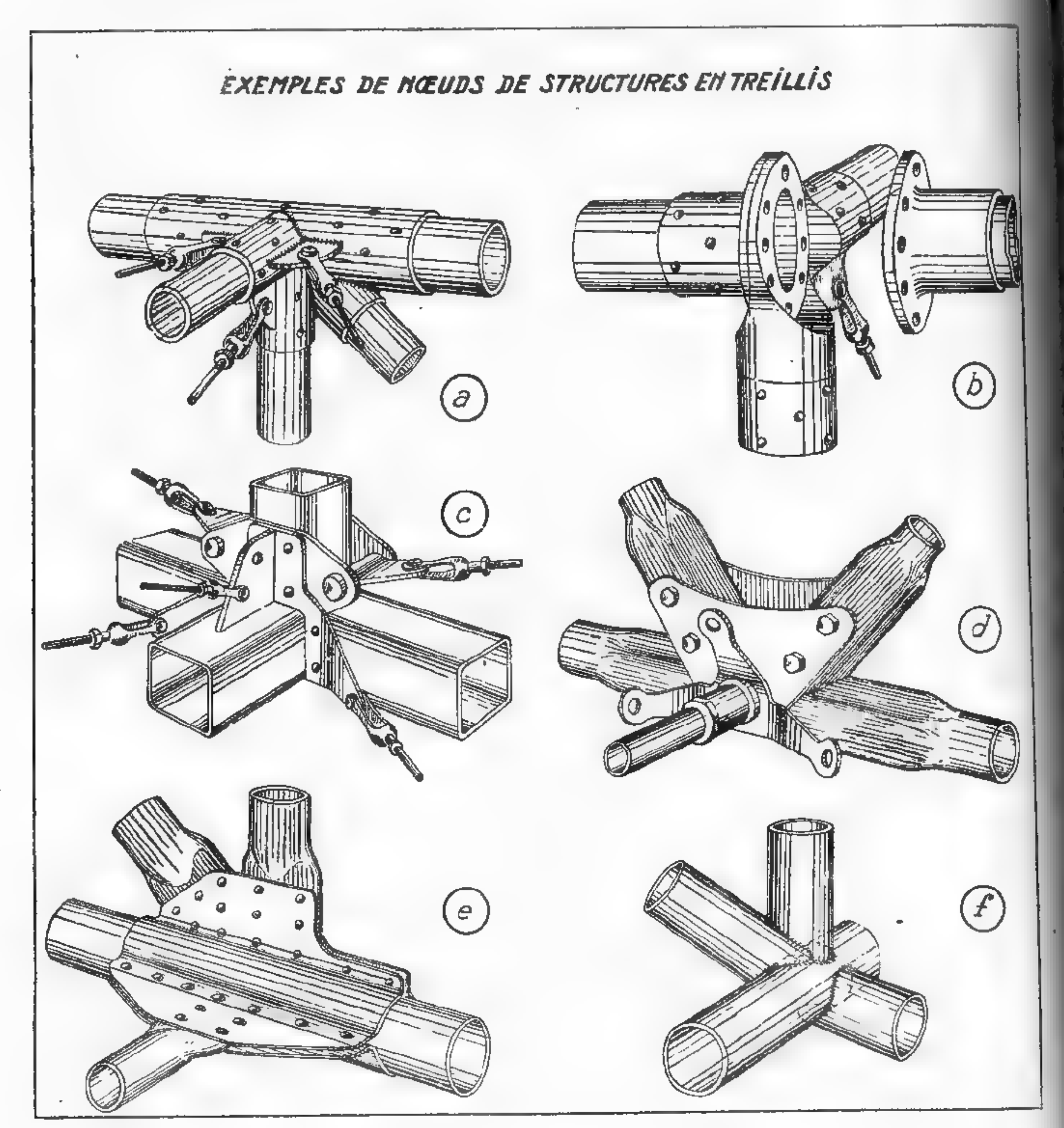


Fig. 8.

4.12 Voilures en treillis. — Les poutres en *treillis pur* s'appliquent essentiellement aux *voilures biplanes* (ou sesquiplanes).

La figure 9 donne deux aspects extérieurs classiques de ces structures, pratiquement abandonnées de nos jours. L'ossature interne de chaque plan correspondait généralement aux types de construction étudiés aux paragraphes **4.2** ou **4.3** ci-après.

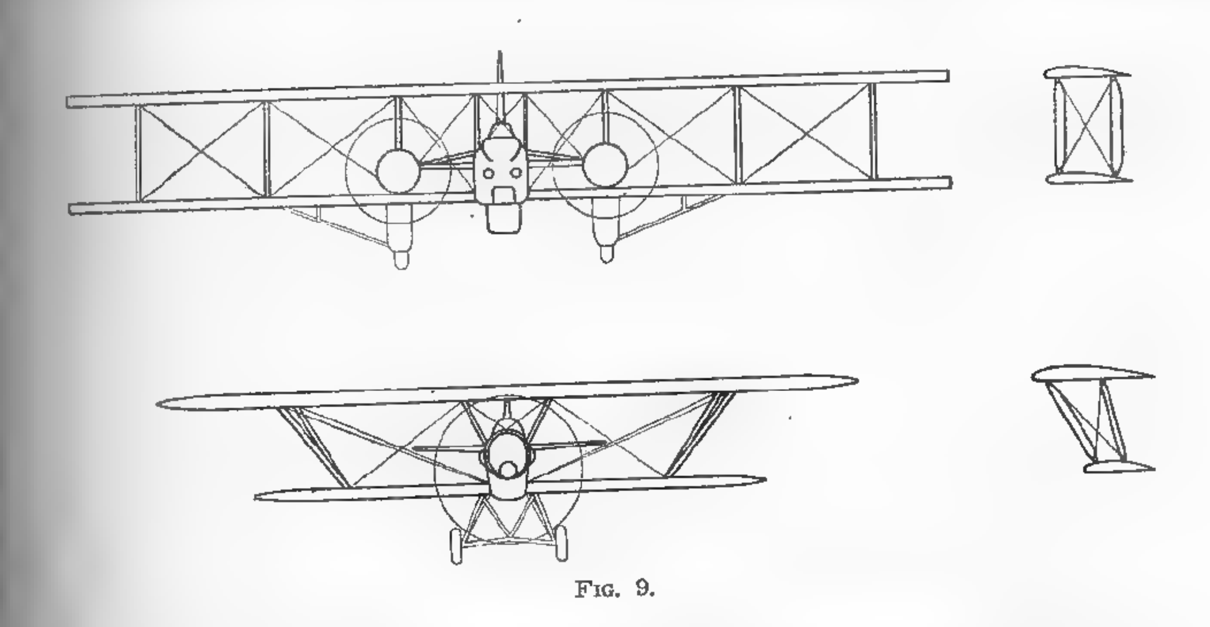


Fig. 9.

Certaines structures monoplanes (ailes épaisses) réalisées par un *treillis général intérieur au profil* (fig. 10) peuvent également s'assimiler à la catégorie de poutres en treillis [2]. Signalons au surplus que toutes les voilures sans revêtement travaillant, étudiées ci-après, possèdent une ossature triangulée assurant au moins le transport des efforts agissant dans le plan de l'aile.

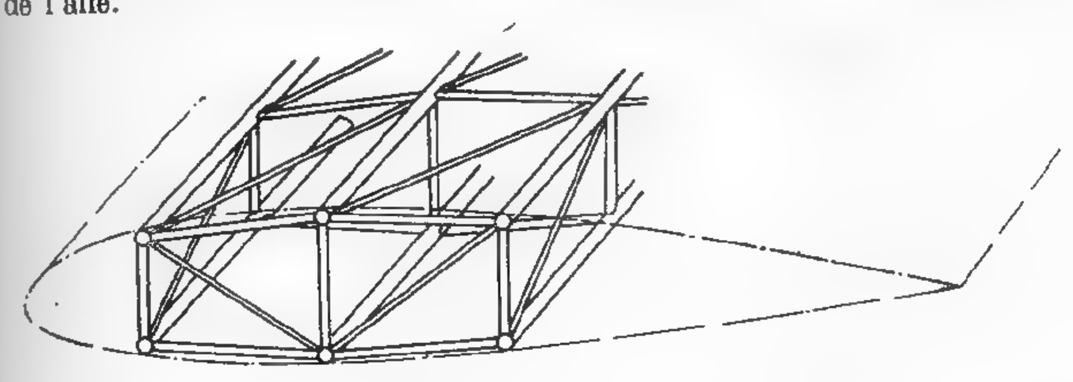


Fig. 10.

4.13 Fuselages en treillis. — L'antique « cage à poules » où l'on ne prenait même pas la peine de dissimuler sous un revêtement, l'ossature intérieure, constitue l'exemple le plus frappant de fuselage en treillis (fig. 11). L'utilisation de la soudure autogène a prolongé l'existence de cette construction où la triangulation affecte parfois des formes compliquées pour épouser le plus fidèlement possible le contour extérieur (fig. 12).

4.14 Principes généraux de calcul. — Le calcul des structures en treillis constitue une étude plus ou moins complexe de *systèmes triangulés*.

Nous renvoyons pour cela au chapitre VII où nous avons donné les principes généraux de ces calculs et plusieurs exemples d'application à des structures aéronautiques (**Planches 14, 15** et **16**). Nous renvoyons également au chapitre XVIII, paragraphe **3.**, où nous avons effectué l'étude des systèmes triangulés hyperstatiques.

---

1. — On peut également les assimiler à des multi-longerons (voir ci-après).

Rappelons que pour déterminer les *efforts axiaux* agissant dans les barres de ces systèmes (tracés de Crémona par exemple), il y a lieu d'effectuer, en premier lieu, le *transport de toutes les charges appliquées aux différents nœuds*. Cette opération s'accomplit en faisant apparaître les résultantes partielles agissant dans chaque travée et en les décomposant aux nœuds adjacents de façon à respecter l'équilibre d'ensemble [1]. Signalons également que dans le cas de *triangulations souples* les éléments diagonaux *tendus* sont seuls à considérer, car leurs efforts de calcul sont généralement supérieurs à leurs *tensions initiales* (chap. VI, § **3.3**). La discrimination des diagonales tendues et comprimées nécessite parfois des calculs par approximations.

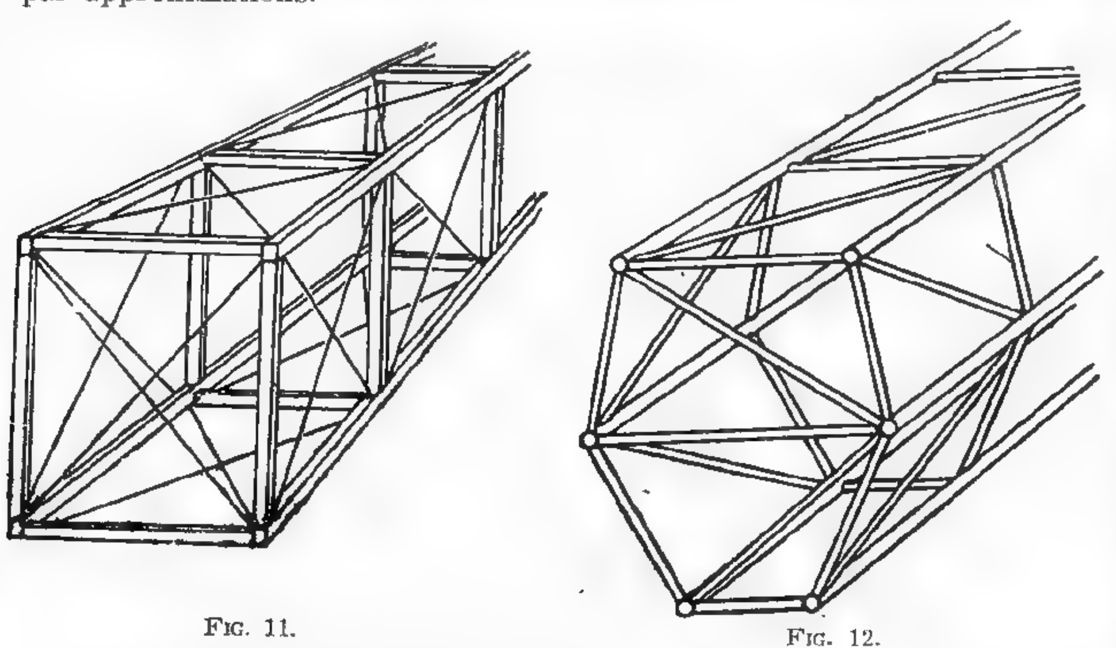


FIG. 11. FIG. 12.

Il y a lieu, enfin, de tenir compte des *efforts complémentaires de flexion* qui agissent sur les membrures par suite de la répartition réelle des charges entre les nœuds. Un longeron de voilure multiplane, par exemple, se comporte, à cet égard, comme une poutre continue sur plusieurs appuis (constitués par les mâts) chargée par les efforts de portance qui l'intéressent (réactions d'appui des diverses nervures).

Les contraintes correspondantes sont d'autant plus importantes qu'elles se trouvent *amplifiées* par la combinaison : flexion + compression axiale (chap. XVI, § **6.**).

Signalons, enfin, que certaines structures forment des ensembles hyperstatiques très complexes, nécessitant des calculs laborieux. Les structures modernes (ailes cantilever) jouissent, à cet égard, d'une simplicité extérieure remarquable.

4.2 VOILURES A LONGERONS INDÉPENDANTS.

4.21 Aile bilongeron entoilée [2] (fig. 13). — Cette structure comporte deux *longerons* dont l'écartement est maintenu par des *entretoises* (ou des nervures) non encastrées sur eux. La triangulation dans le plan de l'aile est, généralement, réalisée par des cordes à piano. Outre leur appui sur le

1. — Cette opération peut également s'accomplir en effectuant préalablement l'équilibre d'éléments secondaires (nervures d'aile par exemple).

2. — Nous conviendrons d'une façon générale de désigner par entoilage toute surface de revêtement n'apportant aucun secours à la résistance d'ensemble

fuselage, les longerons prennent généralement réaction sur les mâts intermédiaires (voilures biplanes) ou sur les mâts obliques ou les haubans (voilures monoplanes haubannées).

Les *nervures*, destinées à supporter l'entoilage, et donc à recevoir les charges aérodynamiques, reposent simplement sur les longerons. Elles constituent, à cet égard, des poutres sur deux appuis dont l'équilibre de principe est schématisée figure 13 *b*.

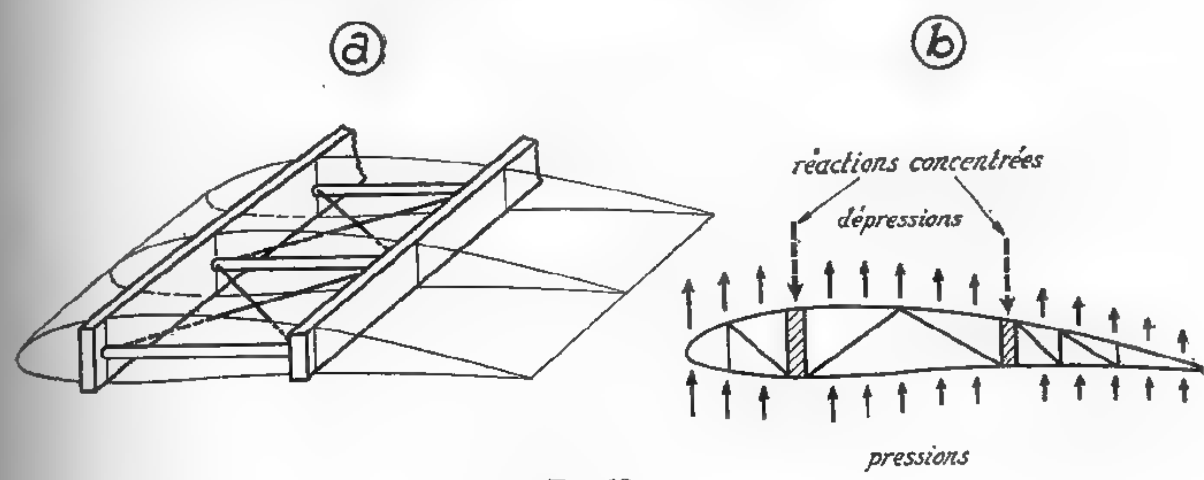


Fig. 13.

Le centre de poussée aérodynamique étant sujet à des déplacements dans le sens de la profondeur des profils, il s'ensuit que chacun des longerons peut, tour à tour, supporter en flexion la presque totalité des charges, ou même une charge supérieure à celle d'ensemble (centre de poussée extérieur à l'espace inter-longeron).

En d'autres termes, un moment de torsion ne peut être transmis que par *flexion différentielle* des longerons (fig. 14) et nous savons que ce procédé engendre des *déformations considérables* quand la longueur de la poutre est importante (chap. XIII, § **6.1**).

C'est pourquoi ce type de structure est pratiquement abandonné dans la construction des voilures monoplanes en porte-à-faux.

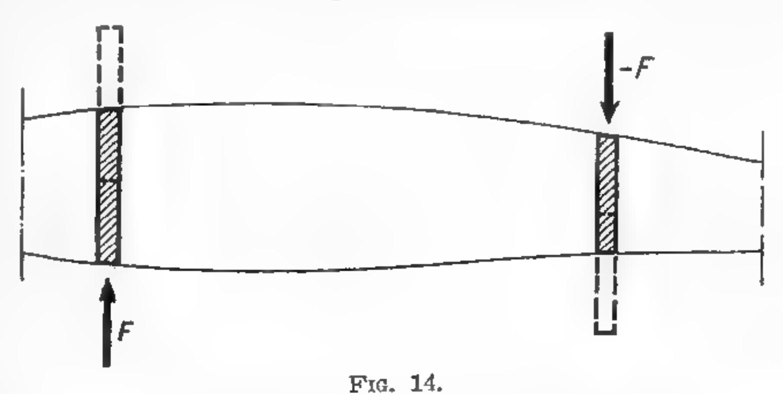


Fig. 14.

4.22 Aile multilongeron entoilée. — On a parfois réalisé, selon le même principe général que ci-dessus, des ailes comportant plus de deux longerons indépendants entre eux. Cette disposition ne procure en pratique aucun avantage. En effet, le système devient *hyperstatique* et l'on est obligé, en général, d'avoir recours à des hypothèses défavorables pour le résoudre, d'où un poids de structure superflu ou une incertitude sur la résistance de l'ensemble.

4.3 VOILURES A LONGERONS SOLIDARISES.

La trop grande souplesse en torsion de la construction à longerons indépendants entraîne des risques graves de *vibrations critiques*. La *solidarisation des longerons* a constitué une première étape vers la recherche de ce facteur capital de *rigidité en torsion*. Plusieurs variantes ont été réalisées :

4.31 Solidarisation par entretoises encastrées. — On remplace alors les entretoises (ou les nervures) simplement appuyées, par des éléments solidement *encastrés* sur les longerons (fig. 15 *a* et 15 *b*). Au niveau de ces entretoises, la dénivellation en flexion du longeron le plus chargé ne peut s'opérer qu'en entraînant une déformation telle que celle schématisée par la figure 15 *c*. Pour que ce système soit efficace, il est nécessaire que chaque longeron possède une *rigidité propre* en torsion appréciable.

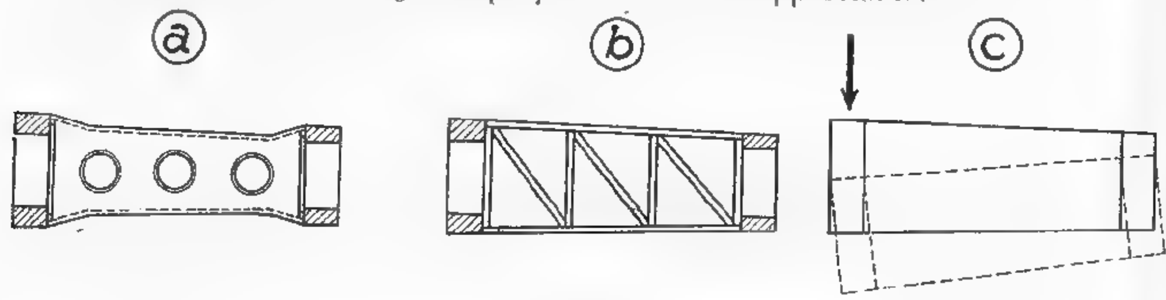


Fig. 15.

L'ensemble constitue un *système hyperstatique* généralement laborieux à résoudre, même si l'on néglige la déformabilité propre des entretoises. Il convient, en effet, d'effectuer une section de coupure par entretoise [1] et de tenir compte des rigidités propres en flexion et torsion de chaque longeron.

Signalons que, dans certaines structures, cette solidarisation ne s'effectue qu'à l'aplomb de quelques *nervures spéciales* largement espacées, et dont la structure forte est déjà nécessitée par des raisons d'aménagement (nervures de tranches-moteurs ou de bordure de réservoirs, par exemple).

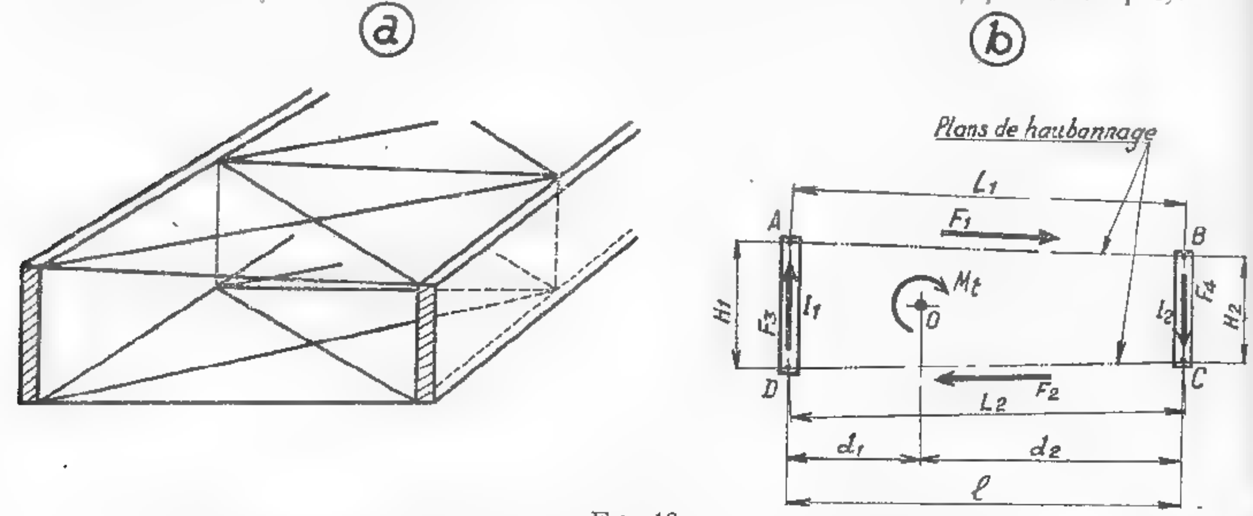


Fig. 16.

4.32 Solidarisation par double plan de haubannage (fig. 16). — Cette solution est acceptable pour les ailes épaisses. L'ensemble constitue alors une *poutre à faces planes triangulées* où la torsion est transmise par quatre composantes agissant respectivement dans le plan de chaque face (fig. 16 *b*).

1. — L'homothétie de la structure peut, cependant, dispenser d'opérer de multiples sections. On établit alors l'emplacement d'un axe de torsion du système.

Signalons que l'on peut admettre que chaque composante est proportionnelle à la dimension de la face qu'elle intéresse, soit

$$\frac{F_1}{L_1} = \frac{F_2}{L_2} = \frac{F_3}{H_1} = \frac{F_4}{H_2} = \tau.$$

Cette hypothèse revient à admettre qu'une torsion n'engendre aucune réaction longitudinale [2] (analogie avec la torsion des corps creux à parois minces, chap. XIII, § 4.1).

On arrive d'ailleurs à un « flux de cisaillement apparent » d'intensité

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega} \qquad \text{(force par unité de longueur)}$$

avec Ω = aire ABCD (corps creux fictif limité par le contour résistant).

On adopte, dans cette hypothèse, comme *axe de référence des moments de torsion*, la droite joignant les *centres de flexion* O des sections droites. Ces centres sont situés aux « *foyers des inerties* » des deux longerons, soit à des distances telles que

$$\frac{d_1}{I_2} = \frac{d_2}{I_1}$$

d'où

$$d_1 = l\,\frac{I_2}{I_1 + I_2} \qquad \text{et} \qquad d_2 = l\,\frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

avec I_1 et I_2 = moments d'inertie respectifs, en flexion verticale, de chacun des longerons.

Nous trouverons la démonstration de cette propriété au chapitre XXI, lors du calcul des structures bilongerons à caisson intermédiaire de torsion. La structure étudiée ci-dessus constitue d'ailleurs une étape intermédiaire vers celle citée en référence. Elle renforce d'une façon très appréciable la rigidité en torsion du bilongeron.

4.4 VOILURES EN POUTRES DE WARREN.

4.41 Description (fig. 17). — Ce type de structure de voilure comporte deux longerons reliés entre eux par un système de *nervures obliques* encastrées deux à deux, aux mêmes points, sur chaque longeron.

4.42 Passage des efforts. — L'*axe de référence* servant au calcul des efforts est également, dans ce type de structure, la droite joignant les *centres de flexion* (foyers des inerties) du système bilongeron.

On calcule ainsi aisément la participation de chaque longeron à la transmission de la *flexion* d'ensemble (participation proportionnelle à l'inertie de chacun d'eux).

Le passage de la *torsion* s'effectue de la façon suivante [2] :

Soit un moment de torsion M_t appliqué dans la section droite comprenant l'extrémité AB de la nervure ABCD (fig. 17). Il est assimilable à un couple de composantes

$$\pm F = \pm \frac{M_t}{H}.$$

1. — Cette hypothèse est valable pour les structures longues et hors de la proximité de leurs encastrements. Elle peut s'appliquer à toutes les structures triangulées possédant ces caractéristiques.

2. — Nous supposerons, pour simplifier les démonstrations, les hauteurs des deux longerons égales et les longerons parallèles. Le principe est identique dans le cas général de longerons convergents et de hauteurs différentes.

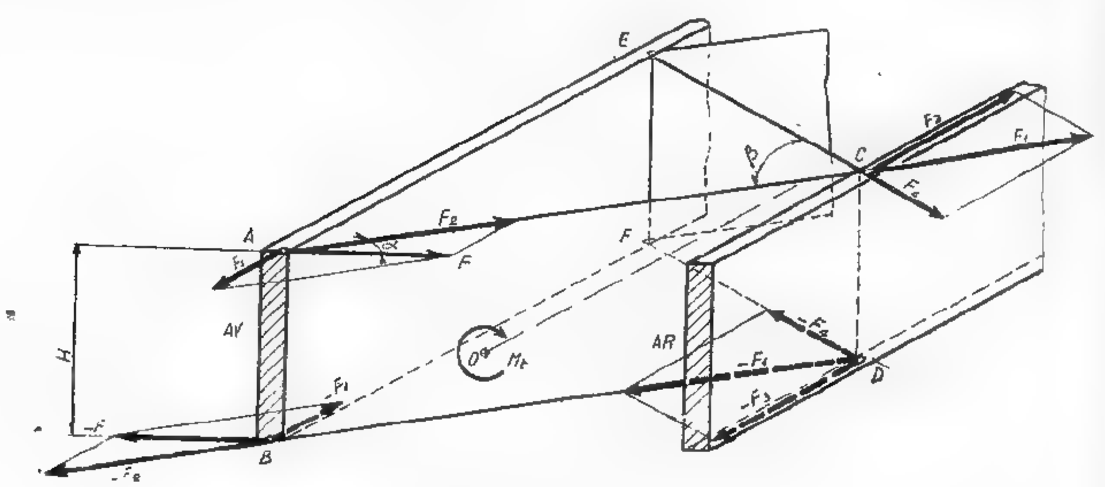


Fig. 17.

Chaque force ± F se décompose en

$\pm F_1 = \pm F$ tg suivant le plan du longeron AV,

$\pm F_2 = \pm \frac{F}{\cos \alpha}$ suivant le plan de la nervure oblique ABCD.

Le premier groupe crée une *flexion secondaire* du longeron AV de moment

$$M_t = F_1 H = M_t \text{ tg } \alpha.$$

Les composantes ± F_2 sont transmises par *flexion de la nervure oblique* $\left(\text{moment constant : } M_2 = \frac{M_t}{\cos \alpha}\right)$ jusqu'à l'encastrement CD où elles donnent :

$\pm F_3 = F_1 \sin \beta$ suivant le longeron AR,
$\pm F = F_1 \cos \beta$ suivant la nervure oblique CDEF.

On évalue ainsi une flexion secondaire du longeron AR

$$M_3 = F_3 H = M_t \text{ tg } \alpha \sin \beta$$

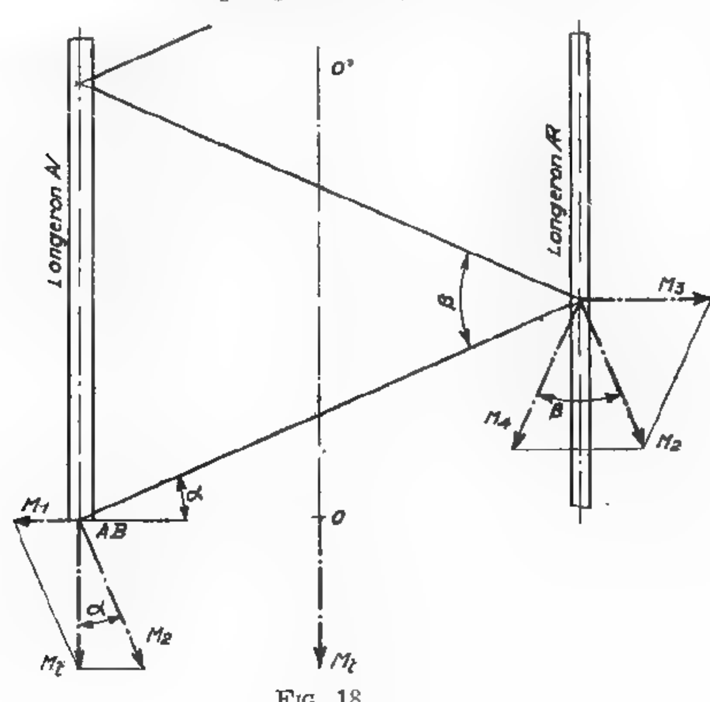


Fig. 18.

et une flexion de la nervure oblique CDEF

$$M_4 = F_4 H = M_t \text{ tg } \alpha \cos \beta.$$

On voit donc que M_t est transmis, de proche en proche, par des *flexions pures* (ou circulaires) des différents éléments.

Remarques. — *a*) Nous avons raisonné, ci-dessus, sur les *composantes* des moments, afin de concrétiser le phénomène. On obtient, en réalité, un calcul plus élégant en faisant apparaître directement les *vecteurs-moments* qui se décomposent selon les indications de la figure 18 (mêmes résultats).

b) Quand les longerons AV et AR sont de *hauteurs différentes*, les moments fléchissants varient le long des nervures, car ils sont accompagnés d'*efforts tranchants*. Ceux-ci peuvent être mis en évidence par les composantes verticales obtenues alors, en décomposant les efforts F en A et B. Ils peuvent également se calculer directement à l'aide des moments aux emplantures, connaissant l'angle de convergence des semelles des nervures (formules analogues à celle permettant le calcul de « l'effort tranchant réduit » dans une poutre convergente : chap. IX, § **3.8**).

Il en est de même dans les longerons quand leurs hauteurs varient.

4.43 Conclusion. — Ce procédé de construction renforce considérablement la rigidité en torsion du bilongeron. Il est comparable, à ce point de vue, aux structures à revêtement travaillant. Il garde sur ces dernières, l'avantage de permettre un aménagement plus facile de l'aile, par suite des grands espaces libres entre les nervures obliques. Cette considération explique son emploi très fréquent sur les avions militaires (logement des armes ou des bombes).

Signalons qu'on l'utilise parfois en lui adjoignant un revêtement travaillant. L'ensemble devient alors surabondant pour le calcul en torsion.

4.5 VOILURES TYPE « MONOSPAR ».

4.51 Description. — Ce procédé de construction, fort ingénieux, réalise en quelque sorte une *poutre de Warren à longeron unique.*

La flexion normale est, en effet, entièrement transmise par un *monolongeron* dont l'axe constitue donc l'axe de référence des moments de torsion.

Ce longeron unique est étayé par une succession de *pyramides* à bases rectangulaires jointives, pouvant être réalisées, soit par des *membrures rigides* (tubes par exemple, voir fig. 19), soit par des *éléments souples* (cordes à piano, voir fig. 20). Il est nécessaire, dans ce dernier cas, d'établir un jeu de pyramides de part et d'autre du monolongeron et d'étayer les sommets par des mâts rigides perpendiculaires au longeron (procédé Monospar proprement dit).

Signalons que les sommets de ces pyramides sont, en général, réunis entre eux, soit par une barre (fig. 19 *b*), soit par des cordes à piano (fig. 20 *b*). Le rôle essentiel de ces éléments de liaison est d'assurer la *transmission des efforts agissant dans le plan de l'aile.* L'ensemble constitue, en effet, à ce titre, un bilongeron (monolongeron + barre, ou monolongeron + corde tendue) triangulé par les arêtes des pyramides.

4.52 Transmission de la torsion. — Le processus de transmission d'un moment de torsion M_t est schématisé sur la figure 19 *a*, dans le cas de la *structure à barres rigides.*

On voit que le couple de torsion M_t, équivalent à deux composantes

$$\pm F = \pm \frac{M_t}{H}$$

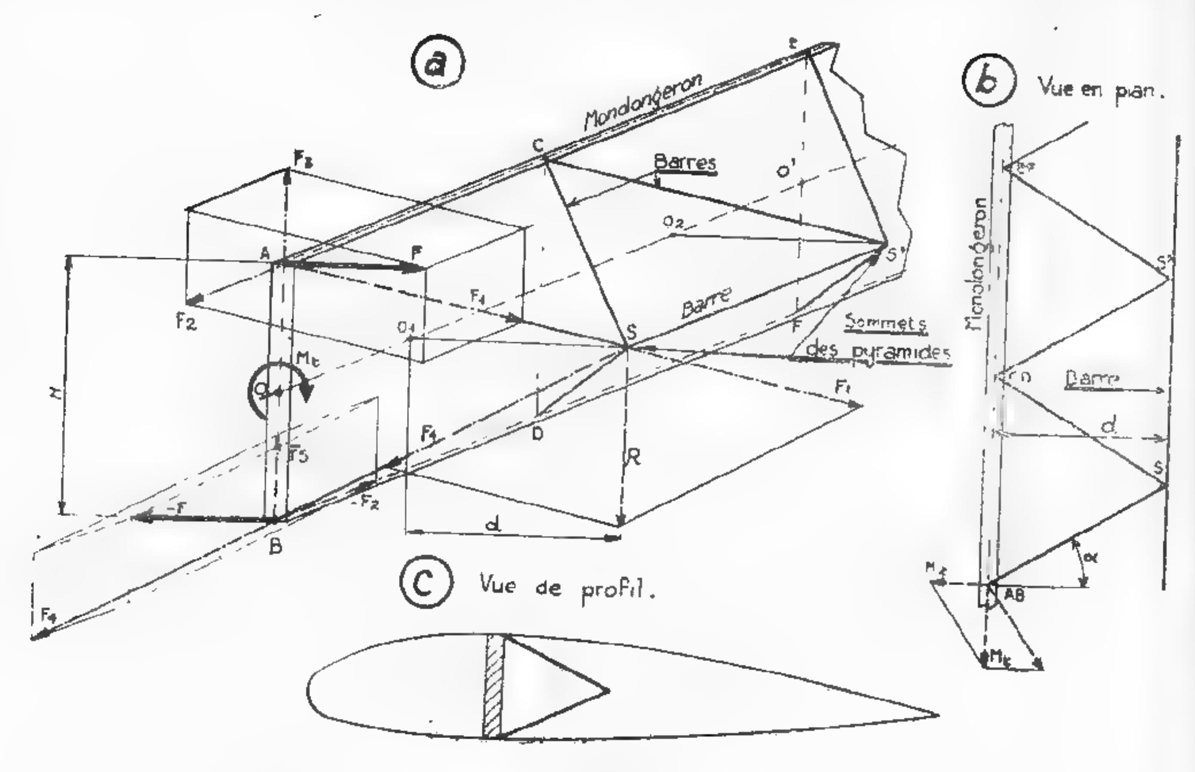


FIG. 19.

en A et B, donne lieu à :

- des efforts axiaux F_1 et F_4 dans les barres SA et SB ;
- des efforts $\pm$ F_2 suivant le longeron, qui créent un *moment fléchissant secondaire* de celui-ci : $M_1 = F_2 H = M_t$ tg α (fig. 19 *b*) ;
- des efforts F_3 et F_5 qui engendrent un effort tranchant complémentaire : $T_1 = F_3 + F_3$ dans le longeron.

Les efforts F_1 et F_4 se composent au sommet S et donnent une *résultante* R *parallèle au longeron* et d'intensité

$$R = \frac{M_t}{d}$$

(avec d = distance du sommet S au plan médian du longeron).

La somme des projections devant être nulle on a, évidemment

$$T_1 = F_3 + F_5 = -R.$$

(Le couple M_t se traduit donc finalement par deux composantes $\pm$ R.)

La résultante R donne, à son tour, des *efforts axiaux* dans les barres SD et SC (décomposition non représentée sur la figure) et la torsion chemine ainsi, de proche en proche, jusqu'au fuselage, en donnant seulement dans le longeron des moments fléchissants secondaires M_1 et des efforts tranchants complémentaires T_1.

Dans le cas de la *structure souple* (fig. 20), seules les cordes tendues travaillent [1], ce qui fait que l'ensemble à double pyramide demeure *isostatique*.

Avec le sens de sollicitation représenté sur la figure 20 *a* les « *cordes travaillantes* » seraient : AS_1, BS_2, S_1D, S_2C, CS'_1, DS'_2, S'_2F et S'_2E. Notons que les mâts S_1S_2 et $S'_1S'_2$ encaissent des efforts internes de compression.

Le monolongeron est soumis aux mêmes efforts complémentaires que dans l'ossature rigide.

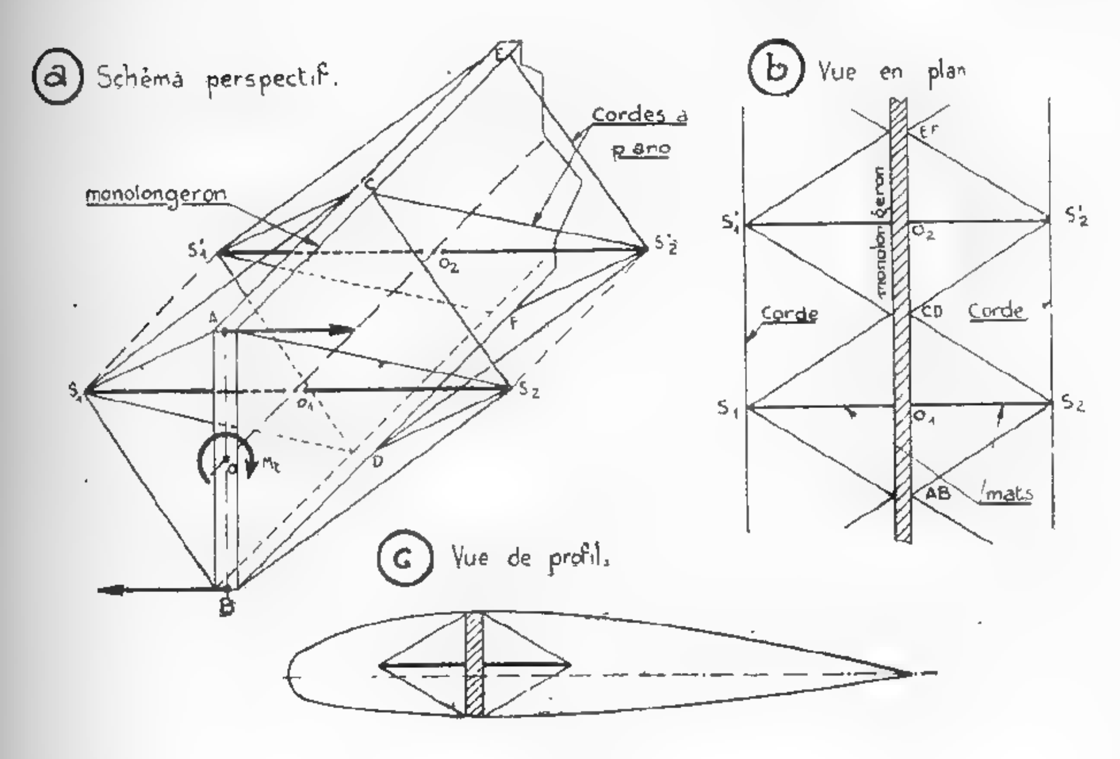


Fig. 20.

4.53 Remarques. — Ce procédé de construction présente les mêmes avantages que ceux exposés en **4.3** (avantages accrus, d'ailleurs, par l'absence du longeron arrière).

On a utilisé des procédés analogues sur certains *fuselages en treillis*, pour réaliser localement, des « *triangulations déportées* » nécessitées par la présence de larges ouvertures interdisant le passage de diagonales rectilignes.

4.6 CONSTRUCTION GEODESIQUE.

Ce procédé de construction, utilisé par la Société Vickers-Armstrong, revient à réaliser un véritable revêtement travaillant discontinu. Il cons-

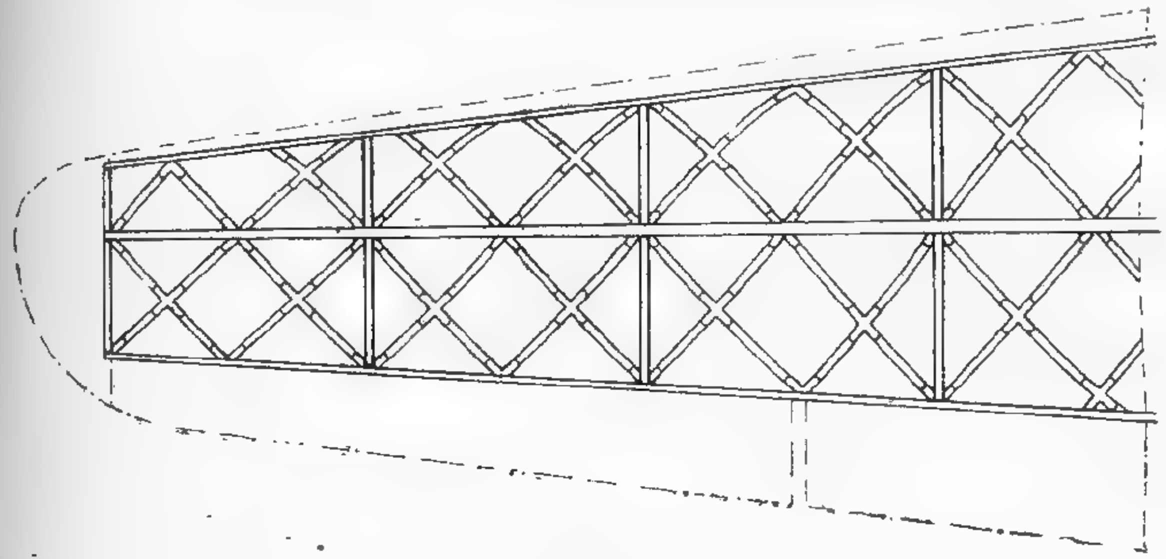


Fig. 21.

1. — Tout au moins dès que les compressions ont détruit les tensions initiales (Ch. VI, § 3.3).

titue à ce titre une étape intermédiaire entre les types de structure 1 et 3 (§ 3.).

La figure 21 représente le schéma d'une aile réalisée selon ce procédé. La *flexion* est entièrement confiée à un monolongeron. Par contre, la *torsion* et les *efforts dans le plan de l'aile* sont transmis par un *réseau de forts profilés, sensiblement orthogonaux, épousant la forme du profil.* L'orientation de ces profilés se fait suivant des lignes de longueur minimum sur la surface à revêtir, d'où le nom de « construction géodésique » donné à cette structure.

L'ensemble est recouvert de toile.

Les « flux de cisaillement » s'exerçant sur le corps creux ainsi réalisé cheminent par des tractions ou compressions dans les membrures obliques. Ces membrures constituent, à ce titre, un système triangulé complexe.

Bien que galbées, les membrures restent stables sous l'action de leurs efforts axiaux, par suite des « tendances opposées » présentées par deux éléments orthogonaux à leur point de rencontre.

L'intérieur de l'aile est ainsi dégagé de toute nervure, ce qui favorise largement l'aménagement (réservoirs de combustible en particulier).

Cet avantage compense, dans une certaine mesure, la complexité de cette construction.

On réalise également des fuselages suivant le même principe. Ils sont comparables aux fuselages-coques comme procédés généraux de calcul et comme avantages d'utilisation.

CHAPITRE XXI

CALCUL DES STRUCTURES A AMES MINCES

0. INTRODUCTION

Les *structures à âmes minces*, désignées encore par « *structures à revêtement semi-travaillant* », sont d'un emploi très répandu en construction aéronautique.

Elles ne constituent cependant qu'une étape intermédiaire vers la solution, théoriquement idéale, des structures à revêtement totalement travaillant ou « structures-coques ».

Leur succès est dû, en grande partie, à la simplicité de construction qu'elles présentent, relativement à ce dernier groupe de structures. Elles constituent, en outre, dans bien des cas, la solution pratiquement idéale, notamment pour les constructions légères ou peu chargées.

Nous avons appris, au chapitre XIX, à évaluer les « *sollicitations complémentaires* » consécutives à l'*instabilité* des voiles minces. Ces théories s'appliquent, d'une façon générale, à toutes les structures étudiées ci-après dont les « *âmes* », non raidies longitudinalement, présentent des contraintes critiques inférieures à celles qui seraient engendrées par leurs charges usuelles. Pour alléger l'exposé, nous ne donnerons, cependant, que l'expression de leurs *contraintes générales*, auxquelles il conviendra d'ajouter, éventuellement, celles dues à ces sollicitations complémentaires.

Nous donnerons au paragraphe **1.** quelques considérations générales et au paragraphe **2.** une étude théorique des poutres à âmes minces. Les paragraphes suivants traitent de quelques applications, les plus répandues, de ce procédé de construction. Nous avons insisté d'une façon particulière sur l'un des problèmes essentiels relatifs à ces structures, qui est celui de « l'*introduction des charges* ».

1. CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

1.1 DEFINITION.

Les structures à âmes minces ont été définies, d'une manière générale, au chapitre XX, paragraphe **2.2.** lors de la classification des différents types de constructions aéronautiques.

Rappelons qu'une « *poutre à âmes minces* » est constituée par :

a) des éléments longitudinaux concentrés appelés *semelles* qui assurent, théoriquement, seuls la transmission de la totalité des *efforts normaux* (traction ou compression générales, ou efforts normaux provenant de la flexion) ;

b) des parois minces appelées *âmes* (voir remarque § **1.21**), qui n'ont, théoriquement, pour rôle que d'assurer par *cisaillement* la transmission des *efforts tangentiels* (flux de cisaillement provenant des efforts tranchants ou des moments de torsion). Ces éléments minces assurent donc, en quelque

sorte, une « triangulation » entre les semelles, à l'exclusion de toute participation à la résistance aux efforts normaux (voir remarque § 1.22).

1.2 REMARQUES

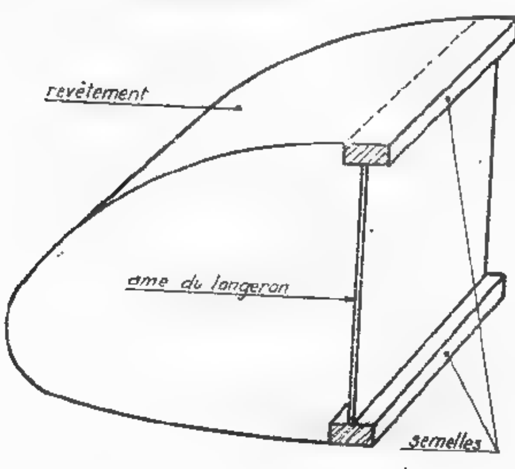


Fig. 1.

1.21 Extension de la notion d'âme mince. — La définition ci-dessus permet de concevoir que le terme « *âme mince* » prend, dans les structures étudiées présentement, un sens plus général que celui que nous lui avions attribué jusqu'à maintenant (panneau *plan* et mince reliant les deux semelles d'un longeron).

On englobe, en effet, sous la désignation commune « d'âme mince », tout panneau mince *plan ou galbé* reliant deux semelles de la structure [1].

Exemple. — Dans la structure représentée figure 1 (monolongeron avec caisson de torsion de bec d'attaque), le *revêtement* du bec constitue une âme mince au même titre que l'*âme* du longeron elle-même.

1.22 Ames minces idéales et réelles. — Il est aisé de concevoir que la définition précédente fixant impérativement les rôles respectifs des âmes et des semelles, vis-à-vis de la transmission des efforts, ne constitue, en réalité, qu'une « limite idéale ».

On sait, en effet (chap. XIX), que toute âme mince participe au même titre que les semelles, à la transmission des efforts normaux, tant que sa limite de stabilité (ou contrainte critique) n'est pas atteinte.

On sait également, qu'au delà de cette limite, une âme mince assure encore une participation réduite mise en évidence par la notion très pratique de « *largeur équivalente* » (chap. XIX, § 2.43).

Cependant, ces éléments étant minces, ou peu raidis, admettent des contraintes critiques très faibles et, par suite, des « sections équivalentes » peu importantes. On peut d'ailleurs, en pratique, inclure ces sections équivalentes dans celles des semelles concentrées, ce qui assure une concordance plus grande entre la théorie et la réalité, tout au moins en ce qui concerne les contraintes normales.

En résumé, la théorie des poutres à âmes minces constitue un « état idéal », souvent très voisin de la réalité, qui a pour avantage essentiel de simplifier considérablement les calculs.

Signalons encore que certaines structures sont considérées comme des poutres à âmes minces ou comme des coques selon l'orientation ou la grandeur des charges qu'elles transmettent.

Exemple. — Nous verrons que la structure représentée figure 1 est souvent considérée :

— comme une poutre à âmes minces pour la transmission des « efforts normaux » (charges parallèles à l'âme du longeron) ;
— comme une coque pour la transmission des « efforts de traînée » (charges perpendiculaires à l'âme du longeron, toujours beaucoup plus faibles que les charges normales).

---

1. — Cette convention a pour but essentiel de simplifier l'exposé.

Une même structure peut, enfin, comporter des âmes minces et des parois assimilables à des coques, pour une même catégorie d'efforts appliqués. Leur discrimination s'effectue essentiellement par comparaison entre leurs charges réelles et critiques.

1.3 INFLUENCE DE LA CONVERGENCE DES SEMELLES.

Généralement, les semelles des poutres à âmes minces ne sont pas parallèles entre elles.

On sait que leurs efforts normaux équilibrent alors, par suite de cet « *effet de convergence* », une certaine fraction des efforts tranchants (chap. IX, § **3**.84).

Nous conviendrons toujours de désigner par « *effort tranchant réduit* » T' la part d'effort tranchant restant à transmettre par les âmes (bien que cette part puisse être, dans certains cas, supérieure à l'effort tranchant d'ensemble, voir chap. IX, § **3**.852).

L'expression de ces efforts tranchants réduits sera donnée dans chaque cas particulier étudié.

1.4 PROPRIETES FONDAMENTALES DES AMES MINCES.

1.41 Flux de cisaillement.

Règle : Dans une section droite d'une structure, le flux de cisaillement est d'intensité constante le long d'une même âme mince [1].

Démonstration : La démonstration de cette règle s'effectue simplement en s'aidant de la propriété essentielle établie au chapitre IX, paragraphe **3**.5, lors de l'étude du glissement longitudinal de flexion.

Nous avons vu, en effet, que le glissement longitudinal assurait la *mise en charge* des différentes « couches de fibres » d'une poutre fléchie. Une *variation* du flux de cisaillement longitudinal, et par suite du flux transversal réciproque, ne peut donc s'effectuer que de part et d'autre d'un élément *mis en charge longitudinalement*. Or, par définition, aucun élément d'une âme mince n'est chargé longitudinalement. Le flux de cisaillement est donc d'intensité constante, dans une même section droite, entre les deux semelles terminant l'âme considérée. Si cette âme est d'épaisseur constante (cas le plus fréquent), la *contrainte de cisaillement* est donc également constante.

1.42 Résultante de cisaillement.

1.421 *Données.* — Considérons (fig. 2 *a*) une section droite d'une âme mince galbée de forme quelconque. Cette âme est délimitée par les deux semelles A et B, distantes de h, et elle est soumise à un flux de cisaillement (constant) d'intensité τ.

1.422 *Grandeur et direction de la résultante.* — Décomposons l'âme AB en une succession d'éléments délimités par les points 1, 2, 3... distants entre eux de Δl, cette distance étant suffisamment petite pour que l'âme puisse être considérée comme étant rectiligne dans chaque intervalle.

---

1. — Rappelons que l'on désigne par intensité du flux (ou écoulement) de cisaillement la grandeur de la force s'exerçant, *par unité de longueur*, tangentiellement au contour de l'âme (chap. IX, § **3**.54). Le flux τ est relié à la contrainte de cisaillement t par l'expression : $\tau = te$, avec e = épaisseur de l'âme.

Chaque élément reçoit donc une force, appliquée suivant sa direction, orientée dans le sens du flux et ayant pour intensité

$$\Delta R = \tau \Delta l.$$

Formons le *dynamique* de ces forces ΔR à une certaine échelle des forces (voir fig. 2 *b*).

Il est clair que ce dynamique, reproduit à une échelle près, le contour de l'âme AB, cette « échelle relative » étant

$$\frac{\text{fig. 2 } b}{\text{fig. 2 } a} = \frac{\Delta R}{\Delta l} = \frac{\tau \Delta l}{\Delta l} = \tau.$$

La *résultante* R joignant les points terminaux *a* et *b* du dynamique, mesure donc

$$\boxed{R = \tau\, h.}$$

C'est l'expression de l'*intensité, ou grandeur, de la résultante* qui est toujours égale, entre deux points quelconques d'une même âme, au produit

flux × distance (*rectiligne*) *entre ces deux points.*

La *direction* de la résultante est évidemment (fig. 2) *parallèle* à la droite AB joignant les deux points considérés.

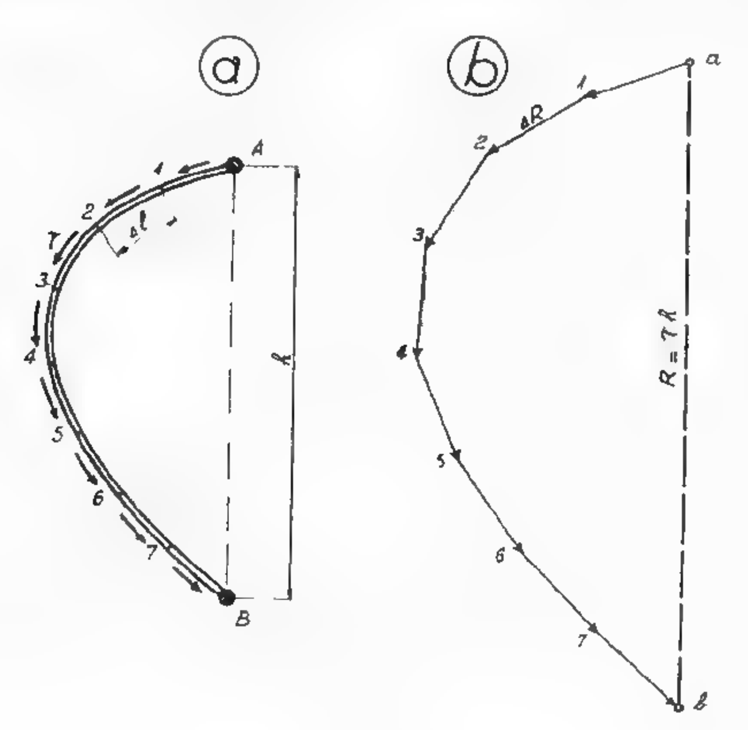


Fig. 2.

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

La grandeur et la direction de la résultante de cisaillement d'une âme mince ne dépendent que de la grandeur et de l'orientation de la droite joignant les points extrêmes considérés (semelles par exemple). *Elles sont indépendantes de la forme de l'âme entre ces deux points.*

1.423 *Position de la résultante : Axe de cisaillement.* — Cette posi-

tion pourrait se déterminer à l'aide d'un *funiculaire* tracé en s'aidant du dynamique de la figure 2 *b*. La démonstration ci-dessous est plus rapide.

Considérons l'un des éléments Δl du contour de l'âme, l'élément 2-3, par exemple (fig. 3 *a*).

Sa résultante propre de cisaillement : $\Delta R = \tau \Delta l$ engendre, par rapport à un point O arbitrairement choisi sur AB, un *moment élémentaire*

$$\Delta\mu = r\ \Delta R = \tau\ r \Delta l.$$

Or, le produit $r\Delta l$ représente le double de l'aire du triangle 0-2-3, soit

$$r\ \Delta l = 2\ \Delta\Omega$$

d'où

$$\Delta\mu = 2\ \tau \Delta\ \Omega.$$

Le *moment total* engendré par le flux, de résultante R, agissant entre A et B vaut donc

$$\mu = \Sigma\ \Delta\mu = 2\ \tau\ \Sigma\ \Delta\Omega = 2\ \tau\Omega$$

en désignant par Ω *l'aire totale délimitée par le contour de l'âme mince*[1] *et la droite* AB.

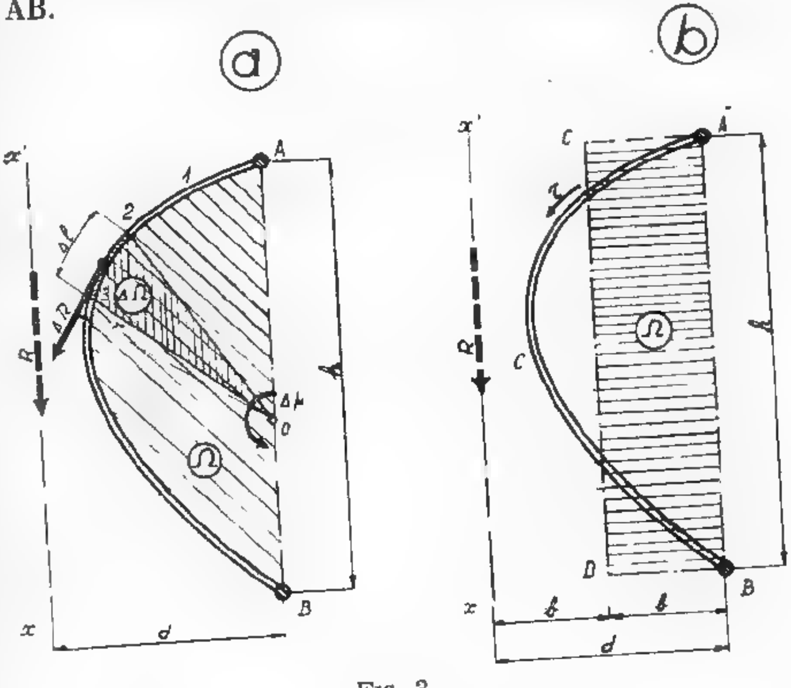


FIG. 3.

Ce moment est équivalent, en valeur absolue, à celui créé par le *décalage d existant entre la résultante* R *et la droite de fermeture* AB, soit

$$2\ \tau\ \Omega = R\ d = \tau\ h\ d$$

d'où l'on tire

$$\boxed{d = \frac{2\Omega}{h}}.$$

Cette distance d définit la position de *l'axe de cisaillement xx'* de l'âme mince : droite parallèle à la droite de fermeture AB, décalée d'une distance d vers la partie convexe de l'âme. (Voir remarque *b* ci-après.)

1. — Ce contour doit, en toute rigueur, être compté au milieu de l'épaisseur de l'âme.

Remarques. — *a*) En désignant par b la largeur du rectangle ABCD *équivalent* à l'aire Ω (fig. 3 *b*), c'est-à dire telle que

$$b\ h=\Omega \qquad \text{soit} \qquad b=\frac{\Omega}{h}$$

on voit que

$$\boxed{d=2\ b.}$$

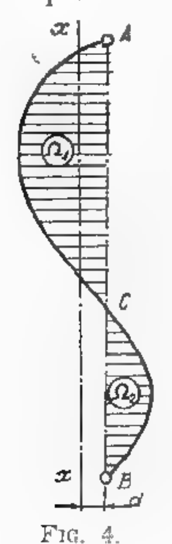


Fig. 4.

La dimension b se désigne encore par la « *hauteur moyenne* » de l'arc ACB. ***L'axe de cisaillement est décalé du double de cette hauteur moyenne.***

b) Dans le cas (théorique) d'une âme de contour sinueux telle que l'âme ACB de la figure 4, l'aire Ω doit être évaluée en se donnant un *sens positif* d'un côté de AB, ce qui donne, par exemple, en valeur absolue

$$\Omega=\Omega_1-\Omega_2.$$

Le décalage

$$d=\frac{\Omega_1-\Omega_2}{h}$$

est alors compté dans le sens positif adopté pour les surfaces.

c) On voit que la position de l'axe de cisaillement d'une âme mince ne dépend que des *caractéristiques géométriques* (c'est-à-dire de la forme) de cette âme. Elle est indépendante des charges appliquées.

d) Ne pas confondre l'axe de cisaillement d'une âme mince avec celui d'une surface mince, de même contour, mais participant à la transmission des efforts normaux de flexion. Ces surfaces sont alors assimilables à des fragments de *coques*. C'est, par exemple, le cas des *profilés minces* étudiés au chapitre XI, paragraphe **3.**, et résumés *Planche* 20. Ces surfaces admettent un *centre* de cisaillement, contrairement aux âmes minces qui ne possèdent qu'un *axe* de cisaillement (une seule direction d'effort équilibré par cisaillement).

2. ÉTUDE THÉORIQUE DE QUELQUES CAS PARTICULIERS DE POUTRES A AMES MINCES

2.0 REMARQUES PRELIMINAIRES.

Nous envisageons ci-après quelques cas particuliers théoriques de poutres à âmes minces dont les *sections droites* sont représentées par les différentes figures.

Ces théories admettent les *conventions générales* suivantes :

a) Les poutres sont *prismatiques* et *longues* ou les sections envisagées sont situées loin de tout encastrement rigoureux d'une section droite ;

b) La *rigidité propre en torsion* de chaque semelle et la rigidité de leur ensemble en « *flexion différentielle* » est *négligeable* vis-à-vis de la rigidité en torsion de la structure [1] ;

c) Les efforts tranchants T' envisagés sont les *efforts tranchants réduits*, à transmettre réellement par les âmes (dans le cas où les semelles convergent entre elles longitudinalement, voir § **1**.3).

---

1. — Cette hypothèse est, très généralement, admissible pour toutes les structures à âmes minces fermées.

2.1 POUTRE A DEUX SEMELLES ET UNE AME (fig. 5).

En tant que poutres à âmes minces, ces poutres ne peuvent équilibrer que des *efforts tranchants réduits, appliqués suivant leurs axes de cisaillement xx'.*

Elles possèdent donc une « ligne d'action obligatoire » de ces efforts.

On a, dans chacun de ces cas [1]

$$\tau = \frac{T}{h}; \qquad t = \frac{\tau}{e}.$$

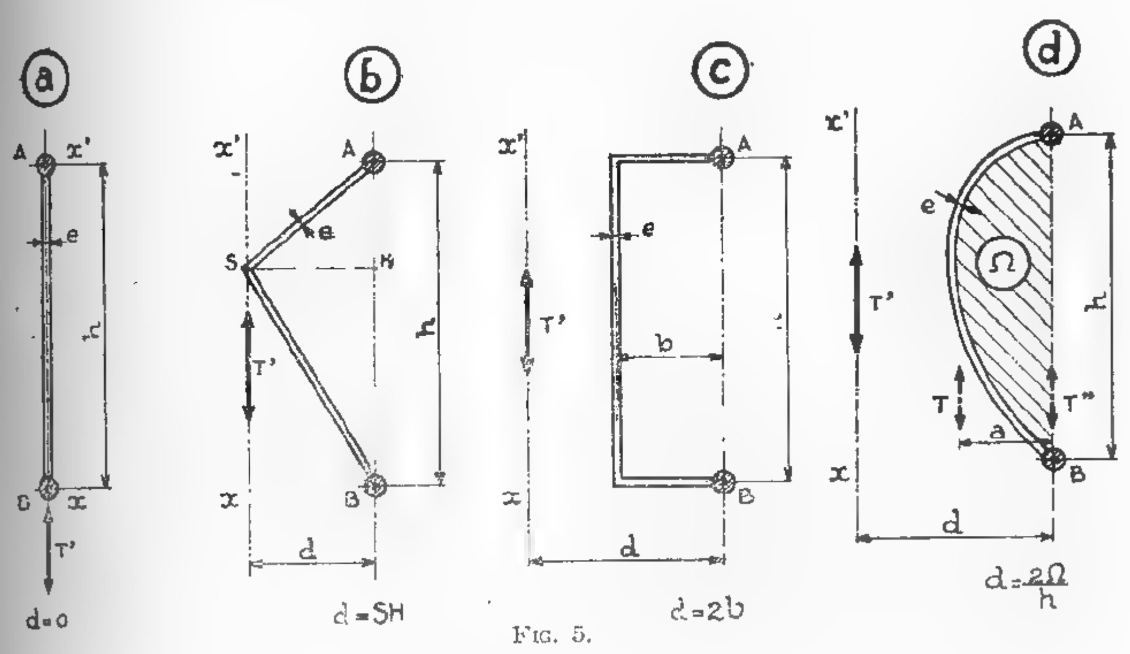


Fig. 5.

Remarque. — Ces « lignes d'actions obligatoires » des efforts tranchants réduits diffèrent des lignes d'application des efforts tranchants bruts, dans le cas général d'âmes non planes (fig. 5 *b*, *c* et *d*) et de semelles convergentes. Un effort tranchant brut T se décompose, en effet, en (voir fig. 5 *d*)

$$T'' = k\,\frac{M}{h} \text{ agissant suivant AB (effort tranchant réducteur)}$$

et

$$T' = T - T'' \text{ agissant suivant } xx' \text{ (effort tranchant réduit)}$$

avec k = coefficient de convergence longitudinale des semelles,
M = moment fléchissant appliqué à la section.
(voir chap. IX, § 3.84).

La distance a de T à B doit être telle que (fig. 5 *b*)

$$T\,a = T'\,d$$

d'où

$$a = d\,\frac{T'}{T}.$$

Elle ne constitue plus un « paramètre géométrique pur » de la section contrairement à la distance d.

Cette remarque est valable pour les poutres b et c de la figure 5 et pour toutes celles étudiées ci-après.

1. — La hauteur h doit être comptée entre les c. de g. des semelles (chap. IX, § 7.31).

2.2 POUTRE A DEUX SEMELLES ET A DEUX AMES (fig 6).

Les deux axes de cisaillement x_1x_1' et x_2x_2' des deux âmes sont parallèles à AB. Ils offrent des possibilités de « *réactions dirigées* » aux efforts tranchants.

Ceux-ci doivent donc être *parallèles* à AB (*direction obligatoire*), mais ils peuvent occuper une *position quelconque* dans le plan de la section.

La décomposition d'un *effort tranchant réduit* T′ en T_1' et T_2' absorbés respectivement par chaque âme, est *isostatique* (fig. 6).

On obtient, en effet, en désignant par a la distance quelconque de T′ à AB (positive vers la gauche) :

$$\text{âme 1} : T'_1 = T' \frac{a + d_2}{d_1 + d_3} ; \qquad \tau_1 - \frac{T'_1}{h} ; \qquad t_1 = \frac{\tau_1}{e_1}$$

$$\text{âme 2} : T'_2 = T' \frac{d_1 - a}{d_1 + d_2} ; \qquad \tau_2 = \frac{T'_2}{h} ; \qquad t_2 - \frac{\tau_2}{e_2} .$$

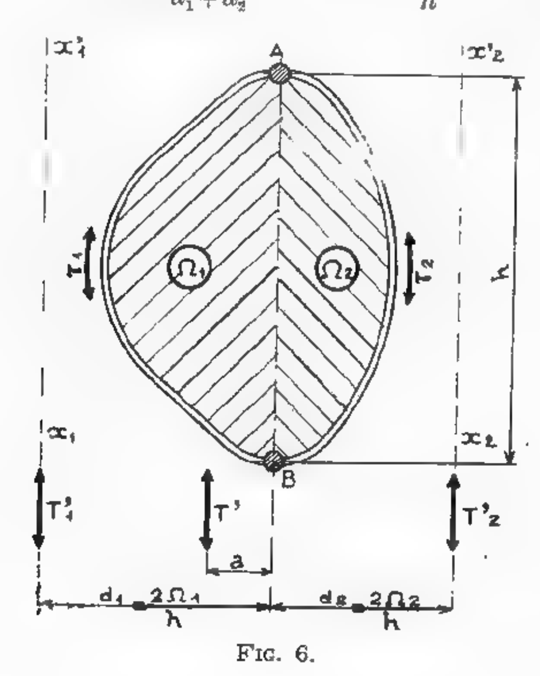


FIG. 6.

Remarques. — *a*) La poutre travaille, dans le cas général, en *flexion* et en *torsion*.

Un état de *flexion pure* n'est engendré que pour une position particulière de T′ coïncidant avec *l'axe de flexion* de la poutre. Voir paragraphe suivant et paragraphe **3.32**.

b) Un *moment de torsion pur* M_t engendre sur les âmes 1 et 2 un flux constant d'intensité

$$\tau = \frac{M_t}{2\,(\Omega_1 + \Omega_2)} .$$

L'ensemble forme, en effet, un corps creux à parois minces (chap. XIII, § **4.1**), sous réserve, toutefois, de la convention générale (*b*) énoncée ci-dessus au paragraphe **2.0**.

2.3 POUTRE A DEUX SEMELLES ET TROIS AMES (fig. 7).

2.31 **Considérations générales.** — Les trois axes de cisaillement x_1x_1', x_2x_2', x_3x_3', des trois âmes, offrent trois possibilités de *réactions dirigées* parallèles entre elles.

Une telle poutre ne pourra donc encore transmettre que des *efforts*

orientés parallèlement à AB (direction obligatoire des efforts tranchants), mais le problème de décomposition de l'un de ces efforts entre les trois âmes est *hyperstatique* (analogie avec une poutre continue sur trois appuis simples). Il y a lieu, pour le résoudre, de discriminer les états de *flexion pure* et de *torsion pure*.

L'état de flexion pure est obtenu quand *l'effort tranchant réduit* T' *coïncide avec l'axe de cisaillement des trois âmes*, dans la section droite considérée [1].

2.32 Recherche de l'axe de cisaillement.

2.321 *Notations.* — Les formules ci-après correspondent au cas de la figure 7, soit : âme **1** d'un côté de AB et âmes **2** et **3** de l'autre côté. Désignons par :

d la distance cherchée entre l'axe de cisaillement XX' et la droite AB, *cette distance étant comptée positivement vers l'âme* **1**;

d_1, d_2, d_3, les distances respectives des axes de cisaillement des âmes **1**, **2** et **3** à AB, soit

$$d_1 = \frac{\Omega_1}{h}, \qquad d_2 = \frac{\Omega_2}{h}, \qquad d_3 = \frac{\Omega_3}{h}$$

avec Ω_1, Ω_2, Ω_3 = surfaces délimitées respectivement par les âmes **1**, **2** et **3** et la droite AB de longueur h.

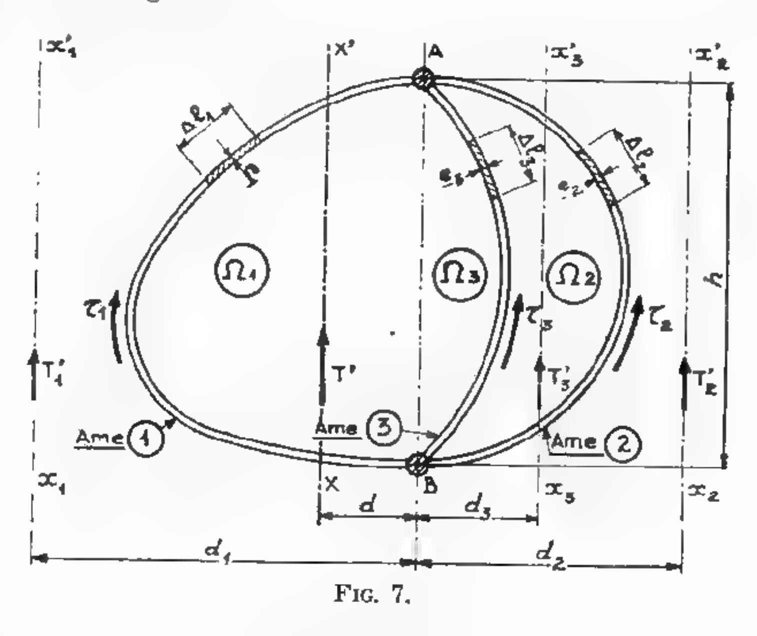


FIG. 7.

Envisageons un *effort tranchant réduit* T', appliqué au niveau de xx', et soient

τ_1, τ_2, τ_3 les *flux de cisaillement de flexion pure* engendrées respectivement dans les âmes **1**, **2** et **3** (voir sens positifs figure 7) ;

$\tau = \frac{T'}{h}$ le flux total dû à T' supposé supporté par une seule âme de hauteur h.

On a donc (équilibre général)

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3. \qquad (1)$$

1. — C'est sur cet axe de cisaillement qu'est situé le centre de flexion-centre de torsion de la section considérée (ch. XX, § 3.1).

Nous poserons, enfin, les *notations simplificatrices* suivantes

$$\alpha_1 = \sum_B^A \frac{\Delta l_1}{e_1}\ ; \qquad \alpha_2 = \sum_B^A \frac{\Delta l_2}{e_2}\ ; \qquad \alpha_3 = \sum_B^A \frac{\Delta l_3}{e_3}$$

et

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}.$$

avec Δl_1, Δl_2 et Δl_3=éléments de longueur (curvilignes) des âmes **1**, **2** et **3** d'épaisseurs e_1, e_2 et e_3 [1].

2.322 *Condition de glissement.* — Les âmes étant reliées rigidement aux semelles, *leurs glissements absolus, en flexion pure, de* B *à* A, *doivent être égaux entre eux.*

Or, on sait qu'un élément Δl_1 de l'âme **1** (par exemple) subit un *glissement élémentaire*, égal à sa flèche de cisaillement (réciprocité) et ayant pour valeur (chap. VIII, § **4.2**)

$$\Delta g_1 = \frac{t_1}{G} \Delta l$$

avec

$$t_1 = \frac{\tau_1}{e_1}$$

d'où

$$\Delta g_1 = \frac{\tau_1}{G} \frac{\Delta l_1}{e_1}.$$

Cette âme subit donc un *glissement total*, entre B et A

$$g_1 = \frac{\tau_1}{G} \sum_B^A \frac{\Delta l_1}{e_1} = \frac{\tau_1}{G} \alpha_1 \qquad \text{(notations ci-dessus).}$$

On trouverait de même pour les âmes **2** et **3**

$$g_2 = \frac{\tau_2}{G} \alpha_2 \qquad \text{et} \qquad g_3 = \frac{\tau_3}{G} \alpha_3.$$

La condition ci-dessus s'exprime donc par la relation [2]

$$\tau_1 \alpha_1 = \tau_2 \alpha_2 = \tau_3 \alpha_3 \qquad (2)$$

2.323 *Flux de flexion pure.* — De la relation ci-dessus on tire

$$\tau_2 = \tau_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \qquad \text{et} \qquad \tau_3 = \tau_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_3}$$

et, en portant ces valeurs dans (**1**)

$$\tau = \tau_1 \alpha_1 \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} \right) = \tau_1 \frac{\alpha_1}{A} \qquad \text{(notations ci-dessus)}$$

d'où

$$\tau_1 = \tau \frac{A}{\alpha_1}$$

et, de même

$$\tau_2 = \tau \frac{A}{\alpha_2}\ ; \qquad \tau_3 = \tau \frac{A}{\alpha_3}. \qquad (3)$$

---

1. — Ces épaisseurs peuvent être, dans un cas général, variables le long d'une même âme. Si elles sont constantes on a évidemment

$$\alpha_1 = \frac{l_1}{e_1}, \quad \alpha_2 = \frac{l_2}{e_2} \quad \text{et} \quad \alpha_3 = \frac{l_3}{e_3}$$

l_1, l_2 et l_3 désignant les *longueurs développées* (de B à A) de chaque âme.

2. — Cette relation, où G s'est éliminé, suppose, non seulement que les âmes sont de matériaux identiques, mais encore qu'elles ont conservé une même valeur de G après plissement éventuel. Il est donc nécessaire que leurs instabilités apparaissent sensiblement pour la même charge (ch. XIX, § **4.6**). Dans le cas contraire, il y aurait lieu de modifier la relation (**2**) en tenant compte des différentes valeurs de G.

2.324 *Condition d'équilibre.* — En prenant les moments par rapport à un point quelconque de AB, on obtient, avec les conventions de signes ci-dessus et figure 7

$$T'_1\, d_1 - T'_2\, d_2 \quad T'_3\, d_3 = T'd$$

soit

$$2\,\tau_1 \Omega_1 \quad 2\tau_2 \Omega_2 - 2\tau_3 \Omega_3 = \tau\ h\ d$$

ou encore, à l'aide des valeurs (3) ci-dessus

$$2\ \tau\ A\left(\frac{\Omega_1}{\alpha_1} - \frac{\Omega_2}{\alpha_2} \quad \frac{\Omega_3}{\alpha_3}\right) = \tau\, h\, d. \qquad (4)$$

2.325 *Position de XX'.* — On déduit de cette relation la distance d cherchée

$$d = \frac{2\ A}{h}\left(\frac{\Omega_1}{\alpha_1} - \frac{\Omega_2}{\alpha_2} \quad \frac{\Omega_3}{\alpha_3}\right)$$

expression où ne figurent que des *caractéristiques géométriques* de la section droite considérée.

2.33 **Etat de flexion pure.** — Cet état est matérialisé par la figure 7 ci-dessus : Un effort tranchant réduit T' appliqué au niveau de XX' donne lieu aux flux τ_1, τ_2 et τ_3 déterminés par les expressions (3) du paragraphe 2.323.

2.34 **Etat de torsion pure.**

2.341 *Principe de calcul.* — Un *moment de torsion* M_t est dû soit à un *couple pur*, soit au *transport* d'un *effort tranchant réduit* T' [1] (parallèle à AB) et situé à une distance δ de l'axe XX' (fig. 8).

$$M_t = T'\delta.$$

Fig. 8.

1. — Un effort tranchant brut T situé à une distance b de AB se décompose en

effort tranchant réducteur $T'' = k\,\frac{M}{h}$ fig. 8 et § 2.1,

effort tranchant réduit $T' = T - T''$

T' est situé à une distance de AB : $a = b\,\frac{T}{T'}$ d'où $\delta = a + d.$

Les rigidités propres en torsion des semelles étant négligeables (hypothèse générale énoncée ci-dessus au paragraphe **2.31**) la structure se comporte, vis-à-vis de la transmission d'un moment de torsion, comme une *coque fermée possédant une cloison intérieure.*

Nous effectuerons l'étude théorique de ce cas (problème hyperstatique) au chapitre XXII, paragraphe **3.2**. Nous donnons ci-dessous les *résultats pratiques* auxquels on aboutit

2.342 *Notations* (fig. 8). — En supplément aux notations ci-dessus (§ **2.321**), nous désignerons par :

Ω_1' et Ω_2' les aires respectives délimités par les deux corps creux situés de chaque côté de l'âme **3**, soit donc (notations ci-dessus fig. 7)

$$\Omega'_1 = \Omega_1 + \Omega_3; \qquad \Omega'_2 = \Omega_2 - \Omega_3$$

τ_1', τ_2' et τ_3' les flux de cisaillement de torsion pure dans les âmes **1**, **2** et **3** (voir sens positifs fig. 8)

K le rapport sans dimension

$$K = \frac{\frac{\Omega'_2}{\Omega'_1}(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\Omega'_2}{\Omega'_1}\alpha_3}.$$

2.343 ***Résultats.*** — Les flux de cisaillement de torsion pure sont donnés par

$$\tau'_1 = \frac{M_t}{2\,(\Omega'_1 + K\,\Omega'_2)}$$

$$\tau'_2 = K\,\tau'_1$$

$$\tau'_3 = \tau'_1 - \tau'_2.$$

2.4 POUTRE A TROIS SEMELLES ET TROIS AMES (fig. 9).

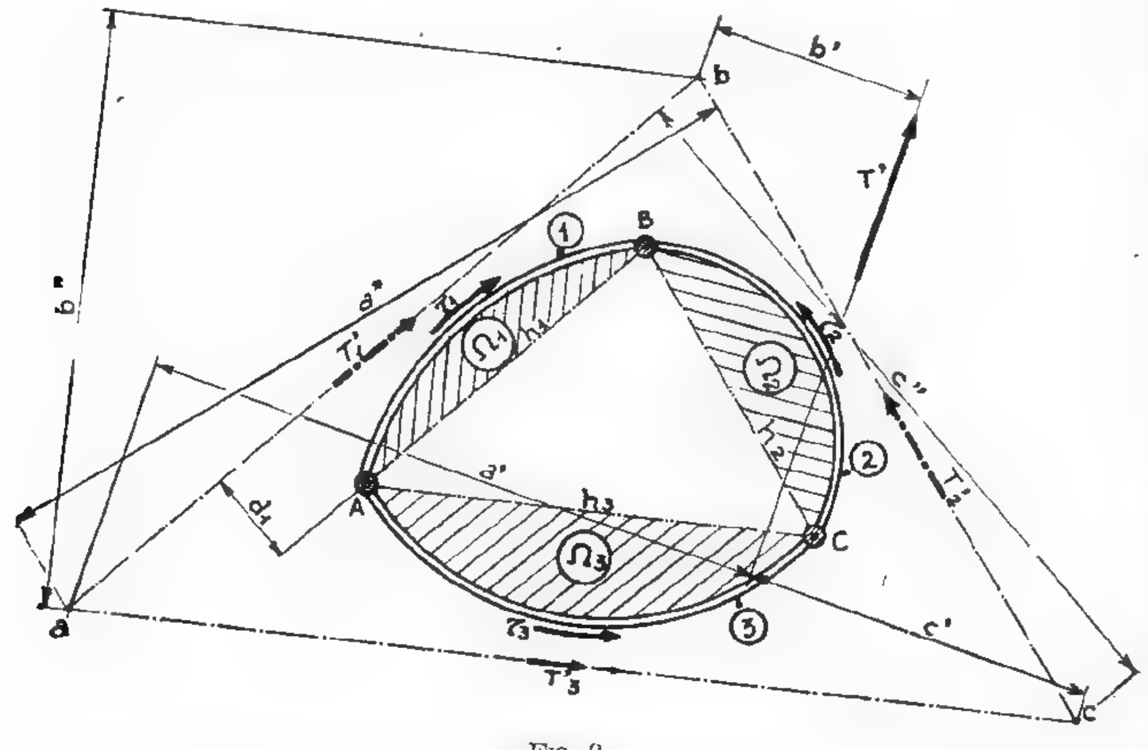


FIG. 9.

2.41 Considérations générales. — Les axes de cisaillement des trois âmes se déterminent selon la méthode habituelle (§ **1.423**).

Exemple : âme 1 : décalage $d_1 = \dfrac{2\Omega_1}{h_1}$ (avec h_1 = distance AB).

Ces trois axes fournissent trois possibilités de « réactions dirigées » (*triangle résistant* abc). Le problème (système plan) est donc *isostatique*.

La poutre peut transmettre des *efforts tranchants quelconques*, c'est-à-dire d'orientation et de position quelconques, dans le plan de la section considérée.

2.42 Flux de cisaillement. — Soit, par exemple, un effort tranchant réduit T' appliqué à des distances respectives a', b' et c' des trois sommets a, b et c (fig. 9).

L'équilibre des moments autour de chacun des sommets a, b et c donne, en valeurs absolues :

$$\text{sommet c : } T'_1 = T' \frac{c'}{c''} \text{ d'où : âme 1 : } \tau_1 = \frac{T'_1}{h_1}$$

$$\text{sommet a : } T'_2 = T' \frac{a'}{a''} \text{ d'où : âme 2 : } \tau_2 = \frac{T'_2}{h_2}$$

$$\text{sommet b : } T'_3 = T_3 \frac{b'}{b''} \text{ d'où : âme 3 : } \tau_3 = \frac{T'_3}{h_3} .$$

Le sens de chacun de ces efforts, ou flux, se déduit du sens du moment créé par T' autour du sommet correspondant (voir fig. 9).

Remarques. — *a*) L'état d'équilibre ainsi créé comprend, dans le cas général, une superposition de *flexion* et de *torsion* pures ;

b) Un couple de torsion pure M_t engendre un *flux constant* τ d'intensité

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega}$$

en désignant par Ω l'aire du corps creux délimité par les trois âmes [1] ;

c) Il n'est pas nécessaire de discriminer les états de flexion pure et de torsion pure.

2.43 Efforts longitudinaux dans les semelles. — Le calcul de ces efforts s'effectue directement à l'aide des flux intéressant chaque semelle (mise en charge par les glissements longitudinaux).

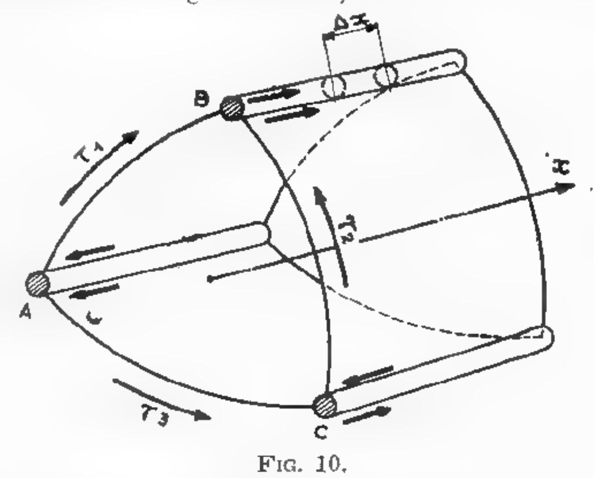


FIG. 10.

Dans l'exemple de la figure 9, reproduit en perspective figure 10, on obtient les *accroissements* suivants *des efforts normaux, par unité de longueur* (comptée suivant la dimension longitudinale x de la poutre) :

semelle A (deux flux divergents) : $\Delta N_1 = -\tau_1 - \tau_3$

semelle B (deux flux convergents) : $\Delta N_2 = \tau_1 + \tau_2$

semelle C (τ_2 divergent, τ_3 convergent) : $\Delta N_3 = \tau_3 - \tau_2$.

1. — En négligeant toujours les rigidités propres en torsion des semelles.

(Le signe + correspond ici à une *« mise en charge » en compression.*) L'effort normal dans une section considérée s'obtient en effectuant la *somme* de ces accroissements élémentaires entre l'extrémité libre et cette section.

Remarques. — *a*) On peut encore effectuer le calcul en déterminant les moments fléchissants agissant dans le plan de chaque face et en additionnant les contraintes des longerons obtenues dans deux faces adjacentes.

b) On peut également procéder par décomposition des efforts suivant les axes principaux d'inertie des sections droites. Les résultats obtenus sont équivalents à ceux ci-dessus.

2.5 POUTRE A QUATRE SEMELLES ET TROIS AMES.

2.51 Transmission d'un effort tranchant. — Les trois axes de cisaillement ab, bc et cd, déterminés selon la méthode habituelle, forment, de même que dans le cas précédent, un *triangle résistant* dont le sommet *s* est rejeté vers le bas, dans le cas de la figure 11.

Cette poutre peut donc, également, transmettre des *efforts tranchants quelconques* et le problème de recherche des flux est *isostatique.*

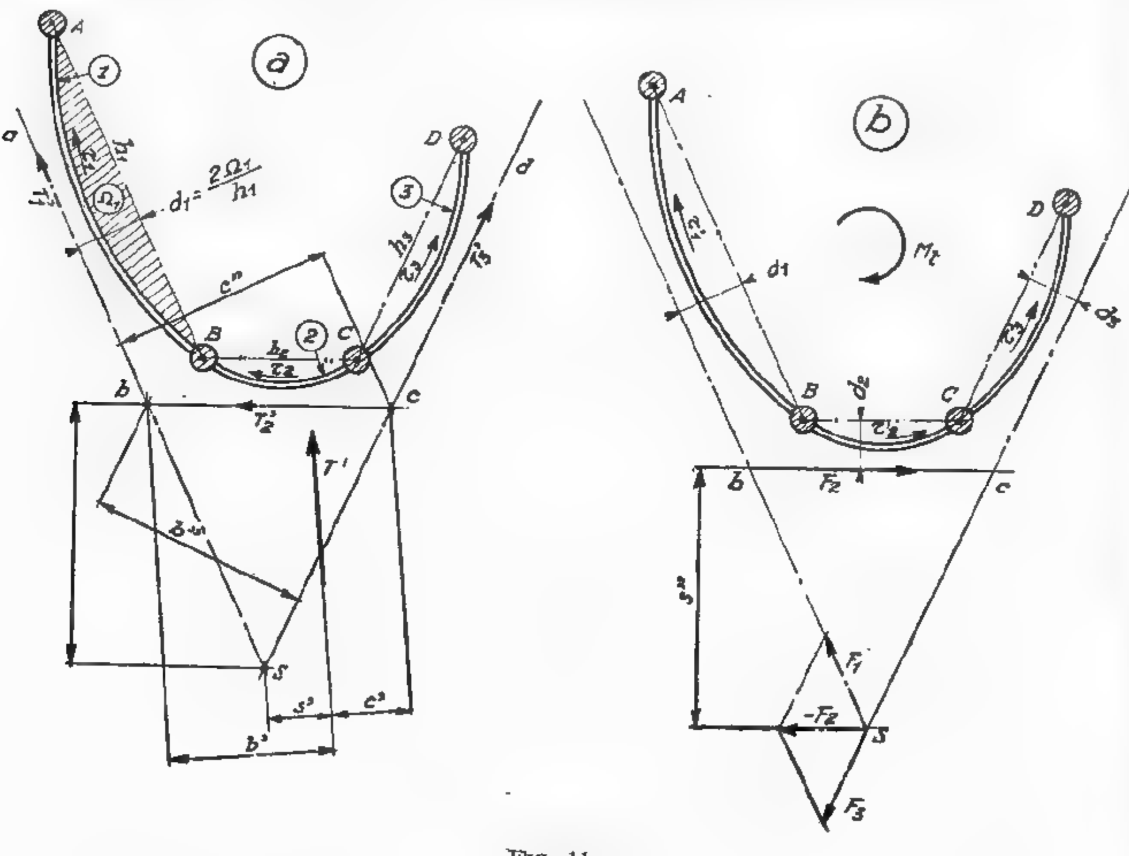


Fig. 11.

La figure 11 *a* donne un exemple concernant un effort T'. Les notations et résultats sont analogues à ceux de la figure 9.

On trouve, de même qu'au paragraphe 2.43, les *accroissements unitaires* suivants *des efforts normaux dans les semelles :*

semelle A : $\Delta N_1 = \tau_1$

semelle B : $\Delta N_2 = \tau_2 - \tau_1$

semelle C : $\Delta N_3 = -\tau_2 - \tau_3$

semelle D : $\Delta N_4 = \tau_3$

2.52 Transmission d'un moment de torsion. — L'équilibre à un couple pur M_t peut se déterminer graphiquement en superposant les flux dus à deux efforts tranchants quelconques T parallèles entre eux et décalés d'une quantité δ telle que

$$T\,\delta = M_t.$$

On peut encore opérer directement en remarquant (fig. 11 *b*) que les composantes F_1 et F_2 doivent admettre une résultante parallèle, égale et opposée à F_2 (couple pur), d'où

$$F_2 = \frac{M_t}{s''}$$

et les flux

$$\tau'_1 = \frac{F_1}{h_1}, \quad \tau'_2 = \frac{F_2}{h_2}, \quad \tau'_3 = \frac{F_3}{h_3}.$$

Remarque. — Un couple de torsion pur engendre donc des *efforts longitudinaux dans les semelles* qui se calculent à partir des flux ci-dessus. Il en est de même dans toutes les *sections ouvertes* [1] pour lesquelles nous avons vu au chapitre XIII, paragraphe **5.**, que le processus de transmission d'un moment de torsion s'apparente à une *flexion différentielle*. Nous savons que ces sections présentent une faible rigidité en torsion, relativement aux sections fermées.

2.6 POUTRE A QUATRE SEMELLES ET QUATRE AMES.

Les quatre axes de cisaillement forment un « *quadrilatère résistant* » abcd offrant quatre possibilités de réactions dirigées (fig. 12). La poutre peut donc transmettre des *efforts quelconques*, mais le problème de recherche des flux est *hyperstatique*.

Il est possible de lever l'indétermination, dans un cas général, à l'aide de conditions de glissement et d'équilibre analogues à celles exposées au paragraphe **2.32**. Le calcul matériel est complexe.

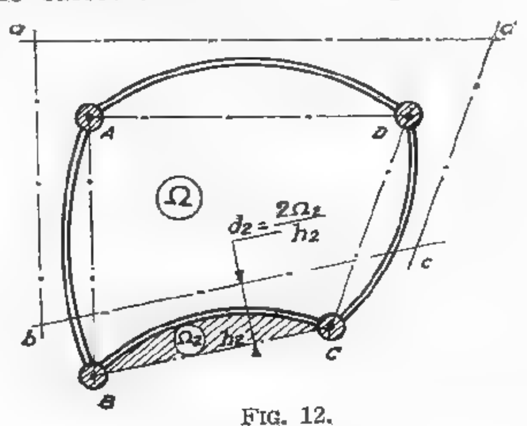


Fig. 12.

Nous donnerons ci-après au paragraphe **5.2** une méthode plus simple applicable pour les sections symétriques possédant deux axes de cisaillement parallèles entre eux.

La transmission d'un moment de torsion s'effectue sans difficulté en engendrant sur le périmètre du « *corps creux* » un *flux constant*

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\Omega}$$

avec Ω = aire totale limitée par les âmes (rigidités propres des semelles négligées).

1. — Dans les sections fermées, les flux agissant de part et d'autre d'une semelle donnent une résultante nulle (flux convergents et divergents de même intensité).

2.7 CONCLUSION.

Les exemples précédents suffisent à montrer que la détermination des efforts généraux dans les poutres à âmes minces peut, généralement, s'effectuer par de simples considérations d'équilibre.

On voit, cependant, que *chaque âme ne peut réagir que suivant une direction bien déterminée, qui est celle de son axe de cisaillement. Il est donc nécessaire, pour que ces poutres soient mises en charge convenablement que des éléments assurent la répartition des efforts appliqués entre les différentes âmes.* C'est le rôle des *cloisons transversales* (nervures d'aile, couples de fuselages-coques) qui assurent cette « *introduction des charges* » par flexion dans leurs plans. Le calcul de ces éléments constitue un des problèmes de détail essentiels dans l'étude des structures à âmes minces. Nous l'examinerons ci-après dans chacun des cas particuliers étudiés.

3. STRUCTURES MONOLONGERON AVEC UN CAISSON DE TORSION

3.1 CONFIGURATION GÉNÉRALE.

Les structures monolongeron avec un caisson de torsion constituent le type le plus simple de constructions à âmes minces.

Elles sont essentiellement utilisées pour réaliser les ossatures résistantes des *éléments sustentateurs* (voilures, empennages), ou des *gouvernes* (ailerons, volets de courbure, gouvernails de profondeur ou de direction). Leur configuration interne se prête mal à la réalisation des structures de fuselages. Elles comprennent les éléments longitudinaux résistants suivants (fig. 13) :

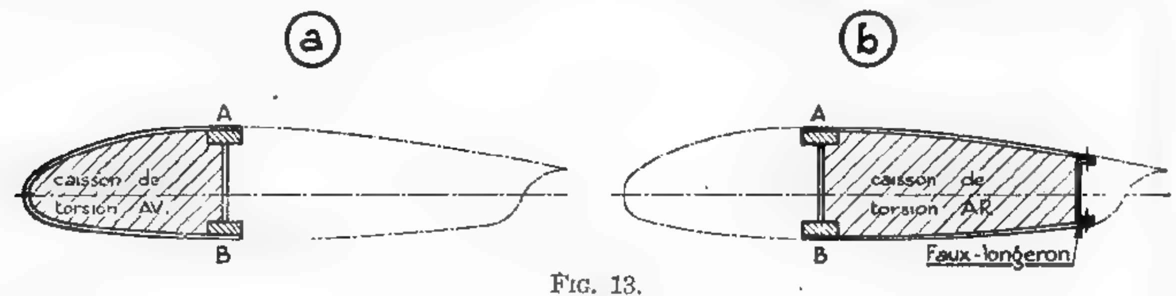


FIG. 13.

— un *longeron unique* AB constitué par deux semelles et une âme plane et situé au voisinage du maître-couple du profil;

— une *paroi mince de revêtement* formant un *corps creux* avec l'âme du longeron.

Cette paroi, assimilable à une *âme courbe*, est reliée intimement aux *semelles* du longeron. Elle n'est, généralement, pas raidie longitudinalement [1] et elle est constituée, soit par le revêtement de *bord d'attaque* (structure à caisson de torsion avant, figure 13 *a*), soit par le revêtement de *bord de fuite* (structure à caisson de torsion arrière, figure 13 *b*).

Dans cette dernière solution, la fermeture du caisson arrière est, généralement, réalisée (en avant des volets ou ailerons) par un élément plan mince appelé *faux-longeron*. La *continuité* en flexion du faux-longeron n'étant pas assurée à travers le fuselage [2] et sa rigidité étant très faible

1. Dans le cas contraire, et si les raidisseurs sont continus et suffisamment serrés, la structure s'assimile à une coque (cf. XXII).

2. — La reprise d'un faux-longeron est généralement réalisée par une simple articulation.

vis-à-vis de celle du *monolongeron* (ou longeron principal), on peut négliger sa participation à la transmission des efforts normaux de flexion [1].

Les deux types de structures *a* et *b* (fig. 13) sont donc assimilables à des *poutres à deux semelles et deux âmes minces* dont l'une est plane.

Remarques. — *a*) Ces structures (voilures en particulier) comportent généralement des surfaces de revêtement rigides (tôles ou contreplaqués) situées à la fois en avant et en arrière du longeron. Cependant, des raisons d'aménagement peuvent obliger à interrompre pratiquement la continuité de l'une ou l'autre de ces surfaces. Il reste alors une *ossature résistante* assimilable à l'un des deux cas ci-dessus [2].

b) Des éléments transversaux ou *nervures* assurent la forme de l'ensemble et la répartition des charges (voir ci-après).

3.2 DETAILS DE CONSTRUCTION.

Il existe une très grande variété dans la réalisation des *monolongerons*. Nous avons groupé, figure 14, quelques exemples classiques applicables aux voilures.

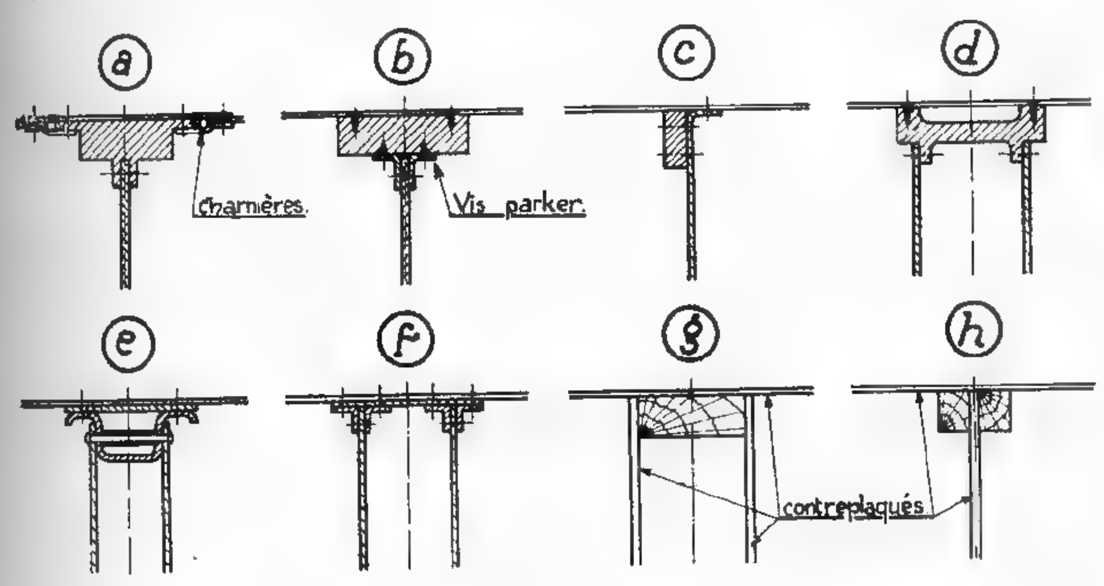


Fig. 14.

Les exemples *a* à *f* concernent la *construction métallique* (alliages AU4G ou AU4G1 ou, plus rarement, semelles en acier) et les exemples *g* et *h* la *construction bois* (semelles en spruce, âmes et revêtement en contreplaqué, voir chapitre XII). Signalons qu'il existe des *constructions mixtes* (longeron métallique, revêtement en contreplaqué).

L'*âme* du longeron peut être, soit *simple* (exemples *a*, *b*, *c*, *h*), soit *double* (exemples *d*, *e*, *f*, *g*). Dans ce dernier cas, le longeron possède par lui-même une rigidité en torsion qui peut devenir appréciable. Les calculs ci-après supposeront cependant, toujours, cette rigidité négligeable devant celle du caisson. En d'autres termes, les deux âmes seront assimilées à une seule *âme fictive*, située dans le plan médian du longeron et d'épaisseur

1. — Cette hypothèse peut néanmoins s'écarter de la réalité vers les extrémités de l'aile.

2. — Dans le cas contraire, l'ossature devient un monolongeron à deux caissons de torsion : type de structure étudié ci-après au paragraphe 4.

égale à la somme des épaisseurs des âmes réelles. Il conviendra de limiter à cette âme fictive l'aire Ω du caisson de torsion.

Parfois l'âme pleine est remplacée par un *treillis* simple ou double (fig. 15). Cette disposition particulière n'altère pas les principes de répartition des charges exposées ci-après. Le longeron peut cependant se calculer en flexion, comme une *poutre triangulée.*

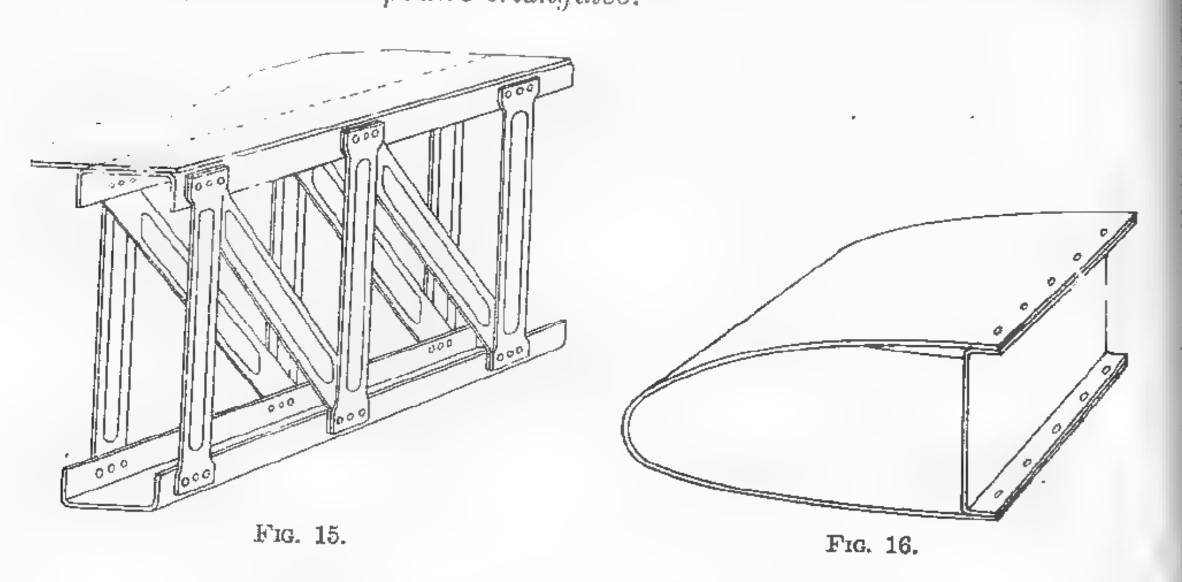


Fig. 15. Fig. 16.

Il existe enfin, notamment pour les ailerons, volets, ou gouvernes, des longerons ne possédant pas de semelles proprement dites. Ils sont constitués simplement par une *tôle* pliée en forme de U dont les ailes sont reprises sur le revêtement (fig. 16). On doit, dans ce cas, limiter les *sections travaillantes* (aux efforts longitudinaux) à celles définies, dans chaque cas particulier par les *largeurs équivalentes*, comptées à partir des angles de pliage des âmes (chap. XIX).

La *jonction du revêtement aux semelles* peut être réalisée soit par rivetage ou soudure (fig. 14 *c*, *e*, *f*), soit par vis (ou clous Parker) : fig. 14 *b* et *d*, soit par collages (fig. 14 *g* et *h*), soit, enfin, par assemblages à charnières (fig. 14 *a*). De toute façon, ces jonctions assurent le passage d'un certain *glissement longitudinal* entre le revêtement et les semelles.

Les *nervures* peuvent être, soit à âmes pleines ou ajourées, soit en treillis, soit en demi-coquilles en forme d'arcs.

3.3 TRANSMISSION DES CHARGES.

3.31 Remarque préliminaire. — Ainsi que nous l'avons vu ci-dessus (§ **2.2**), les poutres à deux semelles et deux âmes, auxquelles s'assimilent les structures étudiées, ne peuvent transmettre, en tant que poutres à âmes minces, que des *charges orientées parallèlement à la droite* AB *joignant les centres de gravité des semelles.*

Ces charges, qui sont donc parallèles à l'âme du longeron, sont appelées *charges normales.* Elles agissent, en effet, perpendiculairement au « plan » de l'aile ou de la gouverne étudiée et nous savons (chap. XX, § **1.31**) qu'elles constituent la composante principale des charges totales.

Il reste, néanmoins, à transmettre des charges agissant parallèlement au plan de l'aile (ou *charges de traînée*). La transmission de ces deux catégories de charges donne lieu à des calculs distincts.

3.32 Transmission des charges normales.

3.321 *Données.* — Plaçons-nous, par exemple, dans le cas d'une struc-

ture à caisson de torsion avant dont la figure 17 représente une section droite.

Désignons par :

T l'effort tranchant brut appliqué à une distance b en avant de l'axe du longeron ;

T' l'effort tranchant réduit : $T' = T - T'' = T - k\frac{M}{h}$ (chap. IX, § 3.84).

Cet effort est appliqué à une distance a de l'axe du longeron, telle que

$$T' \cdot a = T \cdot b.$$

Désignons, d'autre part, par :

Ω la surface du caisson de torsion ;

h la distance en les centres de gravité des semelles (hauteur équivalente du longeron).

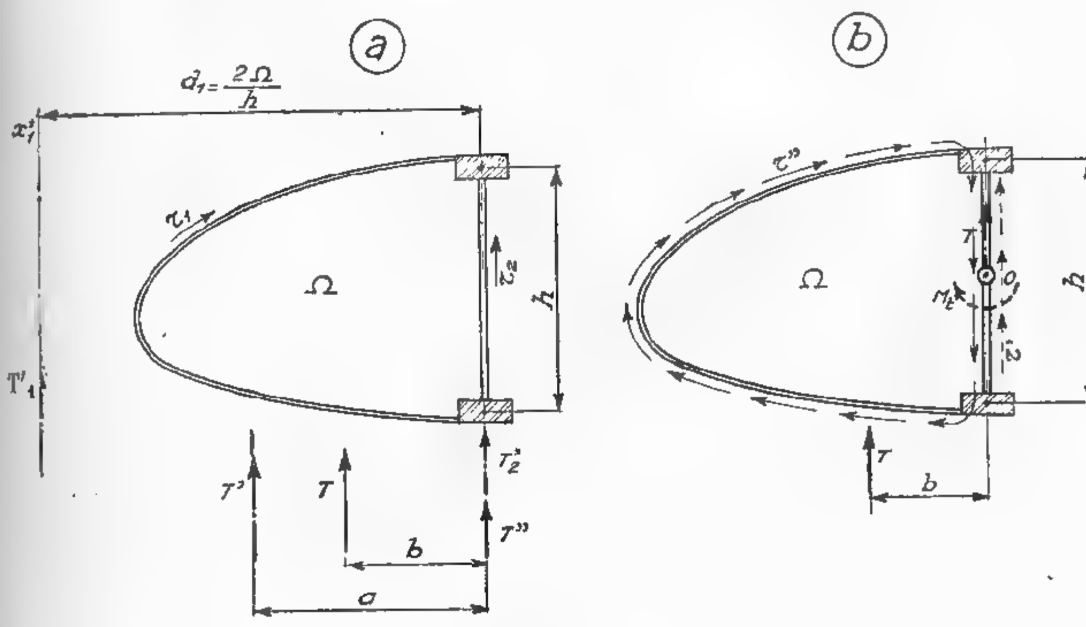


Fig. 17.

3.322 *Méthode théorique.* — Cette méthode a été exposée au paragraphe **2.2.**

Dans le cas particulier qui nous occupe, on a $d_2=0$ (âme **2** plane), d'où les efforts et flux suivants (fig. 17 *a*)

— *Ame* **1** (revêtement du bec)

$$T'_1 = T' \frac{a}{d_1}$$

avec

$$d_1 = \frac{2\,\Omega}{h}$$

d'où

$$T'_1 = T'' \frac{a\ \ h}{2\,\Omega}$$

et

$$\boxed{\tau_1 = \frac{T'a}{\Omega}.}$$

— *Ame* **2** (âme du longeron)

$$T'_2 = T' - T'_1 = T'\left(1 - \frac{a\,h}{2\,\Omega}\right)$$

$$\boxed{\tau_2 = T'\left(\frac{1}{h} - \frac{a}{2\,\Omega}\right)}$$

3.323 *Méthode pratique.* — Pratiquement il est plus commode, pour la conduite des calculs généraux de la structure, d'adopter un *axe de référence* unique, auquel se rapportent les efforts.

Il est particulièrement pratique de choisir *l'axe longitudinal du longeron* qui est, généralement, rectiligne et normal au plan de symétrie de l'avion.

Convenons de désigner par « moment de torsion » [1] le *moment de transport* : $M_t = Tb$ de l'effort tranchant *brut* (fig. 17 *b*).

Nous avons donc également : $M_t = T'a$ (relation ci-dessus).

Nous obtenons les flux suivants :

— Flux dû à T'

$$\tau' = \frac{T'}{h}$$

agissant sur l'âme **2** exclusivement.

— Flux dû à M_t (corps creux de surface)

$$\tau'' = \frac{M_t}{2\,\Omega} = \frac{T'\,a}{2\,\Omega} = \tau_1$$

agissant sur les âmes **1** et **2.**

La composition de ces flux sur l'âme **2** donne, compte tenu de leurs sens respectifs (fig. 17 *b*)

$$\tau' - \tau'' = T\left(\frac{1}{h} - \frac{a}{2\,\Omega}\right) = \tau_2.$$

On retrouve donc bien les mêmes flux τ_1 et τ_2 que par la méthode ci-dessus.

Ce résultat permet souvent de dire que « *le longeron transmet la totalité de l'effort tranchant* ». Cette affirmation n'est cependant exacte que si T est appliqué au niveau du longeron.

3.33 **Transmission des charges de traînée.** — La structure étudiée n'est pas conçue rationnellement pour résister à ces charges. Heureusement celles-ci sont généralement très faibles vis-à-vis des charges normales (sauf cependant pour certains appareils dotés de volets-freins de piqué). Nous n'aborderons que très succinctement ce problème qui doit, en pratique, s'étudier dans chaque cas particulier.

3.331 *Structures avec faux-longeron.* — Dans ce cas, on assimile le caisson arrière à un système bi-longeron (longeron principal et faux-longeron) avec deux âmes minces constituées par les revêtements arrières. On néglige ainsi la participation du bec d'attaque (défavorable).

3.332 *Structures sans faux-longeron.* — Nous avons au chapitre XIX, paragraphe **2.34**, que la courbure du bec d'attaque permettait aux tôles de

---

1. - Le moment de torsion réel devrait, en réalité, s'évaluer autour de l'axe de torsion (ou axe de flexion) de la structure, dont la position se déterminerait par un calcul analogue à celui effectué au § **2.32**. La connaissance de cet axe n'offre pas d'intérêt pratique pour le calcul de la structure étudiée (flux résultants identiques). Elle n'est nécessaire que pour les calculs aux vibrations.

revêtement de transmettre, sans flambage, des contraintes de compression appréciables. On peut donc encore considérer un système bi-longeron constitué par le longeron principal, la pointe extrême du bec et les tôles intermédiaires.

On réalise quelquefois, pour renforcer le système, un « *longeronnet* » situé près du bec d'attaque (fig. 18).

On peut encore considérer tout l'ensemble du bec comme une *coque* si les tôles de revêtement ne sont pas déjà instabilisées par les efforts normaux agissant simultanément avec les efforts de traînée envisagés.

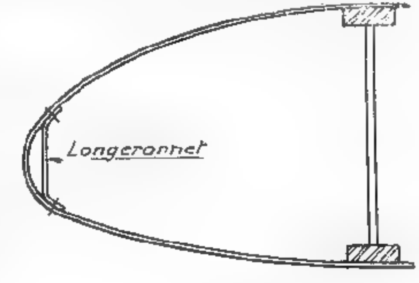


FIG. 18.

3.4 CALCUL DES ÉLÉMENTS LONGITUDINAUX.

3.41 Longeron. — Nous renvoyons, pour ce calcul, au chapitre IX, paragraphe **7.**, où nous avons appris à effectuer le *dimensionnement rapide* des éléments (âmes et semelles) d'un longeron à âme mince et au chapitre XIX, paragraphe **6.**7, où nous avons étudié les *sollicitations complémentaires* dues au plissement de l'âme, et le dimensionnement des *raidisseurs* d'âme.

Notons que l'effort tranchant à envisager pour ces calculs est l'effort T'_2 défini au paragraphe **3.322** ci-dessus (compte tenu de la convergence des semelles et de l'emplacement de T en profondeur).

Signalons également que l'on s'impose souvent de ne pas atteindre la limite de stabilité en cisaillement de l'âme pour les charges susceptibles d'être rencontrées usuellement (coefficients de charge 1,5 à 2,5 selon le type de l'avion). Cette condition résulte de *considérations de rigidité*.

3.42 Revêtement. — Les tôles, ou contreplaqués, de revêtement du caisson de torsion, subissent une *contrainte de cisaillement pur* donnée par

$$t_1 = \frac{\tau_1}{e}$$

avec e = épaisseur du revêtement.

Leur limite de stabilité étant généralement inférieure à t_1, surtout pour les tôles, sensiblement planes, des caissons arrières, il convient de tenir compte de leur travail en *traction diagonale* (chap. XIX, § **4.**52 et **6.**3. Angle d'orientation des plis : $\beta = 45°$).

3.43 Influence du plissement du revêtement sur le longeron. — Le travail en traction diagonale des parois de revêtement du caisson de torsion engendre des *sollicitations complémentaires* des semelles du longeron. La figure **19** illustre cet état de sollicitation, dans le cas d'un caisson de torsion arrière. Les semelles reçoivent des actions, parallèles aux nervures, d'intensité

$$f = \tau_1 - \tau_{01}$$

(force par unité de longueur).
avec τ_{01} = flux critique de cisaillement pur des tôles de revêtement (voir chap. XIX, § **4.4** et **4.**52).

Sous l'action de ces forces, les semelles du longeron tendent à s'infléchir horizontalement vers le faux longeron, en prenant appui sur les nervures $\left(\text{réactions } R = fd \text{ avec } d = \frac{d' + d''}{2}\right)$.

Il se produit un phénomène réciproque pour le faux-longeron.

Remarques. — *a*) *Dans le cas* le plus fréquent, où il existe un revêtement métallique de part et d'autre du longeron (bord d'attaque et bord de fuite), la flexion horizontale des semelles se trouve pratiquement empêchée par la présence du revêtement non travaillant

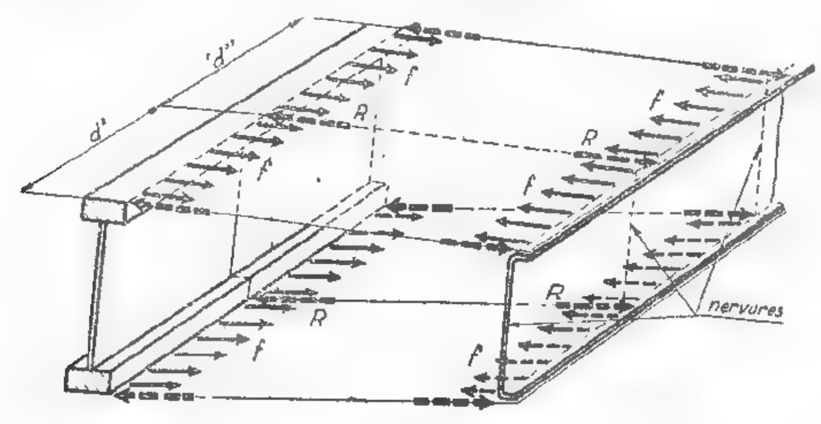


FIG. 19.

On peut alors se dispenser de tenir compte des sollicitations complémentaires ci-dessus.

b) Le faux-longeron est, de même, renforcé par la présence de la « gouttière de fente d'aileron ». Il convient également de faire participer en flexion une bande équivalente de revêtement.

3.44 Jonctions longitudinales. — Le calcul de la *jonction âme-semelles* a été effectué au chapitre IX, paragraphe **8.3**, dans le cas d'une âme stable, et au chapitre XIX, paragraphe **6.4**, dans le cas d'une âme plissée. Le flux de cisaillement à considérer est le flux τ_2 défini ci-dessus au paragraphe **3.32**. La *jonction des semelles au revêtement du caisson de torsion* se calcule d'une façon analogue en partant du flux τ_1.

3.5 CALCUL DES NERVURES.

Il y a lieu de distinguer deux types bien distincts de nervures, au point de vue de leurs procédés de calcul (mise en équilibre) selon qu'elles appartiennent, ou non, aux caissons de torsion de la structure.

3.51 Nervures n'appartenant pas aux caissons de torsion. — (Nervures de bord de fuite, cas *a* fig. 13, ou nervures de bord d'attaque, cas *b*, fig. 13).

Ces nervures ne présentent aucune difficulté particulière de mise en équilibre. Elles se comportent comme des *consoles encastrées* sur le système résistant (longeron-caisson).

Elles sont soumises aux *charges aérodynamiques* qui les intéressent et, éventuellement, aux *charges concentrées* provenant des masses d'aménagement ou des articulations de gouvernes qu'elles supportent.

Notons qu'il y a toujours lieu de tenir compte d'une largeur équivalente de revêtement intéressée en flexion avec les nervures, dans le cas d'un revêtement rigide (tôle ou contreplaqué) sur le « faux-caisson » auquel ces nervures appartiennent.

3.52 Nervures appartenant aux caissons de torsion (cloisons).

3.521 *Rôle général.* — Ces nervures constituent essentiellement des *cloisons* chargées de *répartir les tensions* sur le revêtement travaillant au cisaillement. Elles assurent, de part et d'autre de leurs plans, des *accroissements* ΔT et ΔM, des efforts normaux appliqués à la structure. Elles répartissent également les charges de traînée et jouent enfin le rôle d'entretoises

(comprimées) dans un caisson dont les parois travaillent en traction diagonale (réactions R, fig. 19).

3.522 *Nervures courantes.* — Nous désignons ainsi une nervure non chargée d'introduire dans la structure une *charge concentrée* importante et non située à un *changement de forme* brutal de structure.

Nous donnons **Planche 43** (*cas A*) un exemple numérique de calcul d'une de ces nervures [1]. Nous nous sommes placés dans le cas d'une *structure à caisson de torsion arrière.*

Les charges à *répartir* sont :

- les charges aérodynamiques propres à la « tranche » de caisson de torsion intéressée par cette nervure,
- les charges correspondantes agissant sur le bord d'attaque et sur la gouttière arrière.

Nous avons négligé les charges de traînée, ainsi que la compression supplémentaire résultant du travail en traction diagonale des tôles de revêtement.

3.523 *Nervures d'introduction de charges concentrées.* — Ces nervures peuvent être, soit *directement* intéressées par les charges concentrées, soit *situées en regard de charges concentrées* n'appartenant pas au caisson de torsion.

Nous donnons **Planche 43** (*cas B*) un exemple numérique concernant la même nervure que ci-dessus que nous avons supposée supporter une potence d'articulation de volet de courbure.

Les efforts calculés sont les *efforts supplémentaires dus à cette introduction de charge.* Il convient d'y ajouter ceux dus au rôle de nervure courante joué par cette cloison (cas A), d'où les efforts résultants figurés sur la planche 43.

On remarquera que l'introduction d'une charge concentrée fait essentiellement travailler la cloison au *cisaillement.* Si cette nervure n'appartenait pas au caisson de torsion on trouverait, par contre, un moment fléchissant (de variation linéaire) très important.

3.524 *Nervures de « transformation de torsion ».* — Nous désignons ainsi des cloisons situées au niveau de changements brusques dans la structure du caisson de torsion. Nous donnons deux *cas particuliers* de mise en équilibre de ces nervures.

a) Passage d'un caisson avant à un caisson arrière. — Il arrive que des nécessités d'aménagement obligent à utiliser dans une même structure de voilure, un caisson de torsion avant, puis un caisson arrière. Il est alors nécessaire de prévoir une ou plusieurs cloisons spéciales au niveau de cette transformation brutale du système résistant en torsion.

C'est le cas de la nervure ABCDE de la figure 20 *a.*

Le « moment de torsion » M_t (évalué par rapport à l'âme du longeron) est transmis, jusqu'à cette nervure, par un flux

$$\tau_1 = \frac{M_t}{2\,\Omega_1}$$

appliqué sur le périmètre du caisson avant.

Il s'équilibre sur le caisson arrière par un flux

$$\tau_2 = -\frac{M_t}{2\,\Omega_2}.$$

(Les efforts de flexion du longeron se transmettent directement.)

1. — Dans le cas A traité planche 43, la cloison considérée joue le même office qu'une nervure courante.

On en déduit le *diagramme des efforts* dont l'allure est représentée sur la figure 20 *b*.

Les équations de ces courbes sont :

cloison avant : $T_1 = \tau_1 h_1$, $\quad M_1 = 2\tau_1 \Delta\Omega_1$;
cloison arrière : $T_2 = -\tau_2 h_2$, $\quad M_2 = -2\tau_2 \Delta\Omega_2$;

en désignant, au niveau de deux sections courantes S_1 et S_2 par :

h_1 et h_2 les « hauteurs de profil » ab et cd,
$\Delta\Omega_1$ l'aire abC, $\quad \Delta\Omega_2$ l'aire cd ED.

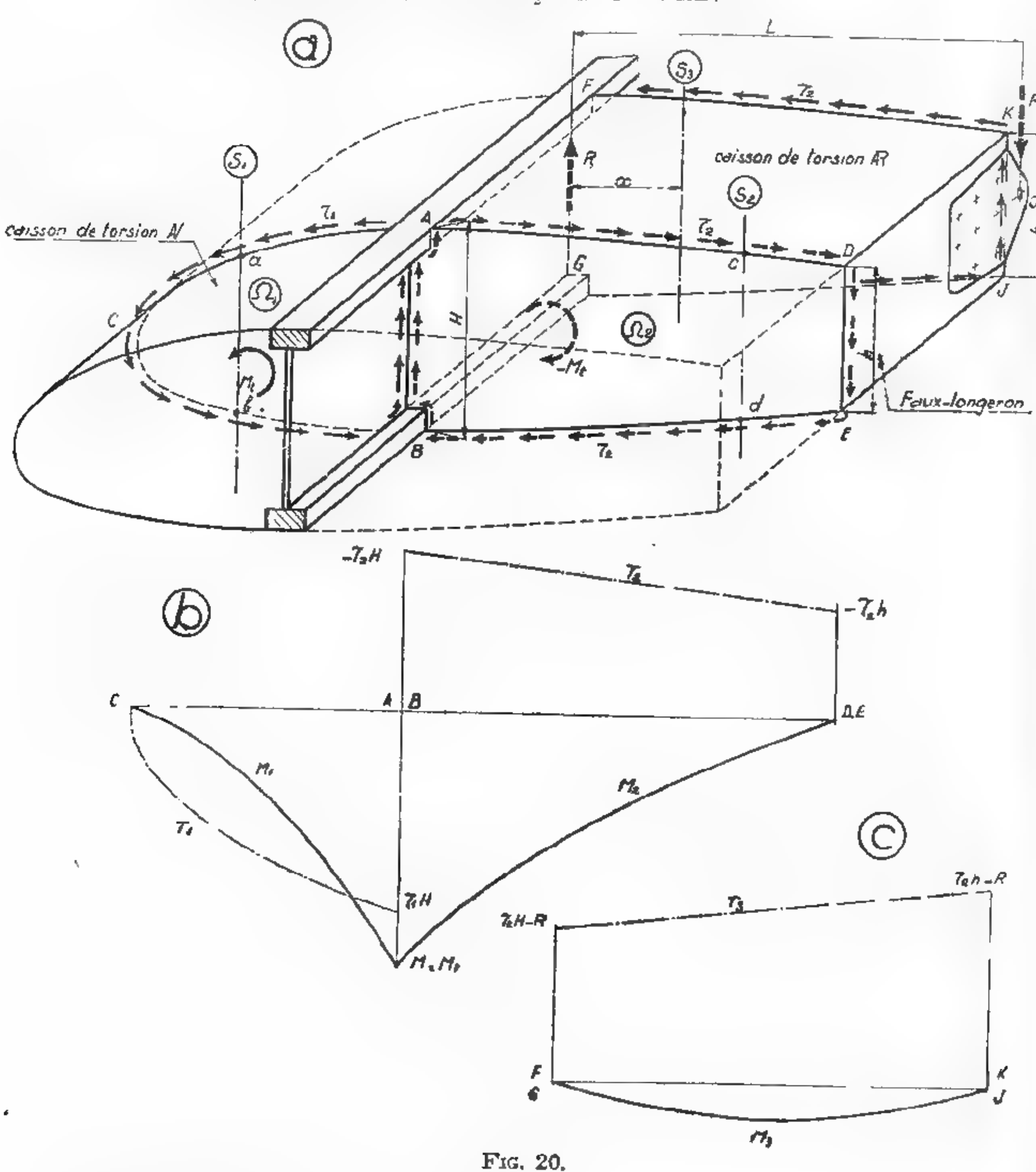


Fig. 20.

Les *efforts maxima* ont lieu en AB où

$T_1 = \tau_1 H$, $\quad T_2 = -\tau_2 H \quad$ et $\quad M_1 = M_2 = M_t$.

(Les attaches en A et B de chaque nervure doivent transmettre entre elles des composantes horizontales de flexion égales à $\pm \dfrac{M_t}{H}$).

b) *Fermeture d'un caisson.* — C'est le cas de la nervure FGJK de la figure 20 *a* supposée située à l'aplomb du fuselage.

Le faux-longeron est *articulé* en O sur le fuselage.

Le moment de torsion M_t (transmis par le caisson arrière) s'équilibre par deux composantes

$$R = \pm \frac{M_t}{L}$$

appliquées en O et FG (section d'encastrement du longeron principal).

D'où les efforts suivants dans une section courante S_3 de la nervure considérée (fig. 20 *a* et 20 *c*)

$$T_3 = \tau_2 h_3 - R, \qquad M_3 = 2 \tau_2 \Delta \Omega_2 - Rx.$$

Le moment M_3 est nul à l'aplomb du longeron et du faux longeron.

La cloison travaille essentiellement au *cisaillement* et faiblement en flexion.

Remarque. — Si le caisson était *rectangulaire* et de hauteur H_1 on aurait

$$\Omega_2 = H_1 L \qquad \text{et} \qquad \tau_2 = \frac{M_t}{2 H_1 L}$$

d'où :

$$T_3 = \frac{M_t}{2 L} - \frac{M_t}{L} = - \frac{M_t}{2 L} = \text{constante}$$

et

$$M_3 = 2 \frac{M_t}{2 H_1 L} H_1 x - \frac{M_t}{L} x = 0$$

d'où travail en cisaillement pur.

3.53 Conclusion. — Les calculs ci-dessus montrent que, dans une structure à âmes minces, *il y a nécessité absolue de disposer des « cloisons répartitrices » au plus près de chaque charge concentrée importante ou de chaque changement de forme.* Il serait, par exemple, illusoire de ne reprendre une ferrure importante que sur les semelles du longeron ou sur les tôles de revêtement en pensant que « les charges introduites resteront dans ces éléments ». Le revêtement peut, tout au plus, tenir lieu de *gousset* pour intéresser quelques nervures voisines. Faute de cloisons, ces charges engendreraient très vite des contraintes et des déformations très importantes de la structure. Celle-ci transmettrait, en effet, la torsion par un mode de travail comparable à une *flexion différentielle* (déformation des sections droites en parallélogramme).

Ces conclusions sont valables pour toutes les structures à revêtement semi-travaillant ou totalement travaillant.

4. STRUCTURES MONOLONGERON AVEC DEUX CAISSONS DE TORSION

4.1 GENERALITES

Ces structures sont également essentiellement utilisées dans la construction des *voilures* ou *empennages*.

Elles comprennent (fig. 21) :

un *monolongeron* identique à ceux des structures étudiées au paragraphe 3,
un caisson de torsion de bord d'attaque (ou *caisson avant*),
un caisson de torsion de bord de fuite (ou *caisson arrière*) généralement fermé par un *faux-longeron*.

Elles sont assimilables à des *poutres à deux semelles et trois âmes minces* dont l'étude théorique a été effectuée au paragraphe **2.3** ci-dessus.

Elles présentent, relativement aux structures à un seul caisson de torsion, un avantage de *rigidité en torsion*. Leur calcul est, par contre, plus complexe et donc moins précis (calcul hyperstatique).

Nous ne développerons pas leurs principes de construction qui sont analogues à ceux exposés au paragraphe **3.2**.

Nous n'exposons, ci-après, que la répartition des *charges normales*, c'est à-dire parallèles à l'âme du longeron. Les charges dites « de traînée » sont, en effet, transmises de façons analogues à celles étudiées au paragraphe **3.33**.

4.2 TRANSMISSION DES CHARGES NORMALES.

4.21 Notations (fig. 21). — Les notations concernant les *caractéristiques de résistance* de la section droite envisagée sont résumées dans le tableau ci-après. Elles sont conformes à celles utilisées au paragraphe **2.3**, compte tenu de la simplification particulière due à la présence d'une âme plane (âme du longeron) [1].

Nous adopterons, pour les *efforts appliqués* à la section considérée, les notations suivantes (fig. 21) :

T = effort tranchant normal *brut* positif de bas en haut et appliqué à une distance b en arrière de l'âme du longeron.

Cet effort se décompose en :

$T'' = k \frac{M}{h}$ = effort tranchant réducteur (avec M = moment fléchissant et k = coefficient de convergence des semelles)

$T' = T - T''$ = effort tranchant *réduit*, appliqué à une distance :

$a = b \frac{T}{T'}$ en arrière de l'âme.

$M_t = T'\delta = T'(a+d) = T\,b + T'd$ = moment de torsion.

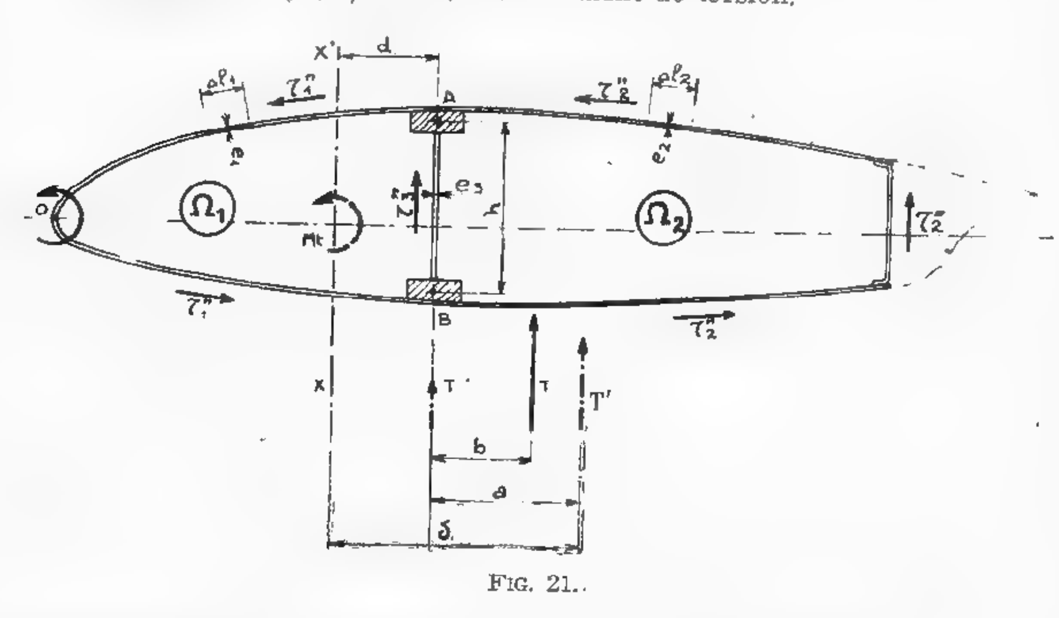


Fig. 21.

Remarque. — On aura avantage, en pratique, pour l'étude complète d'une structure à évaluer les *moments de transport*

$$M'_t = Tb$$

1. — La surface Ω_3 est nulle et : $\Omega'_1 = \Omega_1$; $\Omega'_2 = \Omega_2$ (fig. 8 et 21).

des efforts tranchants bruts de leurs points d'application à l'axe du longeron. Ces moments seront, ensuite, corrigés des termes complémentaires $T'd$ afin d'obtenir les moments de torsion réels M_t.

Tableau récapitulatif des notations et résultats

	Désignation	Ame 1 (bord d'attaque)	Ame 2 (bord de fuite)	Ame 3 (longeron)
Caractéristiques géométriques	Epaisseurs	e_1	e_2	e_3
	Longueurs développées (de A à B)	l_1	l_2	h
	Paramètres — cas épaisseurs constantes	$\alpha_1 = \frac{l_1}{e_1}$	$\alpha_2 = \frac{l_2}{e_2}$	$\alpha_3 = \frac{h}{e_3}$
	Paramètres — cas épaisseurs variables	$\alpha_1 = \sum_B^A \frac{\Delta l_1}{e_1}$	$\alpha_2 = \sum_B^A \frac{\Delta l_2}{e_2}$	$\alpha_3 = \sum_B^A \frac{\Delta h}{e_3}$
	Surfaces caissons de torsion	Ω_1	Ω_2	
	Coefficients	$\frac{1}{A} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}$ $K = \dfrac{\frac{\Omega_2}{\Omega_1}(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3+\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\alpha_1}$		
	Décalage axe de cisaillement (positif en avant de AB)	$d = \frac{2A}{h}\left(\frac{\Omega_1}{\alpha_1} - \frac{\Omega_2}{\alpha_2}\right)$		
Flux de cisaillement	Flux de flexion pure	$\tau_1 = -\frac{T'}{h}\frac{A}{\alpha_1}$	$\tau_2 = \frac{T'}{h}\frac{A}{\alpha_2}$	$\tau_3 = \frac{T'}{h}\frac{A}{\alpha_3}$
	Flux de torsion pure	$\tau'_1 = \frac{M_t}{2(\Omega_1 + K\Omega_2)}$	$\tau'_2 = K\tau'_1$	$\tau'_3 = \tau'_1 - \tau'_2$
	Flux résultants	$\tau''_1 = \tau_1 + \tau'_1$	$\tau''_2 = \tau_2 + \tau'_2$	$\tau''_3 = \tau_3 + \tau'_3$

4.22 Flux de cisaillement. — Le tableau ci-dessus donne les expressions des flux de cisaillement agissant sur l'âme du longeron et sur les deux caissons de torsion (voir § **2.3**).

Afin de faciliter la combinaison des flux nous avons adopté un *sens positif* unique qui est celui engendrant un moment *piqueur* par rapport au bec d'attaque O (fig. 21).

4.23 **Application numérique.** — Nous donnons, **planche 44,** le calcul d'une section d'une structure monolongeron à deux caissons de torsion. Les notations utilisées sont identiques à celles ci-dessus. On voit que le décalage d de l'axe de cisaillement, par rapport au longeron, est faible.

4.3 CALCUL DES ÉLÉMENTS LONGITUDINAUX.

Le calcul des éléments longitudinaux : *longeron, revêtements* et *jonctions longitudinales*, s'effectue d'une manière analogue à celle exposée au

paragraphe **3.4** pour les structures monolongeron à un caisson de torsion.

Signalons toutefois que le calcul des *moments de torsion* M_t nécessite la détermination préalable de *l'axe de torsion* de la structure [1]. On adoptera pour cet axe la *droite* joignant (dans une vue en plan de l'aile) les traces des axes de cisaillement XX' de deux sections situées au voisinage des deux extrémités.

On aura, généralement, avantage à faire apparaître les « moments de transport » des charges totales, de leurs lignes d'application à l'axe du longeron ; ces moments s'exprimant avec les notations ci-dessus (fig. 21), par

$$\mu = T\ b.$$

On ajoutera ensuite les moments correcteurs

$$\mu' = T'\ d$$

pour obtenir les moments de torsion M_t (§ **4.21**).

4.4 CALCUL DES NERVURES.

Toutes les nervures se calculent comme des *cloisons* puisque les deux caissons avant et arrière participent à la transmission du cisaillement.

Leur principe de calcul est analogue à celui exposé au paragraphe **3.52** ci-dessus, sous réserve toutefois d'évaleur les accroissements ΔM_t en transportant les charges jusqu'à *l'axe de cisaillement* de la section considérée (et non jusqu'à l'âme du longeron comme pour les structures à un seul caisson de torsion).

5. STRUCTURES BI-LONGERONS AVEC CAISSON DE TORSION INTERMÉDIAIRE

5.1 GÉNÉRALITÉS (fig. 22).

Ces structures sont utilisées dans la construction des *voilures* et des *empennages* horizontaux ou verticaux.

Elles sont caractérisées par la présence de deux *longerons* à âmes minces planes, généralement situés de part et d'autre du maître-couple du profil, et réunis entre eux par des parois de revêtement non raidies longitudinalement [2].

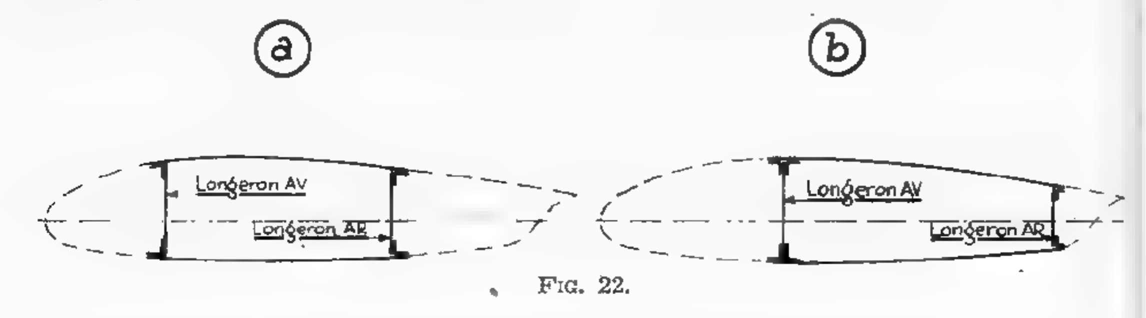


FIG. 22.

L'importance relative des deux longerons est très variable : certaines structures présentent des longerons de hauteurs et d'inerties sensiblement équivalentes (fig. 22 *a*) tandis que d'autres, au contraire, possèdent un lon-

1. — Cette détermination exigeant la connaissance des caractéristiques de résistance des sections, un calcul de dimensionnement ne pourra se faire que par approximations (comme pour tout système hyperstatique).

2. — Quand ces parois possèdent des raidisseurs longitudinaux continus et suffisamment serrés, la structure s'assimile à un *caisson central* à deux âmes, justiciable des procédés de calculs relatifs aux structures-coques (chap. XXII).

geron arrière très faible vis-à-vis du longeron avant (fig. 22 *b*). Ce longeron arrière s'assimile presque au faux-longeron des structures étudiées ci-dessus, mais la différence essentielle entre ces éléments réside cependant dans le fait que la continuité en flexion de ce longeron arrière est assurée à travers le fuselage, contrairement au faux-longeron.

Les semelles des longerons sont généralement constituées par des profilés ouverts, genre cornières, disposés d'un seul côté des âmes. Cette dissymétrie dans la structure des longerons est acceptable par suite de l'appui continu offert par le revêtement qui s'oppose au « déversement » de leurs sections.

Ces structures s'assimilent à des *poutres à quatre semelles et quatre âmes* dont l'étude théorique succincte a été effectuée au paragraphe **2.6**. Il est à remarquer que cette assimilation s'effectue aussi bien pour les efforts normaux que pour les efforts de traînée (contrairement aux structures précédentes).

Nous n'envisagerons donc, ci-après, qu'une seule orientation des efforts appliqués : celle des *efforts normaux*, c'est-à-dire appliqués parallèlement aux âmes des longerons.

5.2 AXE DE RÉFÉRENCE.

Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe **2.6** ci dessus, la répartition des efforts entre les divers éléments de la structure constitue un *problème hyperstatique*.

La méthode la plus utilisée pour lever l'indétermination, consiste à déterminer *l'axe élastique* de la structure à l'aide des *centres de flexion* des sections droites.

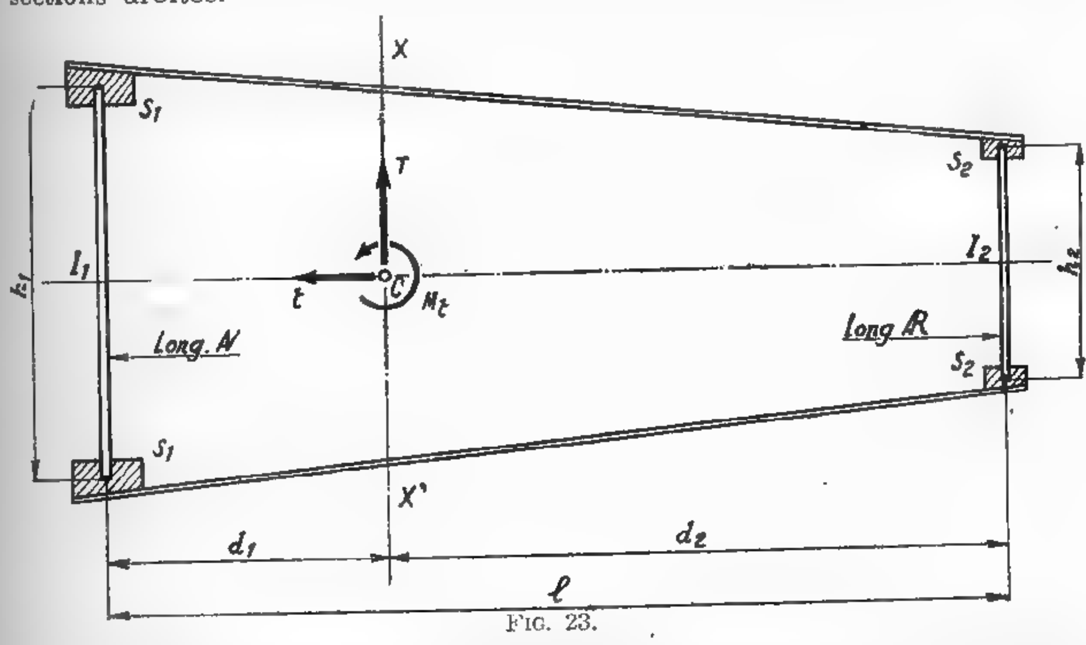


FIG. 23.

5.21 **Position du centre de flexion d'une section droite.** — Considérons la section droite représentée figure 23 et désignons par I_1 et I_2 les *moments d'inertie* respectifs, en flexion verticale, de chacun des longerons avant et arrière :

$$I_1 = \frac{s_1 h_1^2}{2}; \qquad I_2 = \frac{s_2 h_2^2}{2}$$

avec :

- s_1 et s_2 = sections de chaque semelle avant et arrière (y compris les « sections équivalentes » d'âmes et revêtement intéressés);
- h_1 et h_2 = hauteurs équivalentes des longerons (distances entre c. de g. des semelles).

Le *centre de flexion* C doit être situé sur un *axe vertical* XX′ tel qu'une force quelconque appliquée le long de cet axe engendre des *flèches de flexion identiques* des deux longerons (chap. XX, § **3.12**).

Or, les *flèches élémentaires* Δy dues à la déformation d'un intervalle longitudinal Δx sont inversement proportionnelles aux paramètres de rigidité $E_1 I_1$ et $E_2 I_2$ des longerons (voir chap. X). Si les variations de ces paramètres le long de la structure affectent des allures semblables pour les deux longerons et si ceux-ci ont même longueur, les *flèches totales* sont également inversement proportionnelles à ces paramètres.

Notons que ces conditions se trouvent pratiquement satisfaites pour toutes les structures courantes d'allure homothétique.

La verticale XX′ cherchée est donc, dans ces conditions, située au « *foyer des inerties* » des deux longerons, soit à des distances [1] :

$$d_1 = l\frac{I_2}{I_1+I_2} \text{ du longeron avant,}$$

$$d_2 = l\frac{I_1}{I_1+I_2} \text{ du longeron arrière.}$$

Remarques. — *a*) On peut également déterminer, de la même manière, la position en hauteur du centre C, en considérant les deux longerons formés par les semelles supérieures et les semelles inférieures ;

b) Le centre C est également le centre de torsion et donc le *centre élastique* de la section considérée ;

c) Nous avons déjà utilisé cette méthode au chapitre XX, paragraphe **4.32**.

5.22 Axe élastique de la structure. Calcul des efforts. — On adopte comme axe élastique la *droite* traduisant « au plus près » le lieu des centres élastiques C des diverses sections droites.

C'est sur cet axe que doit s'effectuer le *transport des charges* afin de déterminer les moments de torsion M_t (dont les vecteurs sont confondus avec cet axe). Notons que les *sections droites* envisagées doivent être normales à l'axe élastique.

5.3 CALCUL EN FLEXION NORMALE.

5.31 Répartition des efforts. — Désignons, dans une section considérée par (fig. 23) :

T l'effort tranchant normal brut (appliqué au niveau de X′),
M le moment fléchissant correspondant.

Ces charges se répartissent de la façon suivante :

longeron avant

$$T_1 = T\frac{d_2}{l}, \qquad M_1 = M\frac{d_2}{l}.$$

longeron arrière

$$T_2 = T\frac{d_1}{l}, \qquad M_2 = M\frac{d_1}{l}.$$

On en déduit les *efforts tranchants réduits* T'_1 et T'_2 agissant sur chaque longeron, compte tenu des coefficients de convergences longitudinales de leurs semelles.

Chaque longeron se calcule selon les méthodes habituelles.

---

1. — XX′ est confondue avec la ligne d'application de la résultante de deux forces verticales fictives proportionnelles aux inerties I_1 et I_2. Ces expressions supposent les modules d'élasticité E_1 et E_2 égaux (longerons de même matériau).

5.32 Cas particulier de longerons fortement convergents entre eux. — Dans certaines structures (empennages verticaux, en particulier) les deux longerons présentent une convergence qui donne lieu à des *corrections* non négligeables des efforts ci-dessus.

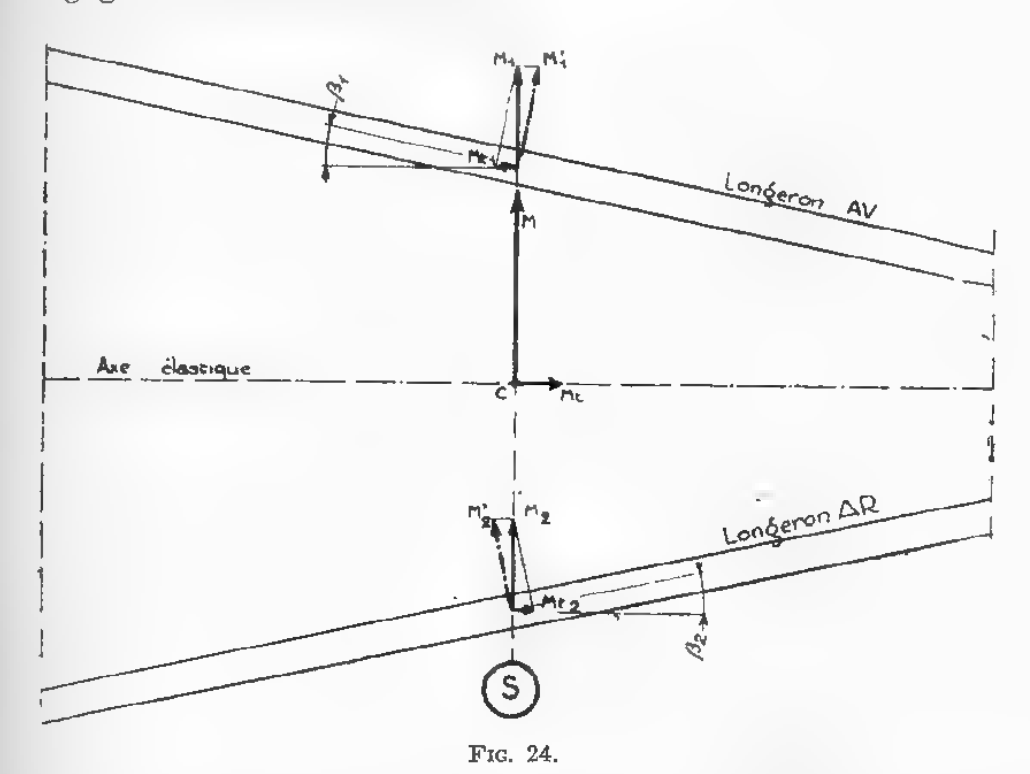


Fig. 24.

La figure 24 représente la vue en plan d'une telle structure.

Soient M_1 et M_2 les moments déterminés, selon la méthode ci-dessus à partir du moment fléchissant total M appliqué à la section droite S considérée. Leurs vecteurs sont contenus dans le plan de la section S.

Ces moments se décomposent en :

$$M'_1 = \frac{M_2}{\cos\ \beta_1} \qquad \text{et} \qquad M'_2 = \frac{M_2}{\cos\ \beta_2},$$

$$M_{t_1} = -M_1\ \ \text{tg}\ \beta_1 \qquad \text{et} \qquad M_{t_2} = M_2\ \text{tg}\ \beta_2.$$

Les premiers sont transmis, réellement, par *flexion* de chaque longeron [1].

Les deux autres donnent lieu à un *moment de torsion correctif*

$$M'_t = M_{t_1} + M_{t_2}.$$

Il convient de tenir compte de cette correction dans le calcul de M_t.

5.4 CALCUL EN TORSION

5.40 Remarque préliminaire. — Nous avons vu au chapitre VIII qu'un état de torsion pure, c'est-à-dire donnant lieu exclusivement à des contraintes tangentielles, engendrait, en général, un phénomène de *gauchissement* des sections droites des poutres.

Ce phénomène présente peu d'intérêt pour les structures monolongeron

1. — Les efforts tranchants T_1 et T_2 sont inchangés. La relation générale $\Delta M = T\ \Delta x$ reste satisfaite, car les Δx_1 et Δx_2 de chaque longeron sont avec le Δx de la structure (compté sur l'axe élastique), dans le même rapport que M'_1 et M'_2 avec M_1 et M_2.

qui ne possèdent pas d'éléments s'opposant efficacement à cette déformation et donc recevant des charges supplémentaires.

Par contre, si l'on impose à la structure étudiée présentement une *section droite rigide* (encastrement aile-fuselage par exemple), les semelles situées aux quatre angles pourront encaisser des *efforts normaux* provenant de cet empêchement à une libre déformation.

L'état de contraintes résultant devient complexe dans un cas général. Nous traitons ci-après, au paragraphe 5.42, un *cas particulier* simple ayant pour but de faire apparaître l'ordre de grandeur des corrections obtenues.

5.41 Calcul en torsion pure. — Toutes les sections non situées à proximité d'un encastrement rigoureux sont, pratiquement, libres de se gauchir.

En effet, les nervures (ou cloisons) n'opposent qu'une faible résistance à ces déformations qui se produisent normalement à leurs plans.

On pourra donc, en pratique, calculer toutes ces sections en supposant un *état de torsion pure* (ou libre) qui se traduit par un *flux de cisaillement constant* dans une même section droite :

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega}$$

avec Ω = aire du caisson de torsion.

Les longerons ne subissent donc aucune contrainte normale dûe à M_t.

5.42 Cas particulier de caisson encastré [1].

5.421 *Données* (fig. 25). — Nous nous placerons dans le cas particulier simple suivant : Caisson de torsion de *section rectangulaire constante* (dimensions l et h) soumis à un *moment de torsion* M_t *constant* sur toute sa longueur L. La section d'origine ABCD est supposée *entièrement libre* de se gauchir et la section terminale A'B'C'D' *parfaitement encastrée.*

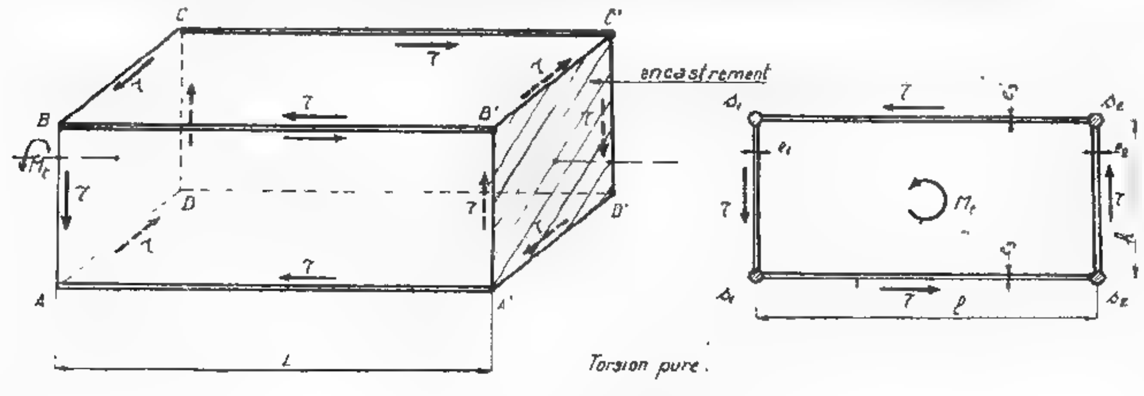


Fig. 25.

Nous désignerons par :

s_1 la section des semelles AA' et BB' et e_1 l'épaisseur de l'âme intermédiaire ;

s_2 la section des semelles CC' et DD' et e_2 l'épaisseur de l'âme intermédiaire ;

e_3 l'épaisseur des âmes horizontales (revêtement).

5.422 *Equilibre.* — La figure 25 représente *l'état de torsion pure* (§ 5.41) qui donne lieu au flux de cisaillement constant

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\Omega} = \frac{M_t}{2\,h\,l}\ .$$

1. — *Référence* : Précis d'aérotechnique. Re 3/1, par M. Robin.

L'encastrement rigide permet, en supplément à cet état, de fournir des *réactions longitudinales concentrées aux extrémités* A′, B′, C′ et D′ *des semelles.*

Désignons par R l'intensité inconnue de ces réactions qui doivent former un système nul [1].

Adoptons, par exemple, pour ces réactions, les *sens arbitraires* indiqués sur la figure 26. Cette figure représente « *l'état perturbateur* » dû à la présence de l'encastrement rigide.

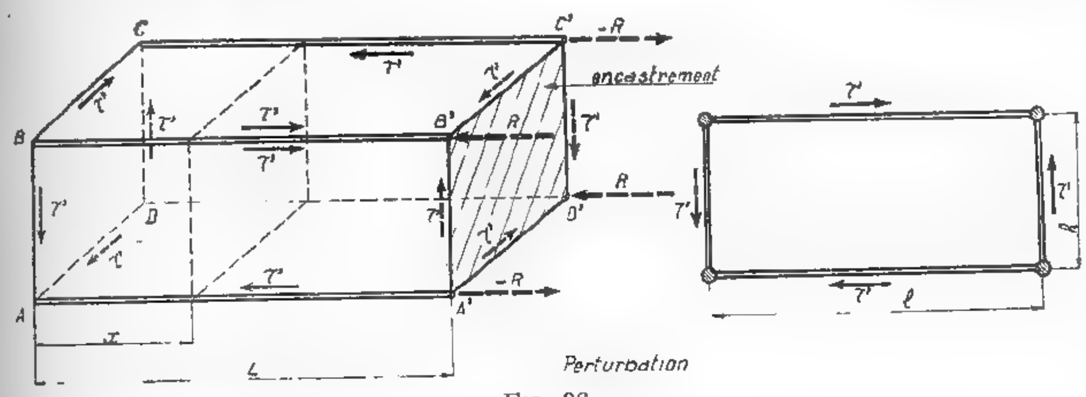


Fig. 26.

Cet état comprend un *flux de cisaillement d'intensité inconnue* τ' dont l'orientation sur chaque face est telle que les glissements longitudinaux correspondants engendrent des efforts normaux équilibrés finalement par les réactions R (fig. 26) [2].

On doit donc avoir

$2\,\tau'\,L = R$ (en valeur absolue).

Les quatre âmes du caisson supportent finalement les flux résultants indiqués sur la figure 27. Cette figure représente donc « *l'état de cisaillement résultant* » agissant sur le caisson encastré soumis à M_t.

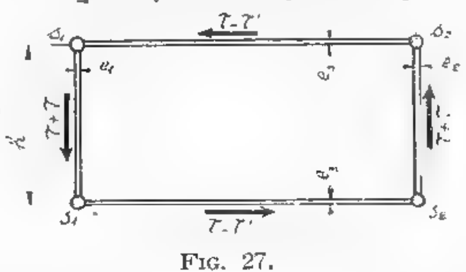


Fig. 27.

5.423 *Sollicitations des semelles.* — Le « *flux perturbateur* » τ' engendre sur chaque semelle des *efforts normaux* N qui ont pour expression, dans une section d'abscisse x, comptée à partir de l'extrémité libre ABCD (fig. 26)

$$N = \pm 2\,\tau'\,x \qquad \text{(compression ou traction).}$$

Les semelles subissent donc des *contraintes normales :*

$$n_1 = \pm \frac{N}{s_1} \qquad \text{et} \qquad n_2 = \pm \frac{N}{s_2}\,.$$

5.424 *Détermination du « flux perturbateur »* τ'. — Cette détermination constitue un problème hyperstatique que nous traiterons par la méthode du travail minimum (chap. XVIII, § 2.53).

1. — Les réactions ont donc même intensité R (en valeur absolue) de façon à former un système de deux couples en équilibre.

2. — Il est nécessaire que le « flux perturbateur » ait la même intensité sur les quatre faces, afin de former un système nul en torsion. Si l'on désignait, en effet, par τ'_1 et τ'_2 les flux verticaux et horizontaux respectifs, on devrait avoir (fig. 26) : $\tau'_1\,hl - \tau'_2\,lh = 0$, ce qui entraîne nécessairement $\tau'_1 = \tau'_2$.

a) Expression du potentiel élastique interne.

Travail des efforts normaux N sur chaque semelle de section s_1

$$\mathscr{E}_{N1} = \int_0^L \frac{N^2}{2\,E\,s_1}\,dx = \frac{2\,\tau'^2}{E\,s_1}\int_0^L x^2\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{L^3}{E\,s_1}\,\tau'^2.$$

Travail de N sur chaque semelle de section s_2

$$\mathscr{E}_{N2} = \frac{2}{3}\,\frac{L^3}{E\,s_2}\,\tau'^2.$$

Travaux de cisaillement des âmes :

Ame d'épaisseur e_1 (section he_1, effort tranchant : $(\tau + \tau')\,h$)

$$\mathscr{E}_{c1} = \frac{(\tau+\tau')^2h^2}{2\,G\,h\,e_1}\,L = \frac{h\,L}{2\,G\,e_1}\,(\tau+\tau')^2.$$

Ame d'épaisseur e_2

$$\mathscr{E}_{c2} = \frac{h\,L}{2\,G\,e_2}\,(\tau+\tau')^2.$$

Ame d'épaisseur e_3 (section le_3, effort tranchant : $(\tau - \tau')l$)

$$\mathscr{E}_{c3} = \frac{l\,L}{2\,G\,e_3}\,(\tau-\tau')^2.$$

Potentiel élastique interne

$$U = 2\,\mathscr{E}_{N1} + 2\,\mathscr{E}_{N2} + \mathscr{E}_{c1} + \mathscr{E}_{c2} + 2\,\mathscr{E}_{c3}$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{L^3}{E}\,\tau'^2\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) + \frac{h\,L}{2\,G}\,(\tau+\tau')^2\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right) + \frac{l\,L}{G\,e_3}\,(\tau-\tau')^2.$$

b) Equation.

La dérivée de U par rapport à l'inconnue τ' doit être nulle (théorème de Ménabréa), ce qui donne

$$\frac{8}{3}\,\frac{L^3}{E}\,\tau'\left(\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}\right) + \frac{h\,L}{G}\,(\tau+\tau')\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right) - \frac{2\,l\,L}{G\,e_3}\,(\tau-\tau') = 0$$

soit en simplifiant, et en posant les *paramètres sans dimension* suivants

$$\alpha_1 = \frac{h}{e_1}\;; \qquad \alpha_2 = \frac{h}{e_2}\;; \qquad \alpha_3 = \frac{l}{e_3}\;; \qquad \beta = \frac{8}{3}\,\frac{G}{E}\left(\frac{L^2}{s_1} + \frac{L^2}{s_2}\right)$$

$$\beta\,\tau' + (\alpha_1+\alpha_2)\,(\tau+\tau') - 2\,\alpha_3\,(\tau-\tau') = 0.$$

c) Inconnue.

On tire de cette équation l'expression de l'inconnue :

$$\boxed{\tau' = \tau\,\frac{2\,\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \beta}.}$$

5.425 *Remarques.*

a) Condition de torsion pure. — Cette expression montre que la *condition* à remplir pour que le *flux perturbateur* τ' soit *nul* est

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\,\alpha_3$$

soit

$$\frac{h}{e_1} + \frac{h}{e_2} = 2\,\frac{l}{e_3}.$$

Comme l (profondeur du caisson) est toujours supérieur à h (hauteur des longerons), il faudrait que le revêtement ait une épaisseur e_3 supérieure

à la moyenne de celles des âmes des longerons. Cette condition n'est, généralement, pas satisfaite en pratique.

• *b) Influence de la longueur* L. — On voit que le paramètre β croît comme le carré de L. Le flux τ' diminue donc rapidement quand la longueur du caisson augmente, ce qui justifie l'affirmation énoncée au paragraphe **5.41.**

Remarquons que cette longueur L constitue, en pratique, la *tranche d'envergure supposée influencée par la perturbation* due à l'encastrement rigide. On pourra, par exemple, adopter en première approximation.

$$L = l.$$

c) Rigidité de l'encastrement. — La théorie ci-dessus suppose essentiellement l'encastrement A'B'C'D' *infiniment rigide.* Le flux perturbateur ainsi trouvé constitue donc, en pratique, une *limite défavorable.*

5.43 Application numérique.

Données (voir notations fig. 25 et 26)

$h = 400$ mm ; $l = 1000$ mm ; $L = 1000$ mm (remarque *b*) ci-dessus) ; $s_1 = 1000$ mm² ; $s_2 = 200$ mm² ; $e_1 = 4$ mm ; $e_2 = 2$ mm ; $e_3 = 1{,}25$ mm ; $M_t = 6000$ mkg ; $E = 7000$ kg/mm² ; $G = 2700$ kg/mm² (AU4G).

Flux de torsion pure :

$$\tau = \frac{M_t}{2\ h\ l} = \frac{6000 \cdot 10^3}{2 \cdot 400 \cdot 1000} = 7{,}5 \text{ kg/mm.}$$

Paramètres :

$$\alpha_1 = \frac{400}{4} = 100; \quad \alpha_2 = \frac{400}{2} = 200 ; \quad \alpha_3 = \frac{1000}{1{,}25} = 800$$

$$\beta = \frac{8 \cdot 2700}{3 \cdot 7000}\left(\frac{1000^2}{1000} + \frac{1000^2}{200}\right) = 6170.$$

Flux perturbateur :

$$\tau' = 7{,}5\,\frac{1600 - 100 - 200}{100 + 200 + 1600 + 6170} = 7{,}5 \cdot 0{,}161 = 1{,}21 \text{ kg/mm.}$$

Flux résultants dus à M_t :

âmes des longerons : $\tau + \tau' = 7{,}5 + 1{,}21 = 8{,}71$ kg/mm,
revêtement : $\tau - \tau' = 7{,}5 - 1{,}21 = 6{,}29$ kg/mm.

Contraintes des semelles (à superposer à celles de flexion)

Effort normal par unité de longueur :

$$\pm 2\tau' = \pm 2{,}42 \text{ kg/mm.}$$

Effort normal à l'encastrement :

$$N = -R = \pm\, 2\tau' L = \pm 2{,}42 \cdot 1000 = \pm 2420 \text{ kg.}$$

Contraintes correspondantes (section d'encastrement) :

$$n_1 = \pm \frac{2420}{1000} = \pm 2{,}42 \text{ kg/mm}^2.$$

$$n_2 = \pm \frac{2420}{200} = \pm 12{,}1 \text{ kg/mm}^2.$$

Remarque. — Ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, la « longueur perturbée » L se détermine arbitrairement.

Si nous avions adopté $L = 2\ l = 2000$ mm (au lieu de $L = l$) nous aurions trouvé un flux perturbateur : $\tau' = 0{,}37$ kg/mm², soit un résultat 3,3 fois plus faible que ci-dessus.

Les efforts normaux et les contraintes des semelles auraient été $\frac{3,3}{2} = 1,65$ fois plus faibles que celles ci-dessus.

Il semble que la dimension $L = l$ puisse être adoptée avec sécurité.

5.5 CALCUL DES NERVURES.

Le principe de calcul des nervures, ou cloisons, est analogue à celui détaillé au paragraphe **3.5** pour les structures monolongerons à un caisson de torsion.

Les *nervures extérieures au caisson de torsion* (bord d'attaque et bord de fuite) se calculent comme des consoles encastrées sur le caisson et soumises à leurs charges propres.

Pour le calcul des *cloisons interlongerons*, il y a lieu de transporter au centre de flexion C de la structure, les charges qui les intéressent. On trouve ainsi, pour une cloison donnée :

un accroissement d'effort tranchant normal ΔT,
un accroissement de moment de torsion ΔM_t.

Pour la transmission de ΔT, la cloison se comporte comme une poutre appuyée sur les âmes des longerons avant et arrière.

L'accroissement ΔM_t est équilibré sur tout le périmètre du caisson, soit par un flux constant τ (torsion pure), soit par les flux résultants $(\tau + \tau')$ et $(\tau - \tau')$ déterminés ci-dessus pour les zones perturbées par un encastrement rigide.

6. COQUES A QUATRE LONGERONS ET REVÊTEMENT MINCE

6.1 GÉNÉRALITÉS (fig. 28).

Ces structures qui sont utilisées dans la construction des *fuselages* ou des *fuseaux-moteurs*, sont parfois désignées sous le nom de « *fausses-coques* ».

Elles présentent *quatre éléments longitudinaux principaux* continus : A, B, C et D appelées « *longerons* », ou encore « *quilles d'angle* ». Ces éléments sont réunis entre eux par un *revêtement mince* assurant la forme extérieure. Ce revêtement possède parfois, dans l'intervalle, de petits raidisseurs longitudinaux. Mais ces raidisseurs peuvent être pratiquement négligés pour le calcul de la structure, soit parce que leur continuité est interrompue au passage de chaque élément transversal (cadre ou couple), soit plus simplement par suite de la faiblesse relative de leurs sections.

De même que les structures de voilure étudiées au paragraphe précédent, ces structures en « fausses-coques » sont assimilables dans leurs *parties fermées* (fig. 28 *a*) à des *poutres à quatre semelles et quatre âmes minces*. Quelques différences entre les procédés de calcul sont dues au galbe des âmes et une simplification particulière est apportée par la présence d'un *axe de symétrie* (axe vertical).

Dans leurs *parties ouvertes* (fig. 28 *b*) ces structures s'assimilent à des *poutres à quatre semelles et trois âmes* dont l'étude théorique a été effectuée au paragraphe **2.5**.

Il peut même arriver qu'il ne subsiste, par intervalle, que *deux poutres indépendantes* (fig. 28 *c*). Cette disposition, impropre à la transmission de tous les efforts, doit être évitée autant que possible. Elle nécessite, en effet, des renforcements importants des longerons qui doivent assurer, par *flexion*

indépendante le transport des efforts tranchants, normalement transmis par les parois supprimées (efforts horizontaux dans le cas de la figure 28 *c*). La torsion doit, au surplus, se transmettre par *flexion différentielle* des faces subsistantes.

Nous n'étudierons ci-après que les *sections fermées* qui donnent lieu aux méthodes de calcul générales.

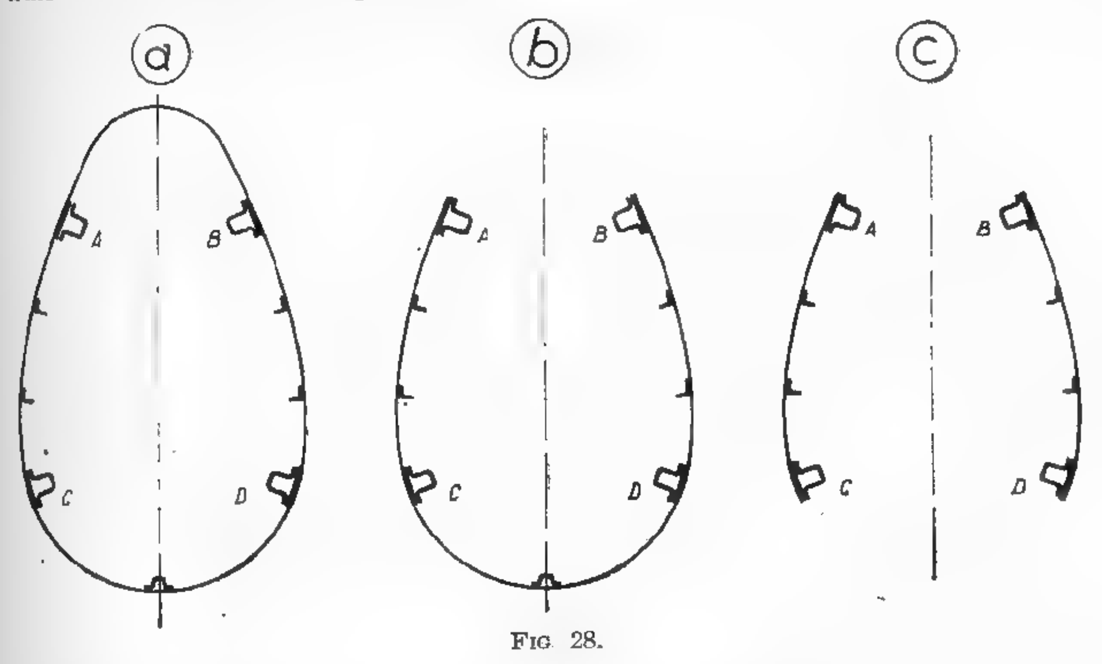


Fig. 28.

Remarque. — Certaines structures ne comportent que *trois longerons* principaux. Elles sont alors justiciables des procédés généraux exposés au paragraphe **2.4** (décomposition de forces isostatiques).

Quand le nombre de longerons devient supérieur à quatre, les structures peuvent s'assimiler, au point de vue de leurs procédés de calcul, aux fuselages-coques étudiés au chapitre suivant.

6.2 CALCUL DE LA STRUCTURE (ÉLÉMENTS LONGITUDINAUX : LONGERONS ET REVETEMENT).

6.21 Données. — Nous nous placerons dans le cas général où les quatre longerons de la « fausse-coque » présentent entre eux des angles de convergence longitudinale dans les deux projections orthogonales de la structure (vue de profil et vue en plan fig. 29 *a* et 29 *b*).

Soit xx' un *axe de référence* longitudinal servant à la détermination des efforts appliqués. Cet axe, contenu dans le plan de symétrie de la structure, est perpendiculaire aux plans des éléments transversaux (cadres ou couples) mais occupe une *position arbitraire en hauteur* [1].

La figure 29 *c* représente une *section droite* S normale à l'axe de référence. Nous désignons par s_1 et s_2 les sections respectives des longerons supérieurs A et B et des longerons inférieurs C et D, ces sections comprenant celles des *bandes de revêtement intéressées* (largeurs équivalentes, chap. XIX, § **2.4**).

Nous avons représenté, sur cette figure, le « *quadrilatère résistant au*

1. — On choisira, par exemple, l'axe de référence servant au tracé des formes. Nous verrons, ci-après, qu'il peut, cependant, être avantageusement choisi à l'aplomb de l'axe élastique de la structure, quand les longerons présentent des angles de convergence négligeables dans une vue en plan de cette structure.

cisaillement » *abcd* obtenu selon la méthode exposée aux paragraphes 1.42 et 2.6. Notons que les distances :

$$d_1 = \frac{2\,\Omega_1}{l_1}\ ; \qquad d_2 = \frac{2\,\Omega_2}{l_2}\ ; \qquad d_3 = \frac{2\,\Omega_3}{l_3}$$

doivent se compter à partir des droites joignant les centres de gravité des longerons, de même que les surfaces Ω_1, Ω_2 et Ω_3.

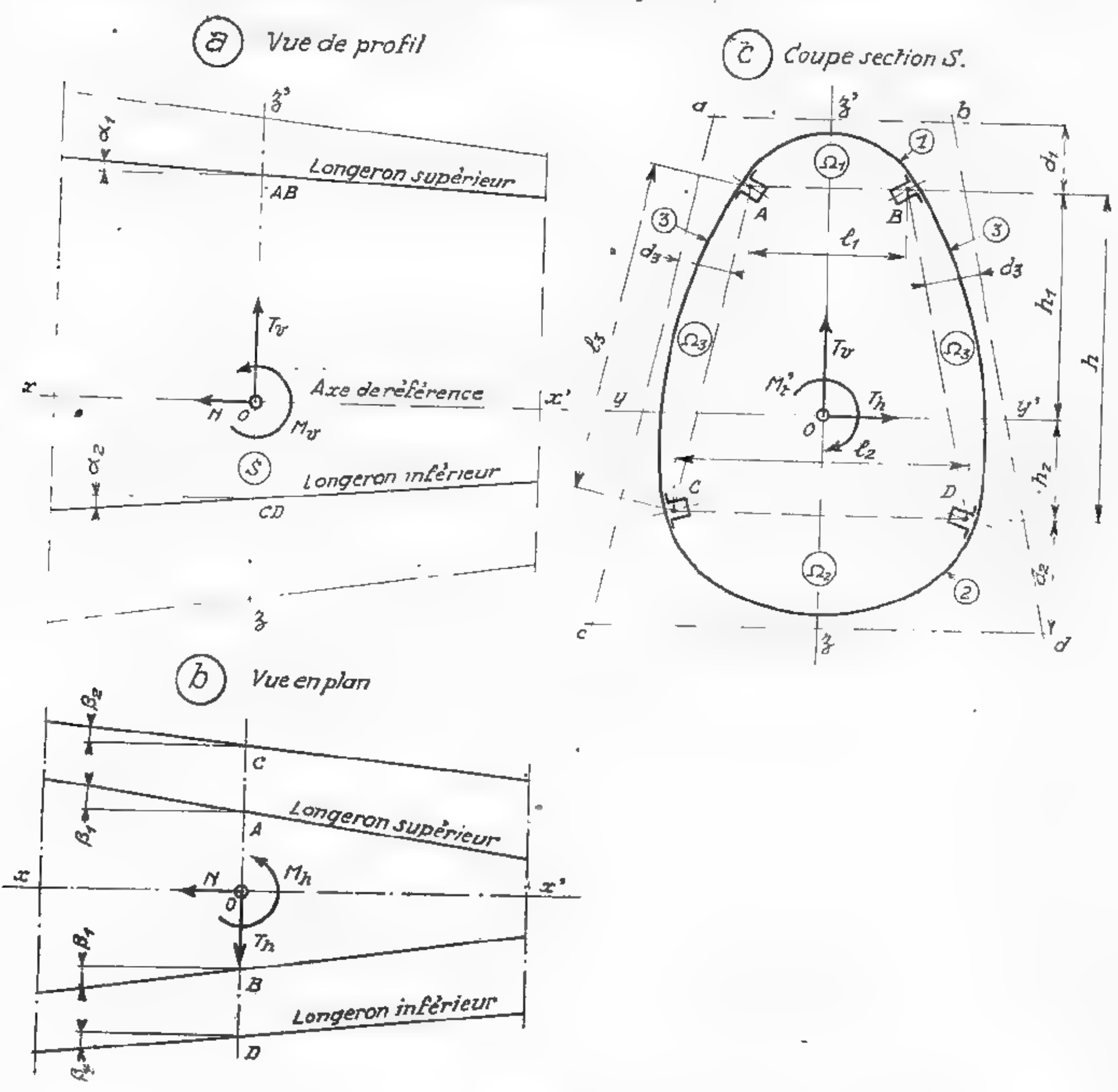


FIG 29.

Les efforts appliqués à la section S sont évalués par rapport aux axes yy' et zz' issus du point O : trace de l'axe longitudinal de référence xx' avec le plan de la section. Ces efforts comprennent :

Effort tranchant T_v, moment fléchissant M_v (flexion verticale).
Effort tranchant T_h ; moment fléchissant M_h (flexion horizontale).
Effort normal N.
Moment de transport M'_t (analogue à un couple de torsion autour de xx').

Nous étudions successivement, ci-après, la transmission de chacun de ces efforts.

Remarque. — Les angles de convergence α_1 et α_2; β_1 et β_2 (fig. 29 *a* et *b*)

seront toujours supposés suffisamment faibles pour que leurs cosinus soient assimilables à 1. Nous tiendrons compte, par contre, de leurs sinus ou tangentes.

6.22 Transmission de la flexion verticale.

6.221 *Moment fléchissant* M_v. — Ce moment engendre des *contraintes normales :*

longerons supérieurs A et B : $n_1 = \frac{M_v}{2\ h\ s_1}$ (compression),

longerons inférieurs C et D : $n_2 = -\frac{M_v}{2\ h\ s_2}$ (traction).

6.222 *Effort tranchant* T_v. — Une fraction T''_v de cet effort est équilibrée directement par la *convergence longitudinale* des longerons (vue de profil) :

$$T''_v = k\ \frac{M_v}{h}$$

avec k = coefficient de convergence verticale = $\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2$.

Il reste à transmettre, par cisaillement un *effort tranchant réduit*

$$T'_v = T_v - T''_v.$$

Cet effort se décompose, selon la figure 30, en deux efforts T'_3 agissant sur les parois AC et BD (âmes 3) :

$$T'_3 = \frac{T'_v}{2 \cos \gamma}$$

ce qui engendre un flux de cisaillement d'intensité

$$\tau_3 = \frac{T'_3}{l_3} = \frac{T'_v}{2\ h}$$

et une contrainte de cisaillement de ces parois (d'épaisseur e_3)

$$t_3 = \frac{\tau_3}{e_3}.$$

6.223 *Remarque.* — La structure se comporte donc, en flexion verticale, comme *deux poutres symétriques indépendantes* (fig. 30).

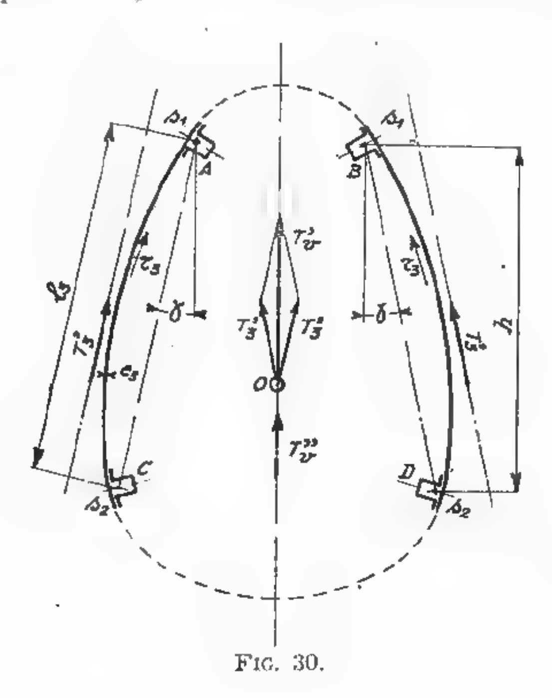


FIG. 30.

6.23 Transmission de la flexion horizontale.

6.231 *Moment fléchissant* M_h. — La répartition de ce moment entre les deux poutres horizontales formées par les longerons supérieurs et inférieurs est telle que les *flèches* de ces deux poutres soient *égales* (même principe qu'au paragraphe 5.2).

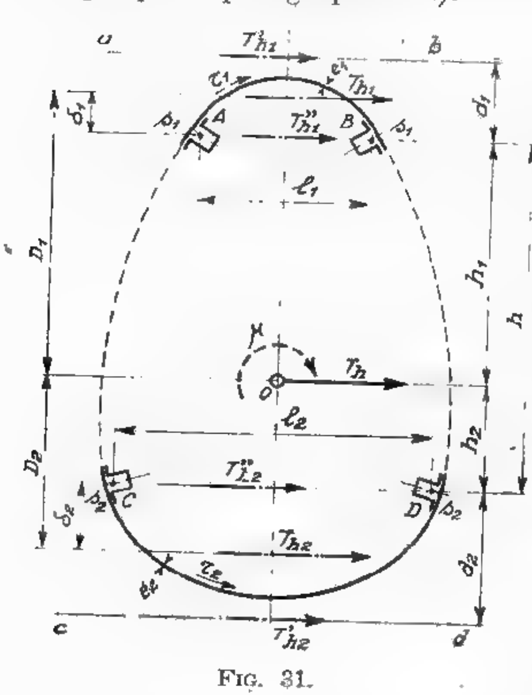


FIG. 31.

On a donc la répartition suivante :

sur la poutre supérieure : $M_{h_1} = M_h \frac{I_1}{I_1 + I_2}$,

sur la poutre inférieure : $M_{h_2} = M_h \frac{I_2}{I_1 + I_2}$.

en désignant par I_1 et I_2 les *moments d'inertie* respectifs de ces poutres :

$$I_1 = \frac{s_1\ l_1^2}{2} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{s_2\ l_2^2}{2}.$$

Ces moments donnent lieu aux *contraintes normales* suivantes :

longerons A et B : $n'_1 = \pm \frac{M_{h_1}}{l_1\ s_1}$.

longerons C et D : $n'_2 = \pm \frac{M_{h_2}}{l_2\ s_2}$.

6.232 *Effort tranchant* T_h. — Cet effort étant appliqué en un point O, choisi arbitrairement, ne peut donner lieu dans un cas général à un état de flexion pure, mais à une superposition de *flexion* et de *torsion*.

a) Efforts de flexion pure. — De même que M_h l'effort T_h doit, en flexion pure, se répartir proportionnellement aux inerties des deux poutres horizontales. On doit donc aussi avoir les *résultantes de cisaillement* suivantes sur chaque poutre :

poutre supérieure : $T_{h_1} = T_h \frac{I_1}{I_1 + I_2}$,

poutre inférieure : $T_{h_2} = T_h \frac{I_2}{I_1 + I_2}$.

Déterminons les « *lignes d'action* » de ces résultantes.

On sait, d'une part, que les longerons transmettent directement, par suite de leur convergence, des efforts :

$$T''_{h_1} = k_1 \frac{M_{h_1}}{l_1} \quad \text{et} \quad T''_{h_2} = k_2 \frac{M_{h_2}}{l_2}$$

avec

$$k_1 = 2 \operatorname{tg}\beta_1 \quad \text{et} \quad k_2 = 2 \operatorname{tg}\beta_2 \quad \text{(fig. 29 } b\text{)}.$$

Ces efforts sont transmis, respectivement, suivant les droites AB et CD. D'autre part, les panneaux de revêtement (âmes 1 et 2) réagissent suivant leurs axes de cisaillement *ab* et *cd* décalés de d_1 et d_2 et transmettent respectivement les *efforts tranchants réduits* :

$$T'_{h_1} = T_{h_1} - T''_{h_1} \quad \text{et} \quad T'_{h_2} = T_{h_2} - T''_{h_2}.$$

Les lignes d'action des résultantes sont donc à des distances de AB et CD (fig. 31) :

$$\delta_1 = d_1 \frac{T'_{h_1}}{T_{h_1}} \quad \text{et} \quad \delta_2 = d_2 \frac{T'_{h_2}}{T_{h_2}}.$$

On en déduit les distances D_1 et D_2 à l'axe de référence O :

$$D_1 = h_1 + \delta_1 \qquad \text{et} \qquad D_2 = h_2 + \delta_2.$$

Remarquons que ces distances ne constituent pas des « *paramètres géométriques purs* » de la section, car les longueurs δ_1 et δ_2 dépendent des rapports existant entre les efforts tranchants réduits et bruts, eux-mêmes fonction du moment fléchissant. Elles doivent donc se calculer dans chaque cas de charge.

Les efforts tranchants réduits T'_{h1} et T'_{h2} donnent lieu, sur les parois AB et CD à des *flux* et *contraintes de cisaillement de flexion pure* :

$$\text{paroi AB : } \tau_1 = \frac{T'_{h1}}{l_1} ; \qquad t_1 = \frac{\tau_1}{e_1} ;$$

$$\text{paroi CD : } \tau_2 = \frac{T'_{h2}}{l_2} ; \qquad t_2 = \frac{\tau_2}{e_2} .$$

b) Correction de torsion. — Les résultantes de cisaillement de flexion pure T_{h1} et T_{h2} engendrent, par rapport à l'axe de référence arbitraire O, un moment :

$$\mu = T_{h1}\, D_1 - T_{h2}\, D_2 \qquad \text{(fig. 31)}$$

Ce moment n'est nul que dans le *cas particulier* où le point O coïncide avec le *centre de flexion* de la section, c'est-à-dire quand D_1 et D_2 sont proportionnels à I_2 et I_1. Or, on sait que les distances D_1 et D_2 sont, elles-mêmes fonctions des charges appliquées, dans le cas général de longerons convergents [1].

Le moment μ constitue un *moment de torsion correcteur* qu'il convient de superposer à M_t (voir ci-dessous).

6.24 Transmission de la torsion. — Le *moment de torsion réel* M_t appliqué à la structure, a pour expression selon nos conventions de sens positifs (fig. 29 et 31) :

$$M_t = M'_t + \mu.$$

Il existe rarement des fuselages possédant des sections parfaitement encastrées. On peut donc admettre que M'_t est transmis exclusivement par *cisaillement* du revêtement, ce qui donne lieu à un *flux constant*

$$\tau = \frac{M_t}{2\,\Omega}$$

avec Ω = aire totale limitée par le périmètre du revêtement.

On en déduit les contraintes de cisaillement :

$$\text{paroi AB : } t'_1 = \frac{\tau}{e_1} ; \qquad \text{paroi CD : } t'_2 = \frac{\tau}{e_2} ; \qquad \text{paroi AC et BD : } t_3 = \frac{\tau}{e_3} .$$

6.25 Transmission de l'effort normal. — L'effort normal N, appliqué au point O, se transmet par compression (ou traction) des quatre longerons.

Il engendre donc les *contraintes normales* suivantes (fig. 29) :

$$\text{longerons supérieurs A et B : } n''_1 = \frac{N}{2\, s_1} \cdot \frac{h_2}{h}$$

$$\text{longerons inférieurs C et D : } n''_2 = \frac{N}{2\, s_2} \cdot \frac{h_1}{h} .$$

1. — Dans le cas de *longerons parallèles* ($\beta_1 = \beta_2 = 0$), Th_1 et Th_2 sont confondues avec les axes de cisaillement *ab* et *cd* (fig. 31). Le centre de flexion est alors indépendant des charges appliquées et on pourra donc adopter directement l'axe O à l'aplomb de ce centre.

6.26 Contraintes résultantes.

6.261 *Longerons* (contraintes normales).

longerons supérieurs A et B : $n_{r1} = n_1 \pm n'_1 + n''_1$,
longerons inférieurs C et D : $n_{r2} = n_2 \pm n'_2 + n''_2$.

6.262 *Revêtement* (contraintes tangentielles).

parois horizontales { AB : $t_{r1} = t_1 + t'_1$
CD : $t_{r2} = t_2 - t'_2$

parois verticales AC et BD : $t_{r3} = t_3 \pm t'_3$.

6.27 Remarque. — Il convient, évidemment, de comparer les contraintes de cisaillement ci-dessus aux *contraintes critiques* de chaque panneau (chap. XIX).

On pourra, en pratique, se contenter d'évaluer les contraintes critiques de cisaillement pur (plaques galbées, chap. XIX, § **4.42**). Si elles sont inférieures aux contraintes réelles ci-dessus, il conviendra de tenir compte des *sollicitations complémentaires* des longerons, cadres et tôles, engendrées par le travail du revêtement en traction diagonale.

On se reportera, pour ce dernier point, au calcul des fuselages-coques traité au chapitre suivant.

6.28 Application numérique. — Nous donnons **Planche 45**, le calcul numérique d'une section droite fermée d'un fuselage-coque à quatre longerons. Les notations utilisées sont conformes à celles adoptées ci-dessus.

6.3 CALCUL DES ÉLÉMENTS TRANSVERSAUX.

Ces éléments appelés *cadres* ou *couples* sont justiciables des mêmes procédés de calcul que ceux exposés au chapitre suivant (calcul des couples de fuselages-coque, § **6.5**).

Ils constituent un *cas particulier simplifié* de ces calculs, par suite du nombre restreint d'éléments longitudinaux de la structure.

Nous verrons qu'ils jouent le double rôle de « conservateurs de forme » (couples courants) ou « d'introducteurs de charges » (couples spéciaux).

CHAPITRE XXII

CALCUL DES STRUCTURES-COQUES

0. INTRODUCTION

Les *structures-coques* ou « *structures en coquilles* » sont encore désignées, d'une façon généralement assez impropre, par « *structures à revêtements totalement travaillants* ».

Leur emploi est de plus en plus répandu en construction aéronautique moderne. Il répond, en effet, pleinement, tout au moins en théorie, au souci de légèreté maximum, puisque les éléments nécessaires pour assurer les formes extérieures sont également chargés de transmettre la totalité des efforts généraux (normaux et tangentiels).

Signalons cependant que l'utilisation des structures-coques n'a été rendue pratiquement intéressante qu'à partir du moment où les charges unitaires importantes et les vitesses élevées ont imposé l'emploi de parois relativement épaisses. Nous savons, en effet, que des parois très minces nécessitent le soutien de nombreux raidisseurs longitudinaux pour pouvoir supporter, sans flambage, des contraintes appréciables. Le poids de ces raidisseurs pourrait alors surpasser celui de quelques membrures concentrées, convenablement disposées (poutres à âmes minces). Il reste néanmoins, dans ce cas, à l'avantage des structures en coquilles, le fait d'assurer une meilleure tenue des revêtements et, par suite, un meilleur « aspect aérodynamique » des constructions. C'est cette considération qui les a fait utiliser, même avec des revêtements très minces, dans la construction des fuselages-coques.

Les paragraphes **1.** à **4.** du présent chapitre sont réservés à l'exposé de quelques généralités et à l'étude théorique des *poutres-coques* soumises à diverses sollicitations.

Les paragraphes suivants traitent des applications classiques des structures-coques dans la construction aéronautique. Nous avons développé d'une manière particulière, l'étude des *fuselages-coques* qui constitue l'une des applications les plus intéressantes de la résistance des matériaux appliquée aux éléments minces.

1. GÉNÉRALITÉS

1.1 DÉFINITION.

On désigne par *poutre-coque* ou *poutre en coquille* une surface prismatique, ouverte ou fermée, dont les parois sont capables de résister à des contraintes *normales* (tractions et compressions) ou *tangentielles* (cisaillements) agissant dans leurs plans.

Cette définition fait apparaître la différence essentielle existant entre les structures en coquilles et celles étudiées au chapitre précédent dont les parois, ou âmes minces, ne résistaient, par définition, qu'à des cisaillements.

1.2 COQUES THÉORIQUES ET PRATIQUES.

La définition ci-dessus s'applique donc à des éléments dont les parois sont *suffisamment minces* pour que l'on puisse admettre une égale réparti-

tion des tensions normales dans leurs épaisseurs et une orientation bien définie des cisaillements dont les *flux* doivent être *tangents* aux contours des sections droites. C'est ce que nous avions admis précédemment, lors de l'étude de la flexion et de la torsion des poutres d'épaisseurs minces (chap. IX, § 3.73 et 3.74 ; chap. XI, § **3.** et **4.** ; chap. XIII, § **4.** et **5.**). Nous avions alors, implicitement, supposé qu'aucun phénomène d'*instabilité* ne se manifestait le long de leurs parois non raidies. Cette condition implique, soit des contraintes faibles, soit des parois *suffisamment épaisses* pour être stables (chap. XIX).

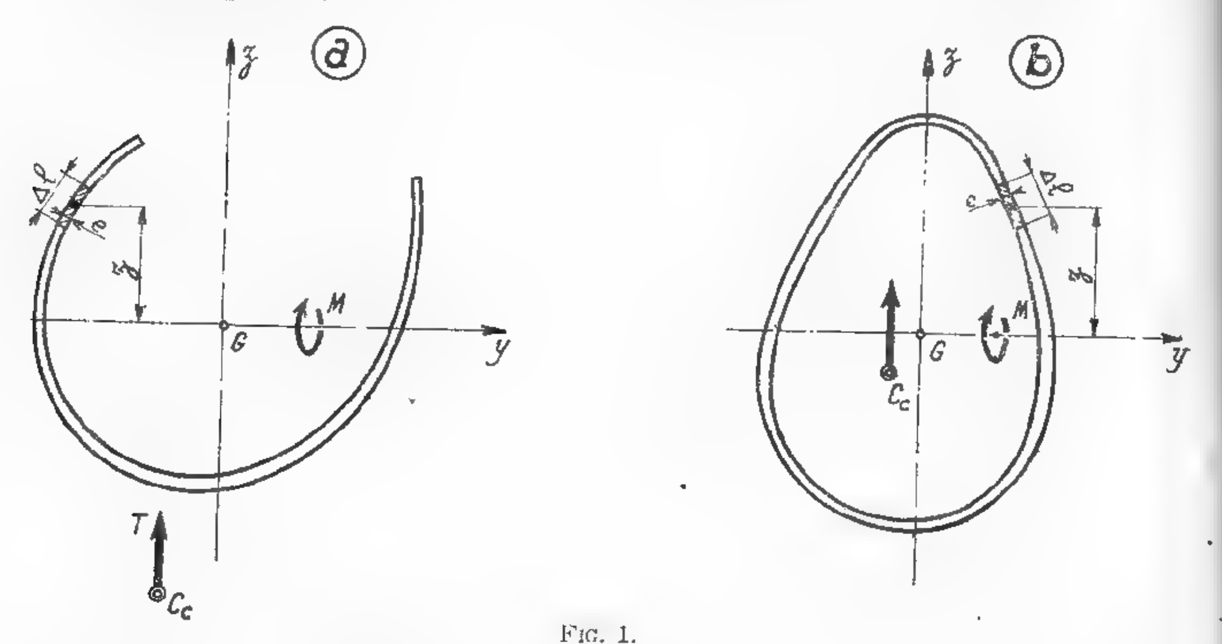


Fig. 1.

Nous conviendrons de désigner par « *coques théoriques* » ces poutres dont les parois résistent, par elles-mêmes, sans le secours d'aucun élément raidisseur (fig. 1 *a* et 1 *b*). Elles comprennent, notamment, tous les *profilés minces usuels*. Elles reçoivent, par contre, peu d'applications pour la réalisation des ensembles de structures, hormis quelques parties peu chargées de fuselages-coques ou quelques constructions particulières dites « *monocoques* » ou « *corps creux* ».

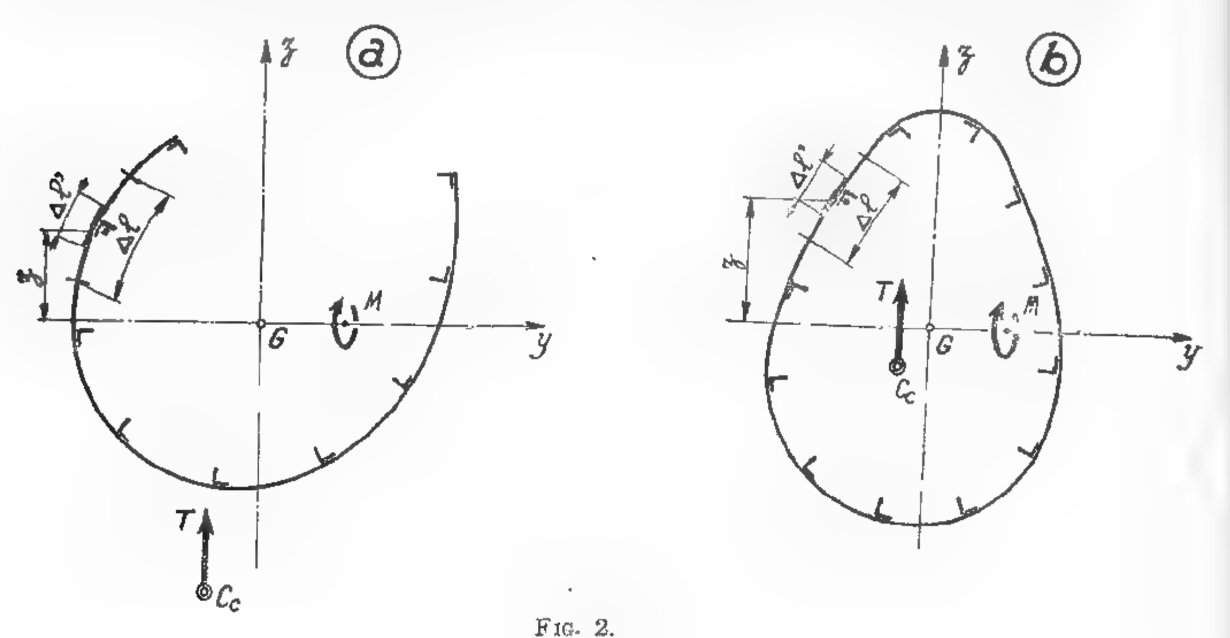


Fig. 2.

Il est possible, par contre, de *stabiliser* des parois de revêtement, relativement minces, en leur adjoignant des *raidisseurs longitudinaux* (ou *lisses*) convenablement serrés. On arrive ainsi aux procédés de construction fort répandus que nous désignerons par « *coques* (ou coquilles) *pratiques* » (fig. **2** *a* et **2** *b*).

Remarque. – La stabilisation des parois situées entre les raidisseurs longitudinaux des coquilles pratiques peut néanmoins n'être que partielle. Dans ce cas, leur participation à la résistance en flexion de l'ensemble reste suffisamment élevée, après plissement, pour ne pas être négligeable, *à priori*, comme dans le cas des « âmes minces ». Cette participation est, d'ailleurs, mise en évidence d'une façon très pratique par la notion de « *largeurs équivalentes* » exposée au chapitre XIX (§ 2.43).

Remarquons que la distinction entre une « poutre à âmes minces » et une coque pratique devient, de ce fait, assez subtile. On peut ainsi définir les *coques pratiques* comme des *poutres à âmes minces possédant un grand nombre de semelles et d'âmes.*

2. THEORIE DE LA FLEXION PURE DES POUTRES-COQUES

2.0 REMARQUE PRÉLIMINAIRE.

Nous nous placerons, ci-dessous, dans le cas général, de coques possédant des sections droites de formes quelconques (non symétriques). Nous supposerons, par contre, que ces poutres sont *cylindriques*, c'est-à-dire que leurs génératrices ne présentent aucune convergence longitudinale. L'influence de cette convergence sera étudiée dans chacun des cas particuliers de structures, envisagés ci-après

2.1 NOTATIONS.

Dans une coque, théorique ou pratique, et de section ouverte ou fermée (fig. 1 et 2), nous désignerons par :

G le *centre de gravité des éléments résistants* d'une section droite. Dans le cas d'une coque théorique, ces éléments résistants comprennent l'ensemble du revêtement, tandis que dans une coque pratique, ils comprennent les raidisseurs et seulement les bandes équivalentes de revêtement (voir ci-après) ;

Gy et Gz, les *axes principaux d'inertie* de cette section droite résistante (voir chap. II, § **8.4**) ;

Gx *l'axe longitudinal,* normal aux plans des sections droites, issu du centre de gravité G ;

C_c le *centre de cisaillement* de la section droite résistante (voir ci-après) ;

$C_c X$ l'axe longitudinal, issu de C_c, qui constitue *l'axe élastique* de la coque (chap. XX, § **3.2**).

Afin de simplifier les notations, nous conviendrons d'étudier seulement la *flexion autour de l'axe principal* Gy, la flexion autour de Gz s'effectuant d'une manière identique. Nous désignerons, dans ces conditions, au niveau d'une même section droite par :

T l'*effort tranchant* qui est donc parallèle à Gz et doit passer par C_c pour obtenir un « *état de flexion pure* » (chap. XI, § **6.**) ;

M le *moment fléchissant*, dont le vecteur est parallèle à Gy.

Nous adopterons enfin les notations, concernant les *caractéristiques de résistance* des sections droites, résumées dans le tableau ci-après.

DÉSIGNATION	COQUE THÉORIQUE	COQUE PRATIQUE
Δl	Elément de longueur du périmètre de la section droite.	Distance (curviligne) entre les centres des deux panneaux délimités par les deux raidisseurs situés de part et d'autre de celui considéré.
e	Epaisseur (moyenne) du revêtement dans l'intervalle Δl.	
ΔS	Elément de surface du revêtement $\Delta S = e\Delta l$	Tôle non plissée : $\Delta S = e\Delta l + S_r$ Tôle plissée : $\Delta S = e\Delta l' + S_r$ avec : S_r = section du raidisseur considéré ; Δl = largeur de revêtement « intéressée » par ce raidisseur (largeurs équivalentes, ch. XIX, § **2.43**).
z	Distance du c. de g. de l'élément ΔS à l'axe de flexion Gy (orientée positivement selon l'axe Gz).	
ΔW	Moment statique élémentaire par rapport à l'axe de flexion : $\Delta W = z\Delta S$ (positif au-dessus de Gy et négatif au-dessous de cet axe).	
I	Moment d'inertie principal (autour de Gy) de la section résistante: $I = \Sigma z^2 \Delta S$	

2.2 CONTRAINTES NORMALES DE FLEXION.

La contrainte normale subie par un élément de section, situé à la distance z de l'axe neutre, est donné par la loi générale de la *flexion plane*, soit :

$$n = \frac{M}{I} z.$$

Dans une coque pratique soumise à une flexion pure, les contraintes normales des lisses sont donc proportionnelles à leurs distances à l'axe de flexion comme pour les « fibres » des poutres prismatiques ordinaires [1].

2.3 REPARTITION DE L'EFFORT TRANCHANT.

2.30 Remarque préliminaire. — Comme dans tout corps mince, l'effort tranchant donne lieu à un *flux* tangent au contour, dont l'étude de la répartition est le problème de la flexion des coques.

1. — Cette règle ne constitue, en réalité, qu'une approximation dans le cas de structures très profondes (caissons très plats par exemple) où les déformations de cisaillement, non négligeables, faussent l'hypothèse de flexion plane.

Nous avons déjà abordé ce problème, dans quelques cas particuliers, au chapitre IX (§ 3.7). Nous donnons ci-dessous des méthodes générales, applicables à des sections de formes quelconques.

La recherche de la position des *centres de cisaillement* de ces sections, ainsi que l'énoncé de leurs *conditions de flexion*, seront exposés au paragraphe 2.4 ci-après.

2.31 Accroissements de l'intensité du flux de cisaillement. — *De part et d'autre d'un élément* ΔS (notation ci-dessus), le flux de cisaillement subit un *accroissement* parfaitement déterminé, donné par :

$$\Delta\tau = \frac{T}{I}\,\Delta W.$$

Nous savons que cet accroissement résulte de la « *mise en charge longitudinale* » de l'élément considéré.

Si l'on connaît la valeur de τ en un point quelconque du contour d'une section droite, il sera donc possible de connaître le flux en tous les points de ce contour (par simples additions).

Nous examinons successivement le cas des sections ouvertes et celui des sections fermées.

2.32 Flux de cisaillement de flexion pure le long d'une section ouverte.

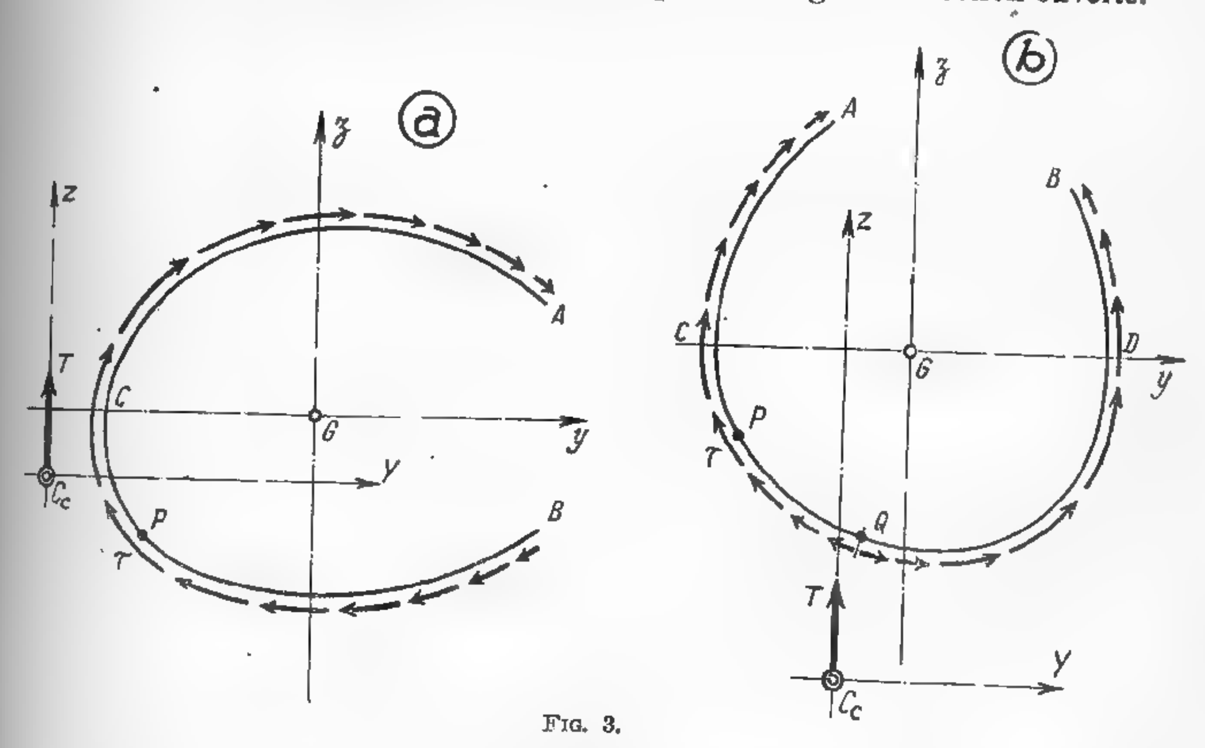


Fig. 3.

2.321 *Flux en un point.* — Considérons les sections ouvertes représentées figures 3 *a* et 3 *b*, auxquelles s'appliquent toutes les notations précédemment définies. On sait que le flux doit être nul aux bords libres A et B (plus d'éléments à mettre en charge). En un point P quelconque du contour, *l'intensité du flux de cisaillement de flexion pure* est donc

$$\tau = \sum_A^P \Delta\tau = \frac{T}{I}\sum_A^P \Delta W$$

ce que nous écrirons :

$$\boxed{\tau = \frac{T}{I}\,W}$$

en désignant par W le *moment statique par rapport à l'axe de flexion, des éléments situés entre une extrémité libre et le point considéré :*

$$W = \sum_A^P z\Delta S = -\sum_B^P z\Delta S.$$

2.322 *Variation du flux.* — *a*) Dans le cas de la figure 3 *a* où l'axe de flexion Gy ne coupe la coquille qu'en un seul point C, le flux *croît* de A à C où les ΔW sont positifs. Il *décroît ensuite* de C à B, où les ΔW sont négatifs. Il ne possède donc que *deux valeurs nulles* en A et B. C'est ce que schématise le système de flèches (de longueurs variables) disposées sur cette figure ;

b) Dans le cas de la *figure* 3 *b* où l'axe Gy coupe la coque en deux points C et D l'on obtient, en convenant d'adopter comme sens positif des flux celui des aiguilles d'une montre :

flux *positif croissant* de A à C (ΔW positifs) ;
flux *positif décroissant* de C à Q (ΔW négatifs) le point Q étant tel que :

$$\sum_A^C \Delta W = -\sum_Q^C \Delta W :$$

flux *négatif croissant* (en valeur absolue) de Q à D (ΔW négatifs) ;
flux *négatif décroissant* (en valeur absolue) de D à B (ΔW positifs).

On obtient donc *trois points de flux nul :* A, B et Q.

Remarques. — *a*) Dans l'un et l'autre cas, le *flux* est toujours *maximum au niveau de l'axe neutre de flexion* Gy ;

b) Dans le cas d'une « *coque pratique* », les variations de τ s'effectuent *brutalement* au passage de chaque raidisseur (en supposant leurs sections concentrées en leurs centres de gravité). Les flux au voisinage immédiat de A et B ne sont pas nuls, mais possèdent des valeurs proportionnelles aux ΔW des éléments longitudinaux concentrés en ces deux points.

2.33 Flux de cisaillement de flexion pure le long d'une section fermée.

2.331 *Cas général.* — Considérons la section fermée *quelconque* (non symétrique) représentée figure 4 *a*, à laquelle se rapportent toutes les notations définies ci-dessus (§ 2.1).

On ne connaît, *a priori*, la valeur de τ en aucun point. Le problème est *hyperstatique*.

Pour le résoudre, *supposons la coque coupée* suivant la génératrice passant par un point A quelconque et désignons par X l'intensité inconnue du flux en ce point.

Le flux en un point quelconque P a pour expression :

$$\tau = X + \frac{T}{I} W \qquad (1)$$

avec $W = \sum_A^P \Delta W = \sum_A^P z\,\Delta S$ (même notation que ci-dessus).

Un élément de paroi de longueur Δl est soumis à une force de cisaillement :

$$f = \tau \Delta l.$$

Sa section étant : $s = e\,\Delta l$, il subit, par unité de dimension longitudinale, un *travail élémentaire de cisaillement* [1] :

$$\Delta U = \frac{f^2}{2\,Gs} = \frac{\tau^2}{2\,G}\,\frac{\Delta l}{e} \qquad \text{(chap. VIII, § 4.3).}$$

1. — Cette expression a la dimension d'une force, la largeur de l'élément étant prise égale à l'unité.

Le *potentiel interne* de ce fragment de coquille a donc pour expression :

$$U=\Sigma\Delta U=\frac{1}{2\,G}\sum r^2\,\frac{\Delta l}{e}$$

$$U=\frac{1}{2\,G}\sum\left(X+\frac{T}{I}\,W\right)^2\frac{\Delta l}{e}$$

(le signe Σ indiquant une somme à effectuer tout le long du *contour* de la section).

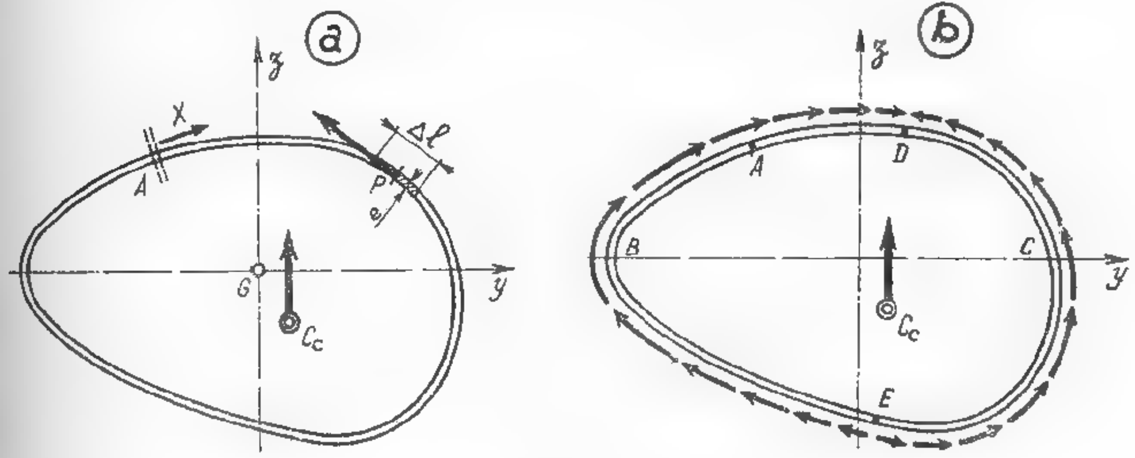


Fig. 4.

D'après le *théorème* de Ménabréa (chap. XVIII, § 2.53), on doit avoir :

$$\frac{\partial U}{\partial X}=0$$

soit, après simplifications :

$$X\sum\frac{\Delta l}{e}+\frac{T}{I}\sum W\,\frac{\Delta l}{e}=0$$

d'où l'on tire :

$$X=-\frac{T}{I}\,\frac{\sum W\,\frac{\Delta l}{e}}{\sum\frac{\Delta l}{e}}.$$

On en déduit la valeur de τ en chaque point du contour, à l'aide de l'expression (1) ci-dessus.

On obtient une allure de flux à deux « points de rebroussement » D et E (flux nul en ces points) telle que celle imagée par la figure 4 *b*.

Remarque. — Le numérateur de l'expression de X constitue, en réalité, une *intégrale double* puisque W est lui-même une *somme d'accroissements élémentaires*. Ce terme se calcule, en pratique, en effectuant la somme de produits élémentaires partiels (voir ci-après § **7.2**).

2.332 *Cas particuliers de sections symétriques.*

a) *Sections à un axe de symétrie* (fuselages-coques par exemple, fig. 5 *a*).

Le problème est *isostatique* pour un effort tranchant appliqué le long de l'axe de symétrie. Les flux doivent, en effet, être nuls en A et B par raison de symétrie, d'où l'allure représentée sur la figure 5 *a*. La coquille se comporte donc, dans ce sens de flexion, comme *deux éléments ouverts indépendants.*

Pour une flexion normale à l'axe de symétrie, on obtient une répartition de flux *antisymétrique* (fig. 5 *b*). Le problème est *hyperstatique*, mais il suffit d'étudier une *demi-section ;*

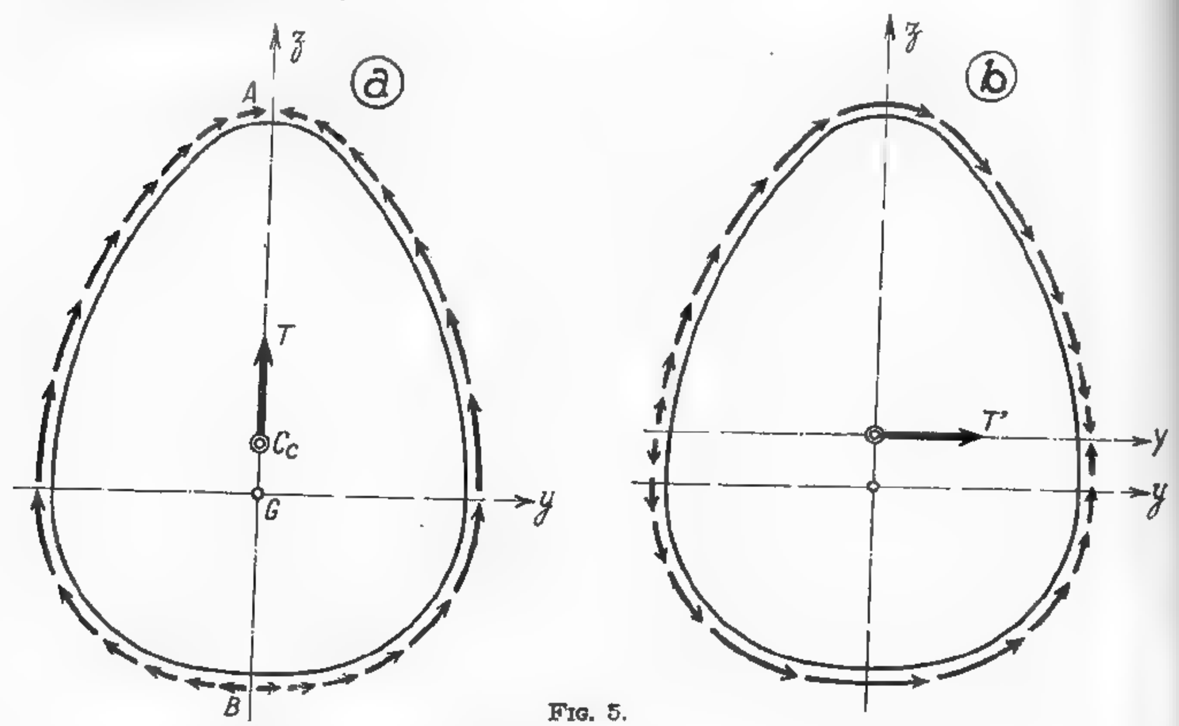


Fig. 5.

b) Sections à deux axes de symétrie.

Le problème est *isostatique* pour les deux flexions suivant chaque axe de symétrie. Il suffit d'étudier *un quart de section.*

2.34 Flux de cisaillement de flexion pure le long d'une coque fermée avec cloison intérieure.

2.341 *Données et notations.* — Considérons (fig. 6) la section droite d'une coque fermée de forme quelconque, possédant une *cloison intérieure* AEB constituant, elle-même, une *paroi de coque.*

Les notations indiquées au paragraphe **2.1** s'appliquent à cette section en ce qui concerne ses caractéristiques de résistance et les efforts qui lui sont appliqués.

Nous conviendrons cependant, pour préciser ces notations, d'affecter respectivement des indices 1, 2 ou 3 les éléments de longueur Δl, les épaisseurs e, et les éléments de surface ΔS appartenant respectivement aux parois ACB, ADB et AEB.

Nous poserons également les *notations simplificatrices* suivantes :

$$\alpha_1 = \sum_{(ACB)} \frac{\Delta l_1}{e_1} \;; \qquad \alpha_2 = \sum_{(ADB)} \frac{\Delta l_2}{e_2} \;; \qquad \alpha_3 = \sum_{(AEB)} \frac{\Delta l_3}{e_3}$$

$$\beta_1 = \sum_{(ACB)} W_1 \frac{\Delta l_1}{e_1} \;; \qquad \beta_2 = \sum_{(ADB)} W_2 \frac{\Delta l_2}{e_2} \;; \qquad \beta_3 = \sum_{(AEB)} W_3 \frac{\Delta l_3}{e_3}.$$

Dans ces dernières expressions, les termes W_1, W_2 et W_3 désignent les *moments statiques*, par rapport à Gy, des fractions de parois situées, respectivement, entre les points quelconques P_1, P_2 ou P_3 de ces parois et le point A, soit :

$$W_1 = \sum_A^{P_1} z_1 \Delta S_1 \;; \qquad W_2 = \sum_A^{P_2} z_2 \Delta S_2 \quad \text{et} \quad W_3 = \sum_A^{P_3} z_3 \Delta S_3.$$

Notons que les termes β_1, β_2 et β_3 constituent des intégrations doubles se déterminant pratiquement dans un tableau en envisageant des intervalles partiels et en effectuant les sommes correspondantes.

2.342 *Méthode de calcul.* — Supposons la coque coupée par deux sections longitudinales S_1 et S_2 situées au voisinage immédiat de la génératrice A (fig. 6). Ces sections interrompent respectivement les parois ACB et AEB.

Il reste donc une *coque de section ouverte* pour laquelle la détermination des flux de cisaillement est *isostatique.*

On obtient, en effet, avec les notations ci-dessus :

$$\text{en } P_1 : \tau'_1 = \frac{T}{I} W_1 \; ; \quad \text{en } P_2 : \tau'_2 = \frac{T}{I} W_2 \; ; \quad \text{en } P_3 : \tau'_3 = \frac{T}{I} W_3$$

ces flux étant, tous les trois, nuls au point A et étant comptés positivement dans le sens indiqué sur la figure 6.

Désignons par X et Y les flux, inconnus, agissant réellement à travers les sections de coupure S_1 et S_2 et convenons de diriger, arbitrairement, ces flux dans le sens AD pour X et dans le sens BA pour Y.

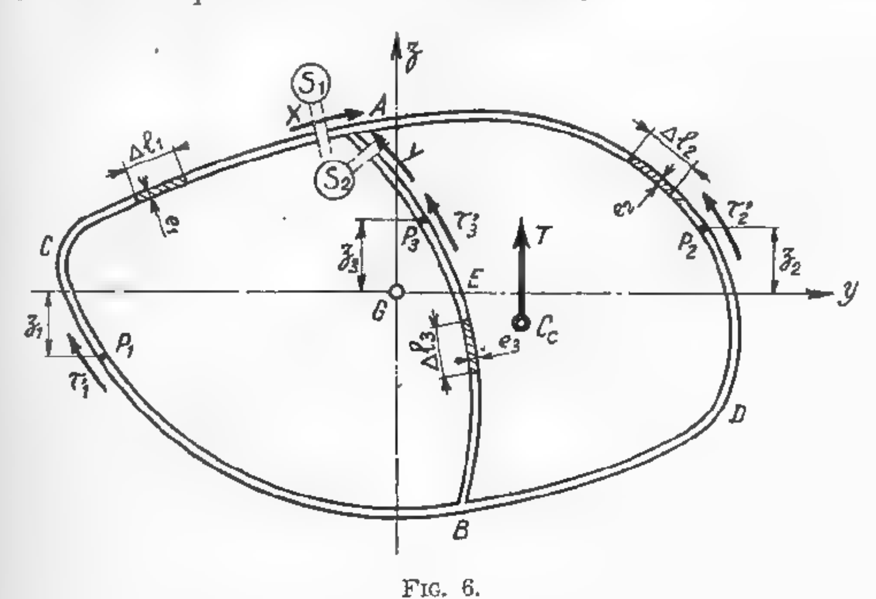


Fig. 6.

Les *flux réels* agissant respectivement aux points P_1, P_2 et P_3 ont pour expressions :

En P_1 (paroi ACB, appartenant au corps creux BCAD après suppression de S_1):

$$\tau_1 = \tau'_1 + X = \frac{T}{I} W_1 + X.$$

En P_3 (paroi AEB appartenant au corps creux BAD après suppression de S_2) :

$$\tau_3 = \tau'_3 + Y = \frac{T}{I} W_3 + Y.$$

En P_2 (paroi ADB, appartenant aux deux corps creux précédents) :

$$\tau_2 = \tau'_2 - X - Y = \frac{T}{I} W_2 - X - Y.$$

Le *potentiel élastique interne* de cisaillement d'un élément de coquille de dimension longitudinale égale à l'unité, a pour expression :

$$U = \frac{1}{2G}\left[\sum_{(ACB)} \tau_1^2 \frac{\Delta l_1}{e_1} + \sum_{(ADB)} \tau_2^2 \frac{\Delta l_2}{e_2} + \sum_{(AEB)} \tau_3^2 \frac{\Delta l_3}{e_3}\right].$$

D'après le théorème de Ménabréa, on doit avoir :

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial U}{\partial Y} = 0.$$

2.343 *Résultats.* — Les deux équations ci-dessus s'écrivent, après remplacement de τ_1, τ_2 et τ_3 par leurs valeurs et après simplifications, compte tenu des notations précédentes :

$$X(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_2 Y + \frac{T}{I}(\beta_1-\beta_2)=0.$$

$$\alpha_2 X + Y(\alpha_2+\alpha_3) + \frac{T}{I}(\beta_3-\beta_2)=0$$

On en tire les expressions suivantes des inconnues :

$$X = \frac{T}{I}\,\frac{\alpha_2(\beta_3-\beta_1)+\alpha_3(\beta_2-\beta_1)}{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_1\alpha_3}.$$

$$Y = \frac{T}{I}\,\frac{\alpha_1(\beta_2-\beta_3)-\alpha_2(\beta_3-\beta_1)}{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_1\alpha_3}.$$

En remplaçant X et Y par leurs valeurs dans les expressions de τ_1, τ_2 et τ_3 données ci-dessus, on peut déterminer, par points, le *flux de cisaillement de flexion pure* s'exerçant sur tout le contour de la section et sur la cloison intérieure.

2.344 *Remarque. Cas d'une cloison mince non raidie.* — Si la cloison intérieure AEB est réalisée par une paroi mince non raidie longitudinalement, cette cloison peut s'assimiler à une *âme mince* transmettant donc un flux constant :

$$\tau_3 = Y \qquad \text{(chap. XXI)}.$$

Le terme W_3 relatif à cette âme mince est nul d'où $\beta_3=0$ et les expressions des inconnues se simplifient en :

$$X = \frac{T}{I}\,\frac{\alpha_3(\beta_2-\beta_1)-\alpha_2\beta_1}{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_1\alpha_3}.$$

$$Y = \frac{T}{I}\,\frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{\alpha_2(\alpha_1+\alpha_3)+\alpha_1\alpha_3} = \tau_3.$$

2.345 *Généralisation.* — La théorie précédente peut se généraliser à des coquilles présentant plusieurs cloisons intérieures. Le calcul matériel devient très rapidement complexe, à moins que ces cloisons soient assimilables à des âmes minces.

L'étude de la *torsion pure* des coquilles fermées avec cloisons sera effectuée ci-après au paragraphe **3.2**.

2.4 POSITION DES CENTRES DE CISAILLEMENT.

2.40 Rappel de propriétés. — La définition du *centre de cisaillement* C_c des sections droites des poutres minces fléchies a été donnée au chapitre **XI** (§ 3.2). Rappelons que ce centre constitue le *point d'intersection de toutes les résultantes des flux de cisaillement de flexion pure* appliqués à la section considérée. *Ces flux possèdent donc un moment nul par rapport au centre de cisaillement* C_c.

Nous avons également appris, au chapitre XI, à déterminer la position de C_c dans quelques cas particuliers de *profilés ouverts* (Voir planche 20).

Nous donnons, ci-après, des méthodes plus générales applicables aux sections de formes quelconques, ouvertes ou fermées.

Nous envisagerons toujours une *flexion autour de l'axe principal d'inertie* Gy (notation ci-dessus, § **2.1**), ce qui nous permettra de définir la position de l'*axe de cisaillement* $C_c Z$ parallèle à Gz et situé à une distance d de cet axe. On déterminerait de même la distance d' séparant l'axe $C_c Y$ de Gy, ce qui situe le centre de cisaillement C_c.

Rappelons les *propriétés principales des centres de cisaillement :*

a) Si une section possède un *axe de symétrie*, C_c est situé sur cet axe. Il se trouve au point de rencontre des axes de symétrie des sections bi-symétriques.

b) Tout effort tranchant passant par C_c engendre un état de *flexion pure* d'une poutre prismatique. S'il est, au surplus, parallèle à un axe principal d'inertie, il engendre un état de *flexion plane* (chap. XI, § **6.**).

c) Dans une poutre prismatique, le centre de cisaillement d'une section droite est également centre de flexion et de torsion et donc le « *centre élastique* » de cette section. La droite joignant les centres élastiques des diverses sections droites, définit « l'*axe élastique* » de la poutre. Les moments de torsion pure doivent être évalués autour de cet axe.

2.41 Centres de cisaillement des sections ouvertes. — Considérons la section droite ouverte de forme quelconque représentée figure 7 *a*, soumise à un flux de flexion pure engendrée par un effort tranchant T parallèle à Gz.

Un élément Δl du contour reçoit une *force tangentielle :*

$$f = \tau \, \Delta l.$$

En formant le *dynamique* des forces f, relatives à l'ensemble du contour (fig. 7 *b*), on retrouve bien la force T comme *résultante de cisaillement*. La position de cette résultante coïncide avec *l'axe de cisaillement*, $C_c Z$ cherché, par définition.

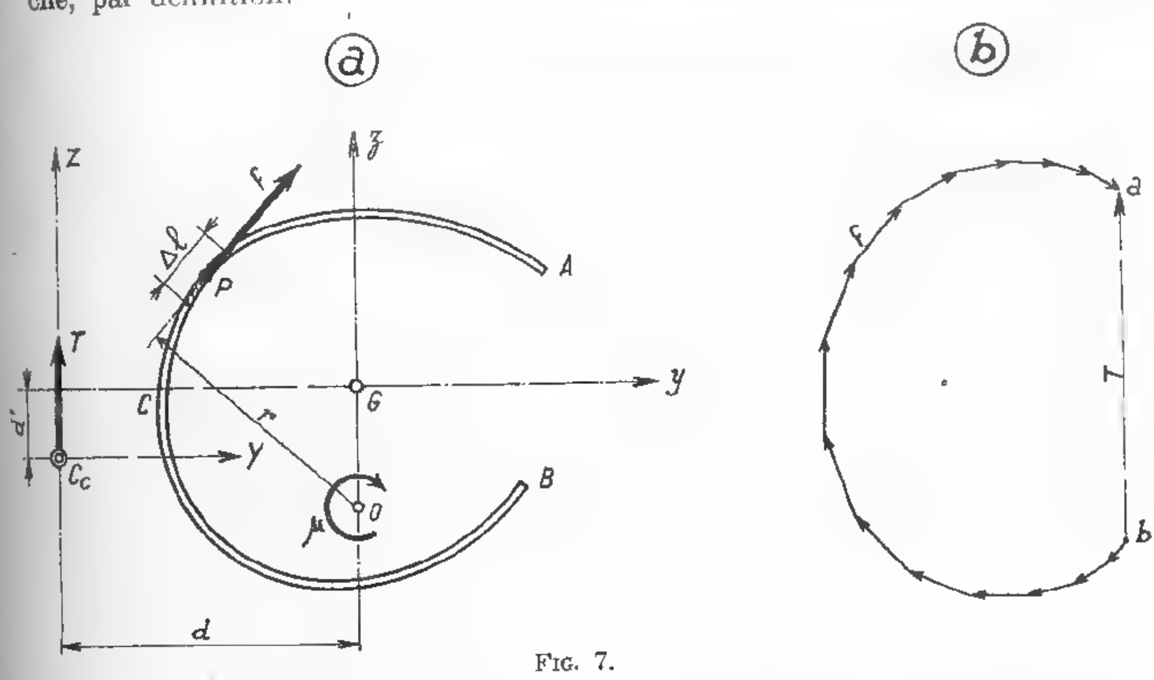


Fig. 7.

La force élémentaire f engendre, par rapport à un point O quelconque de Gz un moment :

$$\Delta\mu = fr. \qquad \text{(fig. 7 } a\text{)}.$$

Le flux total, c'est-à-dire la *résultante* T, donne donc un moment :

$$\mu=\Sigma\Delta\mu=\Sigma\tau r\Delta l$$

(le signe Σ s'étendant tout le long du contour, de A à B).

Or, $\mu = \mathrm{T}d$, d'où la distance d cherchée :

$$d=\frac{\mu}{\mathrm{T}}=\frac{\Sigma\,\tau\,r\,\Delta l}{\mathrm{T}}.$$

En remplaçant τ par sa valeur : $\tau = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{I}}\mathrm{W}$ (§ **2.321**), on obtient finalement

$$\boxed{d=\frac{\Sigma\,\mathrm{W}\,r\,\Delta l}{\mathrm{I}}.}$$

Remarques. — *a*) Les sens respectifs de μ et de T montrent que d est compté positivement *à gauche* de Gz, c'est-à-dire *du côté opposé aux bords libres* A et B. Nous avions déjà remarqué cette propriété, lors de l'étude de la flexion d'un profilé en U (chap. XI, § **3.2**). Le centre de cisaillement est ainsi rejeté à *l'extérieur* du contour de la plupart des sections ouvertes, à moins que celles-ci possèdent des sections importantes vers A et B (voir planche 20 le cas des profilés Ω, par exemple).

b) L'expression de d figure une *intégrale double*, par suite de la présence de W (§ **2.331**). Nous verrons au paragraphe **7.2** ci-après la *disposition pratique des calculs* permettant la détermination rapide de d en un seul tableau.

2.42 **Centres de cisaillement des sections fermées.** – Soit la *section fermée de forme quelconque* représentée figure 8, soumise à un *flux de cisaillement de flexion pure* dû à un effort tranchant T (parallèle à Gz).

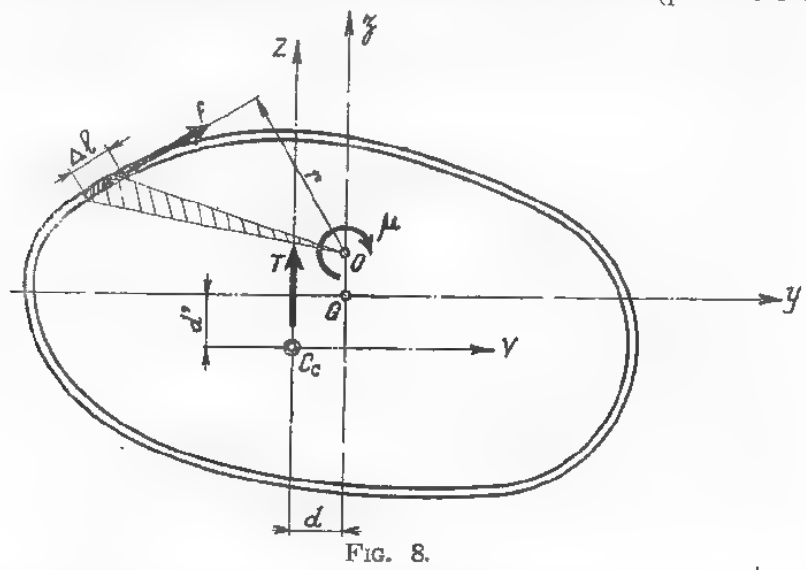


Fig. 8.

Les forces tangentielles $f=\tau\ \Delta l$ intéressant tous les éléments Δl du contour admettent une résultante égale à T. Elles engendrent, par rapport à un point O quelconque de Gz, un moment :

$$\mu=\Sigma\ fr=\Sigma\ \tau\ r\ \Delta l$$

(sommes le long du contour de la section).

Or,

$$\tau=\mathrm{X}+\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{I}}\mathrm{W} \qquad (\S\ 2.331)$$

d'où

$$\mu = \sum \left(X + \frac{T}{I} W\right) r \Delta l = X \sum r \Delta l + \frac{T}{I} \sum W r \Delta l.$$

Or, $r\Delta l$ représente le double de l'aire du triangle hachuré figure 8, d'où:

$$\Sigma r \Delta l = 2 \Omega$$

avec Ω = aire délimitée par le contour résistant de la coquille.

On a donc

$$\mu = 2\Omega X + \frac{T}{I} \Sigma W r \Delta l$$

La distance d cherchée est telle que $Td = \mu$, soit

$$\boxed{d = \frac{2\Omega}{T} X + \frac{\Sigma W r \Delta l}{I}.}$$

Remarques. — *a*) En remplaçant le flux initial X par sa valeur déduite du paragraphe 2.331, on voit que T s'élimine de l'expression de d qui constitue donc bien une *caractéristique géométrique* de la section.

b) La connaissance du centre de cisaillement des sections fermées est moins utile que pour les sections ouvertes. Nous verrons, en effet, ci-après (§ 4.2), que l'on peut se dispenser de le situer pour déterminer les flux de cisaillement équilibrant un effort tranchant quelconque.

c) La méthode ci-dessus se généralise aux *sections fermées possédant une ou plusieurs cloisons intérieures.*

2.5 CONTRAINTES DE CISAILLEMENT.

Connaissant le flux τ en un point quelconque, la *contrainte de cisaillement du revêtement* d'épaisseur e en ce point est donnée par la relation générale :

$$t = \frac{\tau}{e}.$$

Notons que, dans une *coque pratique* (avec raidisseurs), seul le *revêtement* supporte cette contrainte. Les raidisseurs ne sont soumis qu'aux contraintes normales n précédemment définies.

Ce sont ces contraintes t qui sont à comparer avec les « *contraintes critiques* » t_o donnant lieu à l'apparition d'une instabilité au cisaillement (ou cisaillement + compression).

3. THEORIE DE LA TORSION PURE DES POUTRES-COQUES

3.0 REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

Comme toute poutre prismatique, une coque ne peut travailler en *torsion pure* (c'est-à-dire sans que ce travail donne lieu à des contraintes normales) que si ses sections droites sont libres de se gauchir.

Ce phénomène de gauchissement des sections droites présente une telle importance pour les coquilles de *sections ouvertes*, que celles-ci ne peuvent, en pratique travailler en torsion pure [1] dans les structures usuelles. Par suite de leur grande déformabilité en torsion, elles ne sont, en effet, utilisées que sur une fraction de la longueur de ces structures (ouvertures dans un fuselage coque, par exemple) et la *continuité* des éléments longitudinaux s'oppose à un libre gauchissement des sections ouvertes relativement aux sections fermées de la même structure.

Par contre, le gauchissement des *sections fermées* est généralement très faible

1. — L'étude théorique de cette torsion pure, ou torsion gauche libre, a été effectuée au chapitre XIII, § 5.

et l'on peut admettre que les coques fermées travaillent en torsion pure (tout au moins hors de la proximité immédiate d'encastrements rigoureux).

Nous n'étudierons donc ci-après que la torsion pure des coques fermées.

3.1 TORSION PURE D'UNE COQUE FERMÉE SIMPLE.

Nous désignons ainsi une coque, théorique ou pratique, formant *un seul corps creux* (sans cloison intérieure).

Le *flux de cisaillement de torsion pure* est donné par la formule classique de BREDT (chap. XIII, § **4.1**) :

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega}$$

(avec Ω = aire limitée par le contour de la section) et la *contrainte de cisaillement du revêtement*, par :

$$t = \frac{\tau}{e} = \frac{M_t}{2\Omega e}.$$

Rappelons que la *constante de rigidité en torsion* est donnée par :

$$J = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{\Delta l}{e}} \qquad \text{(chap. XIII, § 4.21).}$$

3.2 TORSION PURE D'UNE COQUE FERMÉE AVEC CLOISON INTÉRIEURE.

3.21 Données. — Considérons la *section droite* représentée figure 9 *a* qui est soumise à un couple pur de torsion M_t.

Désignons par :

Ω_1 et Ω_2 les surfaces respectives des deux corps creux ABC et ABD délimités par le contour extérieur et la cloison AEB ;

Δl_1, Δl_2, Δl_3 les éléments de longueur des parois ACB, ADB et AEB ;

e_1, e_2, e_3, les épaisseurs respectives de ces éléments de parois.

Nous poserons également *les notations simplificatrices* :

$$\alpha_1 = \sum_{ACB} \frac{\Delta l_1}{e_1} ; \qquad \alpha_2 = \sum_{ADB} \frac{\Delta l_2}{e_2} ; \qquad \alpha_3 = \sum_{AEB} \frac{\Delta l_3}{e_3} .$$

3.22 Méthode de calcul. — Supposons la coque séparée en deux corps creux simples, selon figure 9 *b*. Le moment M_t se partage en M_{t1} et M_{t2}, tels que :

$$M_{t1} + M_{t2} = M_t.$$

Ces moments engendrent des flux de cisaillement :

$$\tau_1 = \frac{M_{t1}}{2\Omega_1} \qquad \text{et} \qquad \tau_2 = \frac{M_{t2}}{2\Omega_2}$$

Posons :

$$\tau_2 = K \ \tau_1.$$

La cloison AEB est soumise à un flux résultant

$$\tau_3 = \tau_1 - \tau_2 = \tau_1 \ (1 - K)$$

(en adoptant pour sens positif des flux celui donnant un moment du même sens que M_t par rapport au point C).

Ecrivons que la participation de la cloison centrale dans chaque corps

creux est proportionnelle aux flux respectifs (contraintes égales) ; on définit ainsi les épaisseurs fictives e'_3 et e''_3 (fig. 9 *b*), telles que :

$$e'_3 = e_3 \frac{\tau_1}{\tau_3} = \frac{e_3}{1-K} \quad \text{et} \quad e''_3 = -e_3 \frac{\tau_2}{\tau_3} = e_3 \frac{K}{K-1}.$$

La détermination de K est un problème hyperstatique.

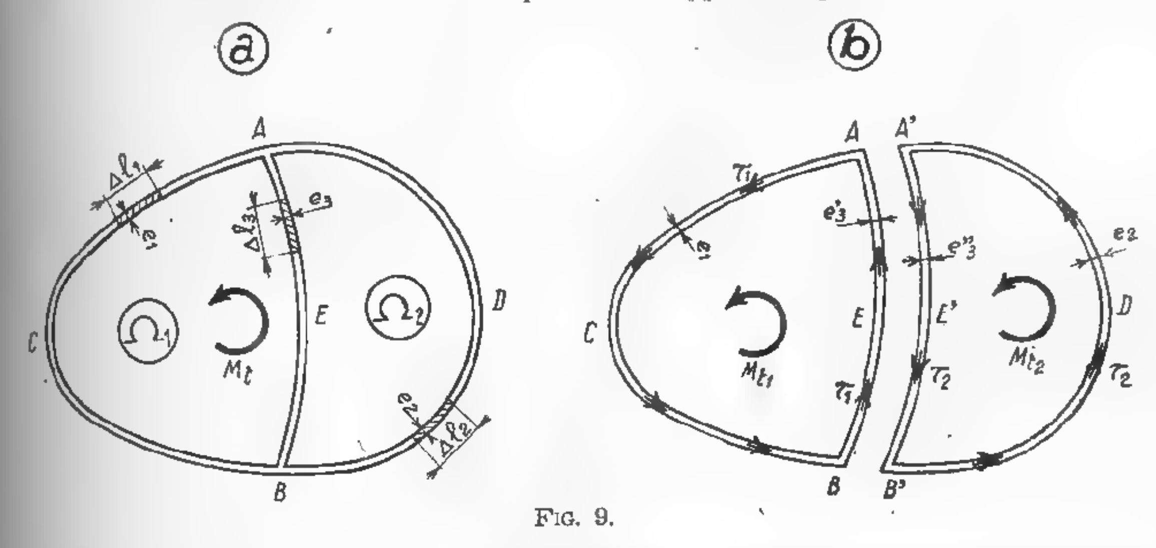


Fig. 9.

Pour le résoudre, nous écrirons que les *angles de torsion des deux corps creux doivent être égaux*. Ils tournent, en effet, du même angle, autour de l'axe de torsion de l'ensemble.

3.23 Calcul de K. — Les constantes de rigidité en torsion des deux corps creux sont, respectivement :

$$J_1 = \frac{4\Omega_1^2}{\sum_{ACB} \frac{\Delta l_1}{e_1} + \sum_{AEB} \frac{\Delta l_3}{e'_3}} = \frac{4\Omega_1^2}{\alpha_1 + \alpha_3 \ (1-K)},$$

$$J_2 = \frac{4\Omega_2^2}{\sum_{(A D B')} \frac{\Delta l_2}{e_2} + \sum_{(A E'B')} \frac{\Delta l_3}{e''_3}} = \frac{4\Omega_2^2}{\alpha_2 + \alpha_3 \frac{K-1}{K}}.$$

La condition énoncée ci-dessus s'écrit (égalité des angles de torsion, par unité de longueur) :

$$\frac{M_{t_1}}{GJ_1} = \frac{M_{t_2}}{GJ_2} \quad \text{soit} \quad \frac{2\,\Omega_1\,\tau_1}{J_1} = \frac{2\,K\,\Omega_2\,\tau_1}{J_2}$$

ce qui donne, en simplifiant et en remplaçant J_1 et J_2 par leurs valeurs :

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_3\ (1-K)}{\Omega_1} = K \frac{\alpha_2 + \alpha_3 \frac{K-1}{K}}{\Omega_2}$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{K = \frac{\frac{\Omega_2}{\Omega_1}(\alpha_1 + \alpha_3) + \alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\alpha_3}.}$$

3.24 Expressions des flux et contraintes de cisaillement. — Des expressions de τ_1 et τ_2 ci-dessus, on tire :

$$M_{t_1} + M_{t_2} = 2\,\tau_1\,\Omega_1 + 2\,\tau_2\,\Omega_2 = 2\,\tau_1\,(\Omega_1 + K\,\Omega_2) = M_t$$

d'où :

— paroi ACB :

$$\tau_1 = \frac{M_t}{2\,(\Omega_1 + K\,\Omega_2)} \qquad \text{et} \qquad t_1 = \frac{\tau_1}{e_1} ;$$

— paroi ADB :

$$\tau_2 = K\ \tau_1 = K\ \frac{M_t}{2\ (\Omega_1 + K\Omega_2)} \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{\tau_2}{e_2} ;$$

— cloison AEB :

$$\tau_3 = \tau_2 - \tau_1 = \frac{M_t\ (1-K)}{2\ (\Omega_1 + K\,\Omega_2)} \qquad \text{et} \qquad t_3 = \frac{\tau_3}{e_3} .$$

3.25 **Remarques.** — Nous avons déjà indiqué ces résultats au chapitre XXI (§ 2.34) et nous les avons utilisés dans l'application numérique de la *planche 44*.

Ces formules supposent que, dans le cas d'une coque pratique, les raidisseurs ont une rigidité propre nulle en torsion (hypothèse toujours admissible, en pratique).

Elles supposent également que les différentes parois atteignent sensiblement en même temps leurs limites de stabilité (élimination de G dans les formules).

Cette méthode peut se généraliser au cas de plusieurs cloisons intermédiaires.

3.3 DÉTERMINATION GRAPHIQUE DU CENTRE DE TORSION D'UNE COQUE FERMÉE SIMPLE.

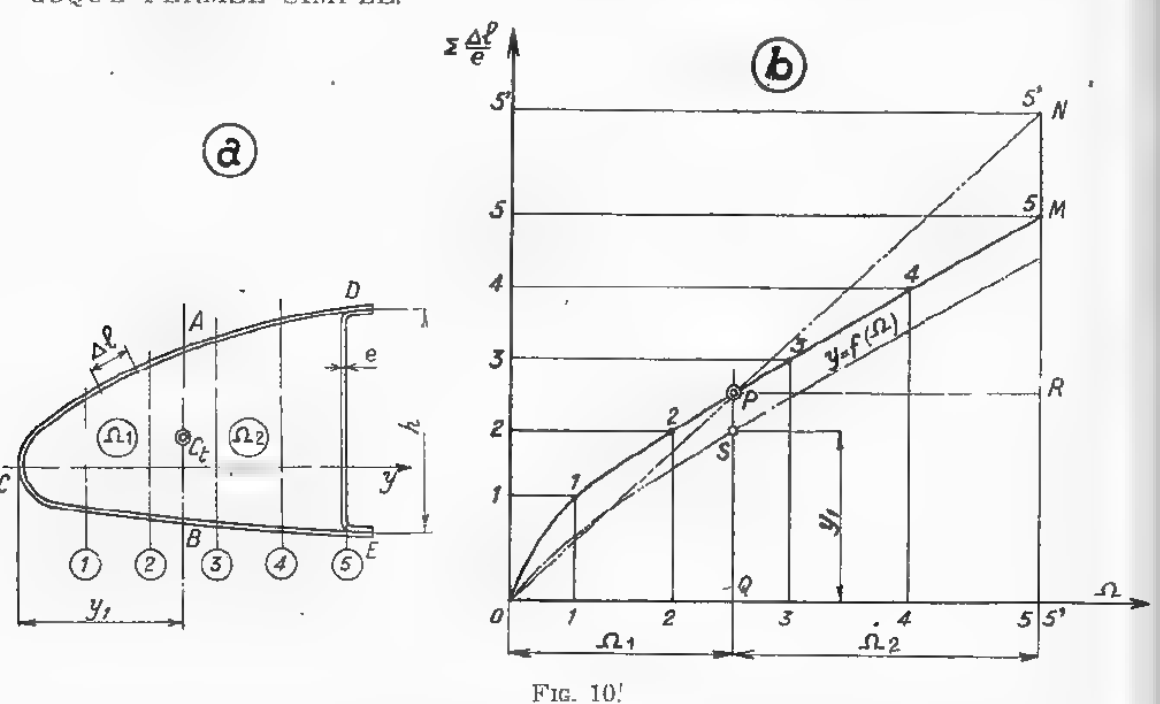


FIG. 10.

3.31 **Principe de la méthode.** — Considérons la section droite d'une coque fermée simple (sans cloison) représentée figure 10 *a*.

Imaginons une *cloison verticale fictive* se déplaçant de la gauche vers la droite de cette section. Quand cette cloison passera par le centre de torsion C_t cherché (position AB sur la figure), elle ne subira aucun flux de cisaillement.

Avec les notations du paragraphe précédent, on doit donc avoir à ce moment-là :

$$\tau_3 = \tau_1 - \tau_2 = 0 \qquad \text{soit :} \qquad \tau_2 = \tau_1$$

d'où

$$K = 1.$$

En remarquant que le coefficient α_3 relatif à la cloison est nul (cloison fictive), l'expression de K établie au paragraphe 3.23 donne, en l'égalant à 1 :

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

Les aires Ω_1 *et* Ω_2 *délimitées par AB doivent donc être dans le même rapport que les coefficients* $\sum \frac{\Delta l}{e}$ *relatifs aux parois situées de part et d'autre de cette cloison fictive.*

3.32 **Construction graphique.** — Cette propriété permet une détermination graphique aisée de AB :

Divisons la section par une succession de verticales 1, 2... 5 (fig. 10 *a*). Portons sur un diagramme (fig. 10 *b*) en abscisses les aires situées à gauche de ces verticales, et en ordonnées les coefficients $\Sigma \Delta l/e$ relatifs aux parois de la coquille situées également à gauche de ces verticales.

On obtient la courbe OPMN représentée figure 10 *b* [1]. Joignons par une droite les points extrêmes O et N de cette courbe. Le point d'intersection P délimite les aires $\Omega_1 = OQ$ et $\Omega_2 = QR$ situées de part et d'autre de AB.

Les triangles semblables OPQ et PNR donnent, en effet :

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} = \frac{\sum_{ADEB} \frac{\Delta l}{e}}{\sum_{ACB} \frac{\Delta l}{e}} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Pour obtenir, avec une bonne précision, la droite AB sur la figure 10 *a* il suffit de tracer figure 10 *b* la courbe :

$$y = f(\Omega)$$

(y étant l'abscisse d'une des verticales par rapport au point C).

On obtient ainsi l'abscisse $y_1 = QS$ de la droite AB passant par C d'où un « *lieu vertical* » de ce point.

En répétant l'opération horizontalement, on détermine un « *lieu horizontal* » d'où le *centre de torsion* C_t à l'intersection de ces deux lieux.

3.33 **Remarques.** — Le centre de torsion, ainsi déterminé, ne coïncide généralement pas exactement avec le centre de cisaillement de la même section, déterminé selon le paragraphe 3.42. Ce résultat est contraire à la théorie qui démontre que C_c et C_t sont confondus.

En pratique, on réservera la construction simple ci-dessus pour les applications ne nécessitant que la connaissance de l'axe de torsion d'une structure (calculs aux vibrations, par exemple). Pour les calculs de résistance des matériaux qui nécessitent un *équilibre* entre les forces appliquées et les tensions, il est indispensable d'utiliser la méthode du centre de cisaillement, ou plus simplement la méthode pratique exposée au paragraphe 4.2 ci-après.

4. THÉORIE DE LA FLEXION AVEC TORSION DES POUTRES-COQUES

Nous exposons, ci-après, deux problèmes distincts applicables respectivement aux coques de sections ouvertes et fermées. Ces deux problèmes mettent en jeu des sollicitations simultanées en flexion et en torsion.

---

1. — Au niveau de la verticale 5 qui coïncide avec la paroi plane de fermeture, le coefficient $\sum \frac{\Delta l}{e}$ subit un accroissement brusque (égal à h/e) tandis que l'aire Ω reste constante, ce qui explique le dernier tronçon 5-5′ de la courbe.

4.1 TORSION-FLEXION D'UNE COQUE CYLINDRIQUE DE SECTION OUVERTE.

4.10 **Rappel de propriétés.** — Nous avons vu, au chapitre XIII (§ 5.4), que les poutres de sections minces ouvertes présentaient une très faible résistance en *torsion pure* (ou *torsion gauche libre*). Leur paramètre de rigidité J est, en effet, égal à celui de la bande plane qui les constitue, soit :

$$J = \sum \frac{e^3}{3} \Delta l.$$

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus au paragraphe 3.0, on n'utilise guère, en pratique, les coquilles ouvertes que sur une fraction de la longueur des structures, cette utilisation étant généralement imposée par des servitudes d'aménagement. Le *gauchissement* des sections droites ne pouvant alors s'opérer *librement*, les coquilles ouvertes transmettent la torsion par un *phénomène complexe* mettant en jeu des *contraintes normales* et *tangentielles*. Nous avions déjà abordé l'étude de ce phénomène (torsion gauche non libre) au chapitre XIII (§ 6.3) dans le cas particulier d'un profilé ouvert possédant une extrémité encastrée. Nous avions vu que la rigidité en torsion de ce profilé pouvait être considérablement augmentée, par rapport à celle de torsion pure, si ce profilé était de faible longueur (phénomène analogue à la *flexion différentielle*).

4.11 Bases de la théorie. Données. — La théorie, dont nous n'exposons ci-dessous que les *résultats*, est connue sous le nom de « *torsion-flexion des coques ouvertes* » [1]. Elle concerne des *coquilles cylindriques* (génératrices parallèles) et elle n'est pratiquement applicable qu'aux *sections symétriques*.

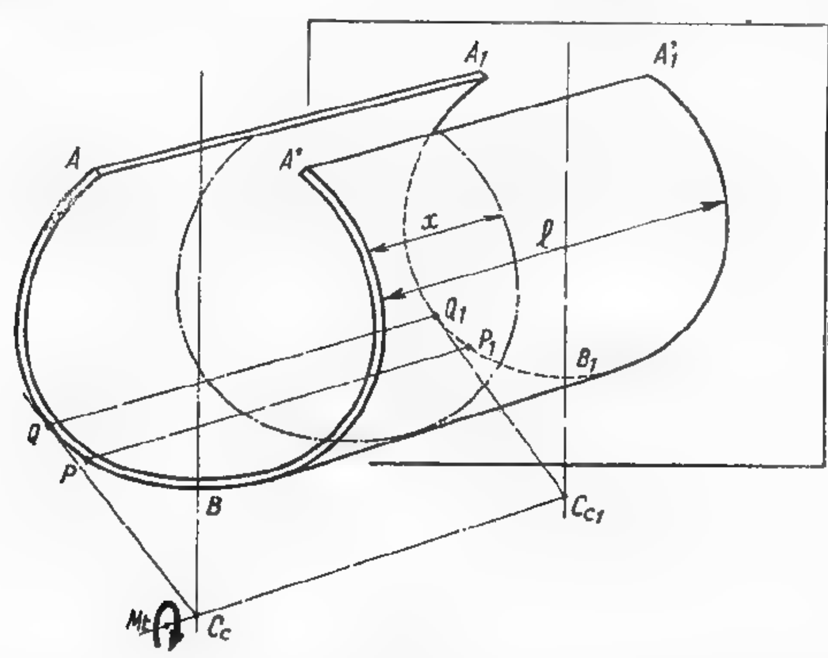


Fig. 11.

Considérons la coque cylindrique et symétrique représentée figure 11, dont une extrémité ABA' est *libre* et l'autre extrémité $A_1B_1A'_1$ est *parfaitement encastrée*. Cette coque est soumise à un *moment de torsion constant* M_t. Ce moment est dû, soit à un *couple pur* (à vecteur parallèle aux génératrices) appliqué à l'extrémité libre, soit au *transport* d'un effort tranchant (dans le plan de l'extrémité libre) de son point d'application, au centre de cisaillement C_c de cette section.

Nous désignerons par x l'abscisse d'une section intermédiaire quelconque, comptée à partir de l'extrémité libre.

1. — *Référence* : Wagner et Pretschner (Luftfahrtforschung, vol. 11, nº 6, du 5-12-1934). Traduction française : *Cahier aérotechnique*, nº 15.

La transmission de M_t engendre, dans chaque section droite, un *flux de cisaillement* τ faisant équilibre à ce moment, et des *contraintes normales* n dues à la *perturbation* créée par l'encastrement rigide. Il est évident que ces tensions n doivent, dans leur ensemble, former un *système nul* (équilibre) et que le flux τ doit être *d'intensité variable* (mise en charge longitudinale produisant les contraintes n).

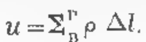
Par raison de *symétrie*, les contraintes normales n doivent être nulles sur la génératrice médiane BB_1 [1]. Le flux τ doit également être nul sur les bords libres AA_1 et $A'A'_1$.

4.12 **Constante de torsion-flexion.** — Selon le même système de notations que celui défini dans le tableau du paragraphe **2.1**, envisageons un élément Δl du contour d'une section droite (fig. 12 *a*) et soit ΔS la surface de cet élément. Soit ρ la distance de cet élément au centre de cisaillement C_c de la section.

Désignons par Δu le produit partiel :

$$\Delta u = \rho\, \Delta l$$

et par u la *somme* de ces produits partiels du point de contrainte normale nulle B jusqu'au point P auquel se rattache l'élément Δl considéré :



$$u = \Sigma_B^P \rho\, \Delta l.$$

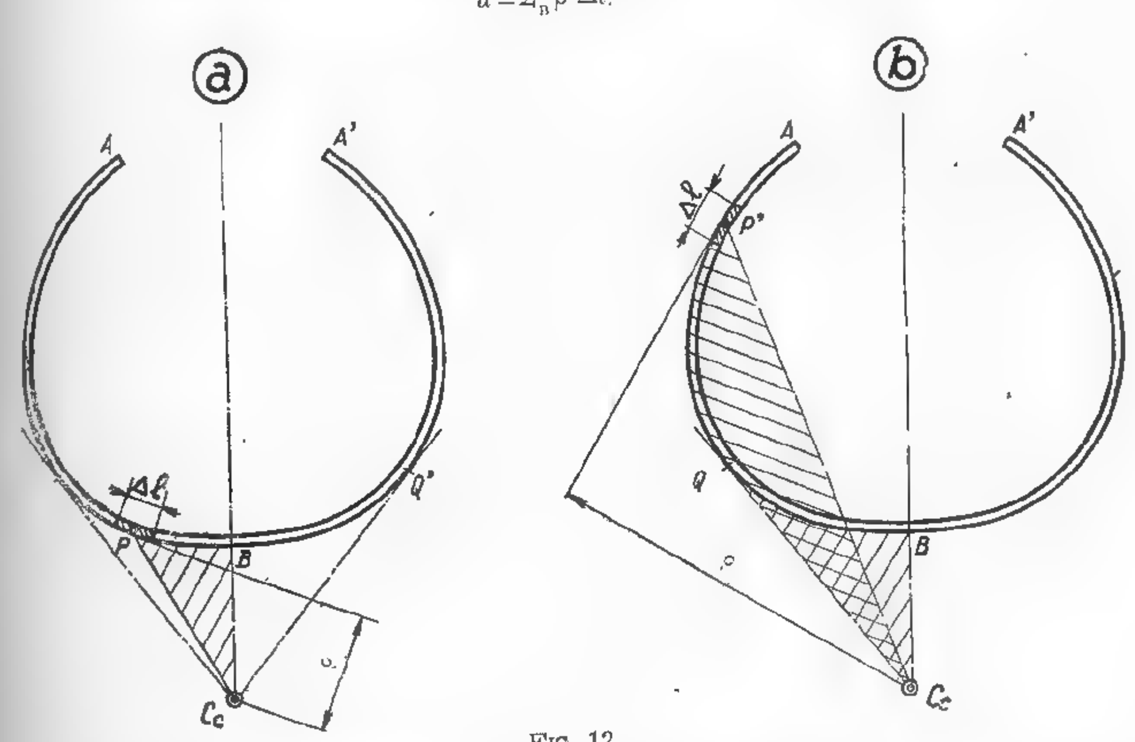


FIG. 12.

On voit que Δu représente le double de l'aire du triangle élémentaire ayant Δl pour base et C_c pour sommet, cette aire pouvant, néanmoins, être affectée d'un signe négatif quand la distance ρ change de sens (cas de l'élément Δl entourant le point P' de la figure 12 *b*).

Le terme u est donc représenté :

— Soit par le double de l'aire du triangle curviligne C_c BP, quand le point P est compris entre B et Q (point de contact de la tangente au contour issue de C_c), voir figure 12 *a* ;

1. — La théorie de la torsion-flexion peut s'appliquer à des sections non symétriques, à condition de connaître le point de contrainte nulle de ces sections.

— Soit par la différence des aires :

$$u = C_a \ BQ - C_c\, QP'$$

si P′ est situé au delà de Q (fig. 12 *b*).

On désigne par « *constante de torsion-flexion* » de la section droite considérée le terme C défini par l'expression :

$$\boxed{C = \sum_{(ABA')} u^2 \Delta S.}$$

On voit que ce terme, qui constitue un *paramètre géométrique* de la section, est de dimension L^6 (sixième puissance de longueur). Il joue, dans la torsion-flexion un rôle comparable aux moments d'inertie en flexion ou torsion simples.

4.13 Flux et contraintes de cisaillement de torsion-flexion. — *L'accroissement d'intensité du flux de cisaillement* de part et d'autre d'un élément ΔS entourant un point P considéré est donné par :

$$\Delta\tau = \frac{M_t}{C} u \Delta S.$$

L'*intensité du flux* en P est donc donnée par la somme de ces accroissements, d'une extrémité libre à ce point, soit :

$$\boxed{\tau = \frac{M_t}{C} \sum_{A}^{P} u \Delta S.}$$

On obtient sur les parties AB et A′B des flux *antisymétriques* dont la variation à l'allure schématisée sur la figure 13 *a* (deux points de flux nul D et D′).

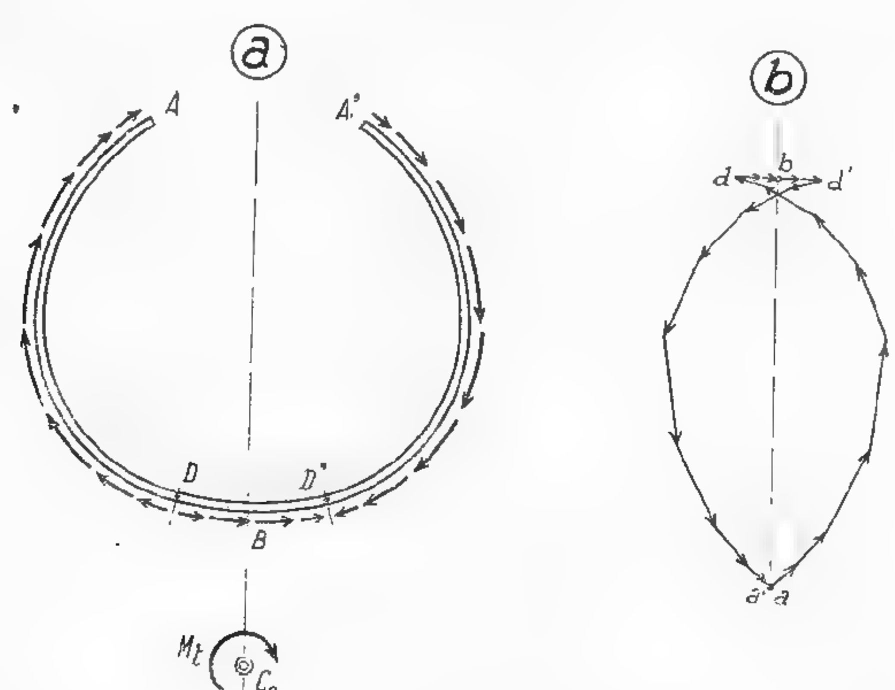


Fig. 13.

En formant le *dynamique des forces tangentielles : f=τΔl* (fig. 13 *b*), on constate que les *résultantes partielles ab* et *ba′* des flux agissant sur cha-

que demi-section AB et BA′ sont *verticales* et *opposées*. La résultante générale est donc *nulle* (couple pur) et l'on vérifie que la somme des moments des forces f, par rapport, à un point quelconque de la section est égale à M_t (voir application numérique § **7.2**).

La *contrainte de cisaillement du revêtement* d'épaisseur e au point considéré vaut :

$$t = \frac{\tau}{e}.$$

4.14 **Contraintes normales de torsion-flexion.** — Un élément longitudinal PP_1, (fig. 11) auquel se rapporte le paramètre u défini ci-dessus, subit, dans une section d'abscisse x (voir § **4.11**) une *contrainte normale :*

$$\boxed{n = \frac{M_t}{C}\,ux.}$$

Pour un même élément longitudinal (lisse d'une coque pratique), cette contrainte normale croît donc *linéairement* de la section libre ($x = 0$, $n = 0$) à la section encastrée ($x = l$) où l'on obtient :

$$n_{max} = \frac{M_t}{C}\,ul.$$

Ce phénomène est donc bien comparable à la *flexion différentielle* (chap. XIII, § **6.1**). Les éléments longitudinaux les plus fatigués sont situés, soit à l'aplomb de la génératrice QQ_1 (maximum positif de u), soit sur les bords libres AA_1 et $A'A'_1$ (maximum négatif de u), selon la forme de la section considérée.

Ces contraintes se superposent à celles dues aux moments fléchissants de flexion pure (dus au transport des efforts tranchants appliqués au niveau de l'axe élastique).

4.15 **Emplacement de la section libre.** — Les parties ouvertes appartenant aux structures réelles possèdent rarement une section libre (section extrême).

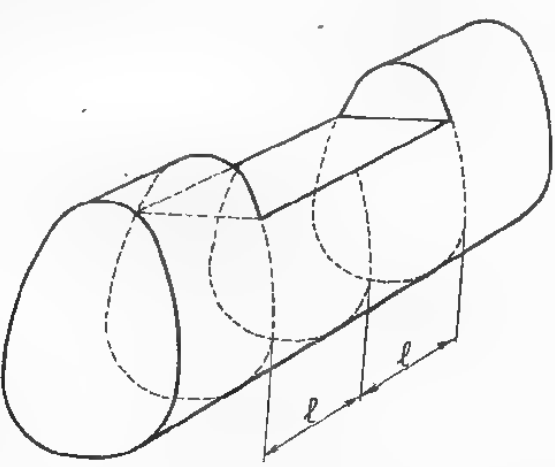


FIG. 14.

Dans le cas d'une *partie ouverte située entre deux parties fermées* (fig. **14**) on peut admettre que la « section libre » (origine des abscisses x) est située au milieu de la longueur $2l$ de la partie ouverte. Ceci revient à supposer les encastrements extrêmes de même rigidité (analogie avec une poutre bi-encastrée chargée de transmettre un effort tranchant constant, où le moment est nul au milieu de la portée).

D'une façon plus générale, la « *section libre* » est située à des distances inversement proportionnelles aux rigidités des encastrements extrêmes de la partie ouverte. Son emplacement doit se déterminer dans chaque cas particulier.

4.16 **Disposition pratique des calculs.** - Nous donnerons ci-après au paragraphe 7.2, au cours d une *application numérique* concernant le calcul d'une section ouverte de fuselage-coque, une disposition pratique des calculs ci-dessus en un seul tableau. Nous donnerons également une *vérification graphique* des résultats obtenus.

4.17 **Angle de rotation des sections en torsion-flexion.** — On démontre, au cours de la théorie de la torsion-flexion, que l'angle de rotation (relativement à l'encastrement fixe) d'une section d'abscisse x a pour expression :

$$\theta = \frac{M_t}{6\ EC} (x^3 - 3\ l^2\ x + 2\ l^3)$$

(angle en radians, rotation autour de C_c).

Dans cette expression :

E = module d'élasticité longitudinal ;

l = longueur libre de la coque (cylindrique).

On voit que la variation de θ n'est pas linéaire comme dans la torsion pure.

L'angle de rotation de l'extrémité libre ($x = 0$) est donc

$$\theta_0 = \frac{M_t}{EC} \frac{l^3}{3} .$$

Il est proportionnel au cube de la longueur de la poutre et non à cette longueur elle-même, comme en torsion pure. Ceci explique que la déformabilité en torsion-flexion d'une coque ouverte, devienne sensiblement égale à celle de la torsion pure quand la longueur de cette coque devient importante [1]. C'est cette déformabilité qui interdit, en fait, l'utilisation des structures entièrement ouvertes. Elle engendrerait, en effet, de graves risques de *vibrations critiques*.

4.2 FLEXION ET TORSION D'UNE COQUE FERMÉE.

4.20 **Remarque préliminaire.** — Ainsi que nous l'avons indiqué ci dessus au paragraphe 3 0, on peut généralement admettre que les coques de sections fermées transmettent un couple de torsion en « *torsion pure* », c'est-à-dire sans contraintes normales perturbatrices.

Dans cette hypothèse, il n'est pas nécessaire de discriminer les états de *flexion pure* et de *torsion pure* (contrairement aux coques ouvertes). Cette propriété apporte des simplifications considérables dans l'étude pratique des structures fermées, car elle dispense, notamment, de déterminer la position des centres de cisaillement de leurs sections droites.

Le problème revient à déterminer directement, pour ces sections, le *flux de cisaillement résultant* (flexion pure + torsion) *engendré par un effort tranchant appliqué en un point arbitraire.*

4.21 **Données.** — Considérons une section droite fermée d'une coque cylindrique de forme quelconque (fig. 15) et soit T un effort tranchant, parallèle à l'axe principal d'inertie Gz et appliqué en un *point arbitraire* O de la section (on étudierait de même la transmission d'un effort tranchant parallèle à Gy).

---

1. — Voir application numérique § 7.2 ci-après.

4.22 Contraintes normales. — Les contraintes normales n sont égales à celles de *flexion pure*, soit (§ **2.2**) :

$$n = \frac{M}{I} z$$

avec : M = moment fléchissant correspondant à T (vecteur parallèle à Gy) ;
I = moment d'inertie de la section autour de Gy ;
z = distance du point considéré à l'axe de flexion Gy.

4.23 Flux et contraintes de cisaillement.

4.231 *Flux arbitraire.* — Supposons le flux nul en un point A arbitraire du contour [1].

La distribution des contraintes normales étant identiques à celle de flexion pure, l'intensité du flux (arbitraire) en un point P du contour est donnée par (§ **2.331**) :

$$\tau' = \frac{T}{I} \sum_{A}^{P} z \,\Delta S = \frac{T}{I} W.$$

4.232 *Couple de torsion et flux correcteur.* — Au flux arbitraire τ' correspondent des *efforts tangentiels élémentaires*

$$f = \tau' \Delta l.$$

Le dynamique de ces efforts admet bien T pour résultante, mais ces efforts donnent par rapport au point de référence O un moment :

$$\mu = \Sigma\, f r = \Sigma\, \tau' r \Delta l \qquad \text{(fig. 15)}$$

(cette somme s'étendant sur tout le contour).

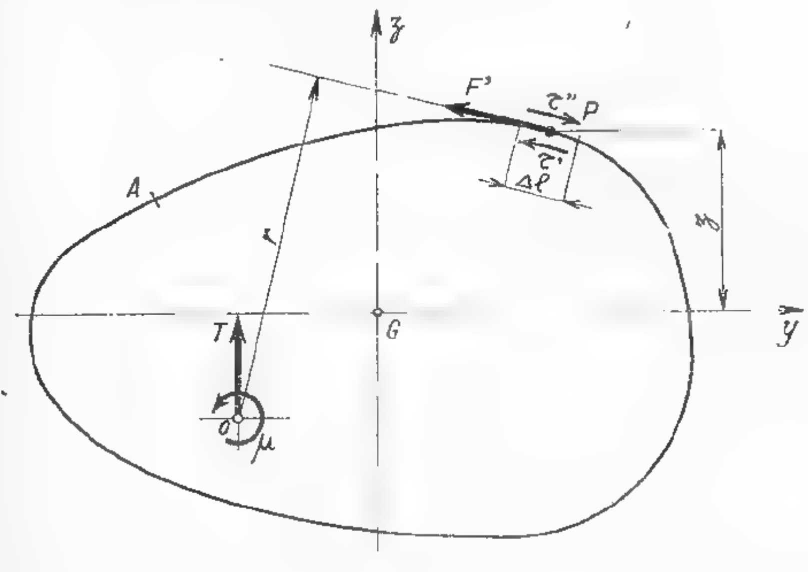


FIG. 15.

Ce moment est assimilable à un « *couple de torsion correcteur* » qui engendre sur le contour de la section un « *flux correcteur* » d'intensité constante

$$\tau'' = -\frac{\mu}{2\Omega}$$

1. — Dans le cas d'une section symétrique (chargée perpendiculairement à son axe de symétrie) on choisira le point A à l'aplomb de l'axe de symétrie, de façon à n'étudier qu'une demi-section.

(flux tournant en sens inverse de μ de façon à annuler ce moment) avec Ω = aire limitée par le contour de la section.

4.233 *Flux résultant.* — L'effort tranchant T, appliqué en O, donne donc lieu finalement à un *flux résultant*

$$\tau = \tau' + \tau''$$

Ce flux comprend, en réalité, une *superposition de flexion pure et de torsion pure* qu'il n'est pas nécessaire de discriminer.

4.234 *Contraintes de cisaillement.* — Elles sont données, en chaque point, par la relation générale :

$$t = \frac{\tau}{e}.$$

4.24 **Application.** — Nous trouverons ci-après au paragraphe 7.1 une application numérique concernant la détermination du flux de cisaillement appliqué à une section de fuselage-coque soumise à un effort tranchant normal à son axe de symétrie. Nous effectuerons également les vérifications graphiques correspondantes.

5. ÉTUDE DES CAISSONS DE VOILURE

5.1 CONFIGURATION GENERALE.

5.11 **Définition.** — Dans la construction des *éléments sustentateurs* (voilures ou empennages) les structures-coques sont utilisées sous forme de *caissons*. La forme des profils, ou des nécessités d'aménagement, rendent, en effet, généralement impossible la réalisation d'ossatures résistantes comprenant toute la profondeur de ces profils.

Un *caisson* constitue un « *corps creux longitudinal* », occupant une profondeur plus ou moins importante des profils, chargé de transmettre la *totalité des efforts généraux de flexion et de torsion* appliqués à l'élément de structure. Ses parois supérieure et inférieure sont composées par les surfaces de revêtement de l'aile, suffisamment épaisses ou suffisamment raidies pour supporter des charges longitudinales en supplément aux cisaillements. C'est ce dernier point qui différencie les caissons des structures à âmes minces étudiées au chapitre précédent.

L'*avantage* essentiel des structures-caissons réside dans une grande *rigidité en flexion et en torsion*. La première est due à un abaissement des taux de travail en compression (voir ci après) et la seconde à une stabilisation parfaite des parois cisaillées.

Il existe une très grande variété dans la réalisation des caissons. Nous proposons une classification de ces structures basée sur le nombre d'*âmes* (parois minces verticales) qui les composent, cette classification reposant essentiellement sur les procédés de calcul applicables aux différents groupes.

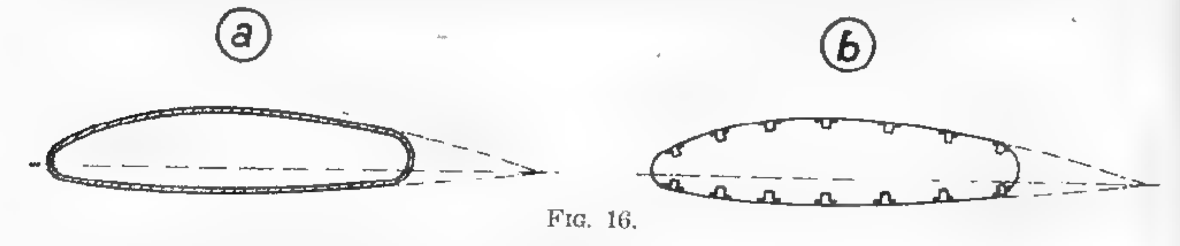


Fig. 16.

5.12 **Caissons sans âme** (fig. 16). — Ce procédé de construction consiste à réaliser un « *corps creux* » occupant une profondeur importante du profil allant, généralement, du bec d'attaque jusqu'aux articulations d'ailerons.

Ce corps creux se comporte comme une *coquille fermée simple* et ne présente pas de particularité de calcul, en ce qui concerne la distribution des flux de cisaillement.

Il peut être composé :

— Soit par des parois de revêtement suffisamment épaisses pour être *stables* sans le secours de raidisseurs (constructions dites « *monocoques* » en bois, alliages ultra-légers ou matières plastiques) (fig. 16 *a*). Ils constituent alors de pures « *coques théoriques* » ;

— Soit, plus fréquemment, par des revêtements raidis par des lisses longitudinales (fig. 16 *b*).

Ce procédé de construction n'est guère utilisé en pratique, que sur des appareils monomoteurs légers. Il présente, en effet, de sérieuses difficultés en ce qui concerne l'introduction des charges concentrées importantes et la stabilisation, à un taux de travail élevé, des parois de revêtement.

5.13 **Caissons à une âme** (fig. 17). — Ces caissons occupent généralement le *bord d'attaque* des profils. La fermeture arrière est assurée par une paroi plane qui (si elle n'est pas raidie longitudinalement) s'assimile à une « *âme mince* ». Cette âme ne participe donc en flexion que par « deux bandes équivalentes » (supérieure et inférieure) et elle est soumise à un flux de cisaillement constant.



FIG. 17.

Cette construction présente l'*avantage* de rendre libre, pour les aménagements, toute la partie arrière de l'aile qui est simplement encastrée, par ses nervures, sur le caisson avant.

Elle présente, par contre, *l'inconvénient* de posséder une « hauteur moyenne », entre les parois encaissant la flexion, plus faible que dans les solutions ci-après, d'où un poids plus élevé, à priori. Elle est, au surplus, soumise à des moments de torsion aérodynamiques plus importants.

L'âme peut, dans ces structures, être bordée par des raidisseurs importants constituant alors, avec celle-ci, un véritable *longeron* (fig. 17 *b*) qui transmet, à lui seul, une part notable des efforts de flexion [1].

5.14 **Caissons à deux âmes** (fig. 18). — C'est le procédé de construction le plus utilisé. On peut distinguer deux types principaux de ces caissons :

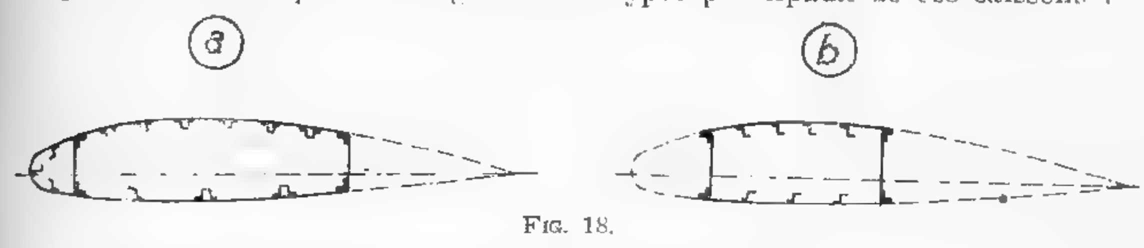


FIG. 18.

5.141 *Caissons formant deux corps creux* (fig. 18 *a*). — Dans cette solution, le bord d'attaque est raidi longitudinalement, en plus des parois comprises entre les âmes. L'ensemble forme une *coque avec cloison intérieure* justiciable des procédés de calcul exposés aux paragraphes **2.34** et **3.2**.

1. — Cette construction constitue une étape intermédiaire entre les caissons purs et les poutres à âmes minces monolongerons.

Les âmes qui ne possèdent, généralement, que des montants verticaux, peuvent encore être assimilées pour le calcul, à des « âmes minces » (flux constants).

5.142 *Caissons centraux* (fig. 18 *b*). — Dans cette solution, qui est la plus répandue, le caisson forme un *corps creux unique* dont la profondeur relative varie entre 20 et 40 % de celle des profils. Les parois de revêtement raidies, comprises entre les deux âmes, forment deux *semelles*, sensiblement planes. Cette solution présente l'avantage de situer l'élément résistant à *l'emplacement optimum* dans les profils, quand on prend soin de disposer les âmes symétriquement par rapport aux maîtres couples de ces profils. Le caisson bénéficie, en effet, en *flexion*, de la hauteur maximum entre semelles, et en *torsion* de la proximité du « foyer aérodynamique » avec l'axe élastique.

Le bord d'attaque et le bord de fuite sont simplement encastrés, par leurs nervures, sur le caisson central et ils ne possèdent aucune rigidité longitudinale.

C'est cette solution de caisson central à deux âmes que nous étudierons seule, en détail, ci-après.

5.15 **Caissons à âmes multiples** (fig. 19). — Le souci de ménager les parois de revêtement, en ce qui concerne les flux de cisaillement dus aux efforts tranchants, a conduit à réaliser des caissons comprenant plus de deux âmes verticales.

La rigidité générale en flexion peut, de ce fait, se trouver légèrement augmentée, mais ces structures présentent, par contre, de sérieuses difficultés, ou incertitudes, de calcul. Un *caisson à trois âmes*, du genre de celui de la figure 19 *a*, s'assimile à une *coque fermée avec une cloison intérieure*.

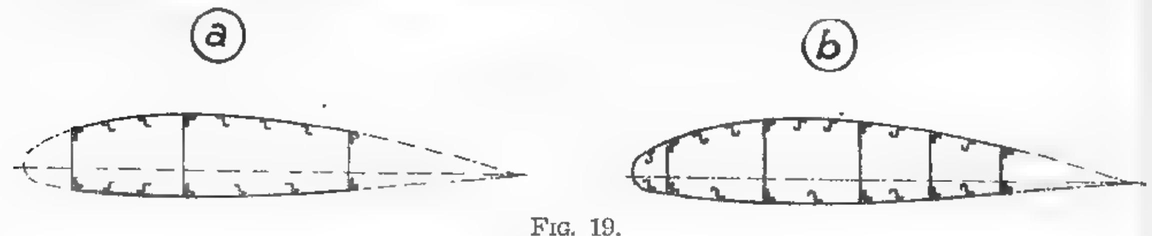


FIG. 19.

Un *caisson à 5 âmes*, du genre de celui de la figure 19 *b*, possède 4 *cloisons intérieures* et 5 *corps creux*. La solution générale de ce problème, traitée par les cisaillements, est fort complexe. C'est pourquoi l'on a généralement recours à la méthode de calcul approchée suivante :

En flexion, on assimile la structure à un système de *cinq longerons*. On partage, pour cela, arbitrairement, le revêtement en « zones influencées par chaque âme », ce qui permet d'évaluer l'inertie de chaque longeron. La répartition des efforts généraux normaux se fait proportionnellement aux inerties de chacun de ces longerons (méthode comparable à celles exposées au chapitre XXI, §§ **5.** et **6.**).

En *torsion*, on ne considère, généralement, que le corps creux d'ensemble, en négligeant les cloisons intermédiaires. Notons que M_t doit s'évaluer par rapport au « *foyer des inerties* » de l'ensemble des longerons.

En fait, ces caissons à âmes multiples ont souvent constitué des *solutions intermédiaires* entre les structures multilongerons et les coquilles proprement dites. C'est pourquoi il subsiste souvent, aux sommets de leurs âmes, des profilés beaucoup plus importants que les raidisseurs intermédiaires. Il semble que la présence de ces âmes nombreuses ait résulté d'une certaine crainte, d'ailleurs peu justifiée, de voir disparaître les parois planes orientées directement dans le sens des efforts prédominants (efforts normaux au plan de l'aile).

5.2 ETUDE DES ÉLÉMENTS RAIDISSEURS.

5.21 Généralités. — La grande majorité des caissons constituent des « *coques pratiques* », c'est-à-dire dont les parois extérieures (extrados et intrados des profils) sont stabilisées par des éléments longitudinaux de raidissage. Cette stabilisation est, en effet, pratiquement indispensable en *construction métallique*, pour obtenir une participation notable des tôles de revêtement à la transmission des efforts de compression résultant de la flexion générale (chap. XIX).

La stabilisation des revêtements peut s'effectuer, soit par intervalles, à l'aide de *raidisseurs longitudinaux* (ou *lisses*), soit d'une façon continue à l'aide de *tôles ondulées*.

Nous étudions succinctement ci-après l'un et l'autre de ces procédés. Notons que les *contraintes admissibles des parois comprimées* sont conditionnées par le *flambage général* de ces parois entre les nervures, ce flambage général dépendant lui-même du *taux de flambage local* des éléments raidisseurs (chap. XVI, § **4.2**). Il s'agit donc, à priori, d'utiliser des *raidisseurs présentant les meilleures caractéristiques possibles au flambage local.*

5.22 Stabilisation par raidisseurs isolés.

5.221 *Section des raidisseurs.* — Il n'existe pas de règle formelle fixant la section des raidisseurs à utiliser. On les dimensionne généralement, compte tenu des charges à transmettre, par homogénéité avec les tôles de revêtement ; c'est ainsi que, dans la plupart des constructions métalliques usuelles, la section s d'un raidisseur satisfait à la condition ;

$$0{,}5\ d\ e < s < d\ e$$

en désignant par e l'épaisseur de la tôle de revêtement et par d l'intervalle entre raidisseurs. (Le produit de mesure donc la section de tôle entre raidisseurs.)

5.222 *Intervalle entre raidisseurs.* — Cet intervalle d dépend essentiellement de l'épaisseur e des tôles à stabiliser :

Pour les *tôles minces* ($e \leqslant 2{,}5$ mm en AU4G), il n'est généralement pas possible de réussir à stabiliser entièrement ces tôles jusqu'aux contraintes de compression de calcul (contraintes extrêmes). Nous savons, en effet, que pour un taux de travail $n_{cr} = 28$ kg/mm² (qui correspond à la moyenne des contraintes admissibles pour les raidisseurs en AU4G comprimés), il serait nécessaire d'avoir :

$$d = 2\ c = 30\ e \qquad \text{(chap. XIX, § 2.462).}$$

Cette condition conduirait à un nombre de raidisseurs très élevé et l'on préfère perdre (fictivement) des bandes de tôle entre les largeurs équivalentes propres à chaque raidisseur comprimé.

Pour les *tôles épaisses* ($e \geqslant 3{,}2$ mm en AU4G), il est possible, par contre, de stabiliser entièrement ces tôles, ce qui conduit à un poids minimum (théorique) des semelles comprimées. Notons, à ce sujet, que l'épaisseur des tôles dépend essentiellement de la profondeur du caisson (section totale nécessaire). Il apparaît donc ainsi intéressant, à priori, d'utiliser des caissons peu profonds (du type caissons centraux à deux âmes, par exemple) de façon à dimensionner des tôles épaisses. On réalise fréquemment des caissons présentant des raidisseurs plus serrés sur les semelles supérieures (comprimées en vol normal) que sur les semelles inférieures (tendues en vol normal). Les efforts inversés existant en vol sur le dos sont, en effet, toujours inférieurs aux efforts de vol normal.

5.223 *Forme des raidisseurs.* — Nous donnons, figures 20 *a* à 20 *d*, quelques types de raidisseurs obtenus par *pliage*, ou *étirage*, de *tôles*. Afin de contrarier le flambage local, *on évite les grandes faces planes ou les bords libres* qui créent des « *amorces de voilement* ». On arrive ainsi à des sections à flancs emboutis ou à bords retournés telles que celles représentées par ces figures.

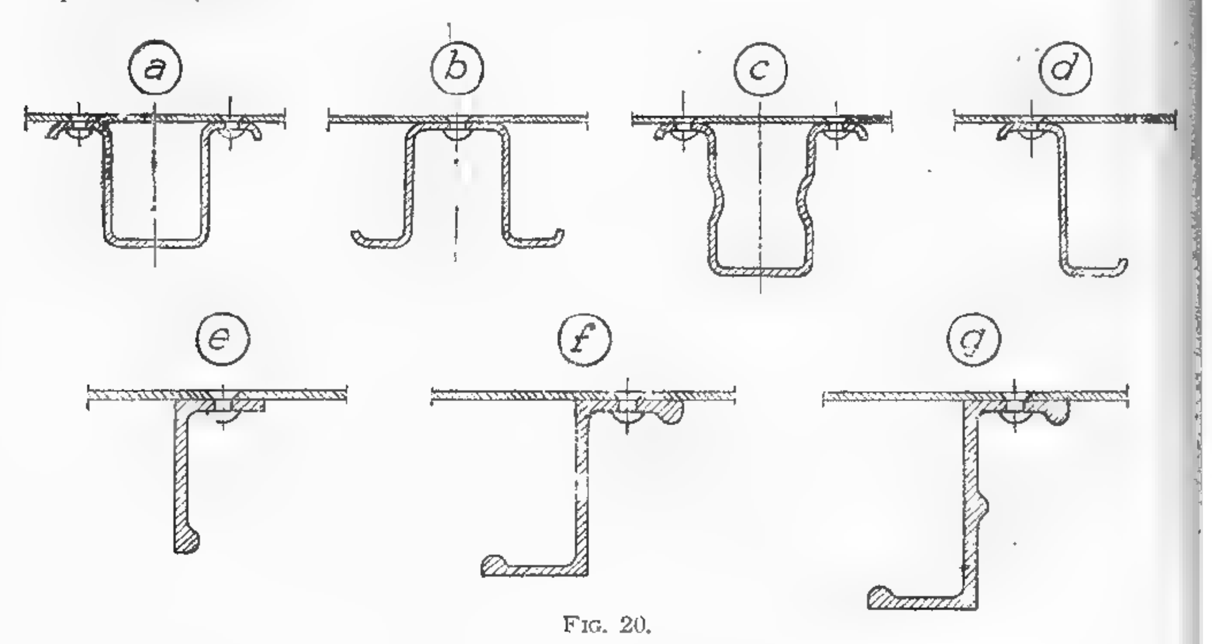


Fig. 20.

Les figures 20 *e* à 20 *g* donnent quelques types de raidisseurs obtenus par « *filage à la presse* ». Le flambage local de ces profilés est contrarié par la présence des « *boudins de raidissement* ». Ces profilés donnent, en général, des contraintes admissibles plus élevées que les raidisseurs obtenus par pliage (voir ci-dessous).

5.224 *Taux de flambage local.* — Il est délicat de mentionner des chiffres précis au sujet des contraintes admissibles au flambage local des différents raidisseurs. Celles-ci dépendent, en effet, de la forme des profilés, de leur épaisseur et, également, de l'épaisseur de la tôle à laquelle ils sont reliés. Cette tôle joue, en effet, un rôle *stabilisateur* vis-à-vis des ailes auxquelles elle est fixée.

La recherche de ces contraintes doit s'effectuer *expérimentalement* dans chaque cas particulier. On réalise, pour cela, des *panneaux courts* comprenant quelques raidisseurs et la tôle de revêtement correspondante. Les faces extrêmes de ces panneaux doivent être très soigneusement dressées de façon à obtenir une égale répartition des pressions entre les plateaux des machines d'essai. Le dépouillement de ces essais se fait en utilisant les théories usuelles du flambage des plaques comprimées (largeurs équivalentes, chap. XIX, § **2.4**) de façon à faire apparaître les contraintes n_{cr} des raidisseurs. Ces contraintes sont ensuite corrigées en tenant compte des *élancements* des panneaux ce qui permet d'obtenir le *taux de flambage local* n_0 des raidisseurs [1] [2]. Nous indiquerons seulement, pour fixer les ordres de

1. — Il est nécessaire pour cela que la rupture des panneaux soit due réellement au flambage local des raidisseurs et non à un flambage de la tôle entre points de fixation.

2. — L'utilisation des tensomètres électriques (ou Strain-gauges) permet de mesurer directement cette valeur pendant l'essai. Elle permet aussi de déterminer la variation de contrainte de la tôle entre raidisseurs (courbes analogues à celle de la fig. 10 *a* du chapitre XIX).

grandeur, les résultats suivants obtenus à la suite d'essais récents [1] effectués sur des assemblages en alliage AU4G.

Raidisseurs en tôle pliée

e' mm.	e mm.	n_o kg/mm²
1	1,25	26
1,25	1,25	27
1,25	1,6	27,5
1,6	1,25	28
1,6	1,6	30

Profilés filés

Profilés h mm	Profilés b mm	Profilés e' mm.	Tôle e mm	n_o kg/mm²
50	32	4	5	34
32	25	2,5	3,2	31

5.223 *Liaison des raidisseurs aux tôles.* — La liaison des raidisseurs aux tôles de revêtement qui s'effectue par rivetage ou soudure électrique par points (ou à la molette) doit satisfaire à la condition de non flambage de la tôle entre points de liaison, étudiée au chapitre XIX, paragraphe **2.47**, et **Planche 39.**

5.23 Stabilisation par tôles ondulées.

5.231 *Réalisation.* — Ce procédé consiste à disposer, sous une tôle lisse de revêtement, une tôle ondulée dont chaque onde joue le rôle d'un raidisseur (fig. 21). L'orientation générale des ondulations est donc parallèle à l'envergure et l'ensemble tôle-lisse-tôle ondulée forme une succession de tubes présentant de bonnes caractéristiques de résistance au plissement local.

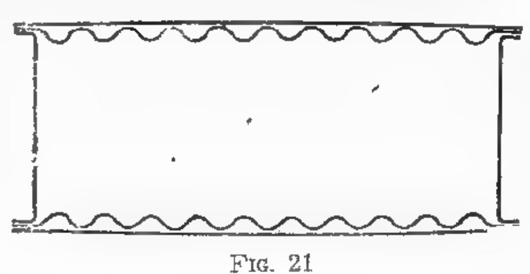


Fig. 21

On utilise des *ondulations arrondies* (fig. 22 *a*) ou à *plis anguleux* (fig. 22 *b*). La première solution présente un avantage de résistance au flambage local et la deuxième un avantage de fabrication. La forme convergente des caissons (dans le sens de l'envergure) nécessite, en effet, la réalisation

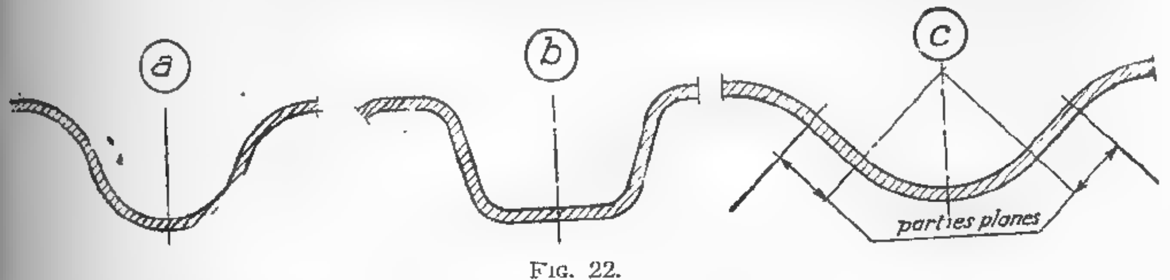


Fig. 22.

1. — Essais effectués aux laboratoires de l'E. R. Aé de Toulouse de 1944 à 1948 pour la S.N.C.A.S.E.

d'ondulations à pas décroissant le long de l'envergure (ondes coniques). Notons que l'on a cependant réalisé des caissons convergents à ondes constantes, mais la reprise des tôles ondulées sur l'âme oblique présente de sérieuses difficultés.

Signalons également une solution intermédiaire entre celles des figures 22 *a* et 22 *b* qui consiste à adopter des ondulations présentant des *parties planes* (fig. 22 *c*). La variation du pas et de la hauteur s'obtient en jouant sur ces parties planes (rayons de pliage constants).

Outre une certaine simplicité de fabrication, le principal *avantage* du raidissage par tôles ondulées réside dans le fait que ces tôles assurent, par elles-mêmes, la transmission d'une partie des *efforts de cisaillement*, contrairement aux raidisseurs isolés (voir ci-après).

5.232 *Epaisseurs relatives des tôles ondulées et des tôles lisses.* — L'emploi des tôles ondulées s'effectue suivant deux principes distincts : Elles peuvent, soit constituer l'élément résistant prédominant, soit l'élément auxiliaire de raidissage.

On a ainsi utilisé des *tôles ondulées seules* (sans revêtement métallique extérieur) ou doublées par des *tôles très minces* ne participant en compression que par de faibles bandes équivalentes.

On tend cependant, de plus en plus, à les doubler d'une *tôle lisse épaisse* (d'épaisseur sensiblement égale à celle de la tôle ondulée). On améliore ainsi la tenue de l'ensemble au flambage local, surtout si le pas des ondulations est inférieur au double de la largeur équivalente de la tôle lisse en compression (tôle entièrement stabilisée).

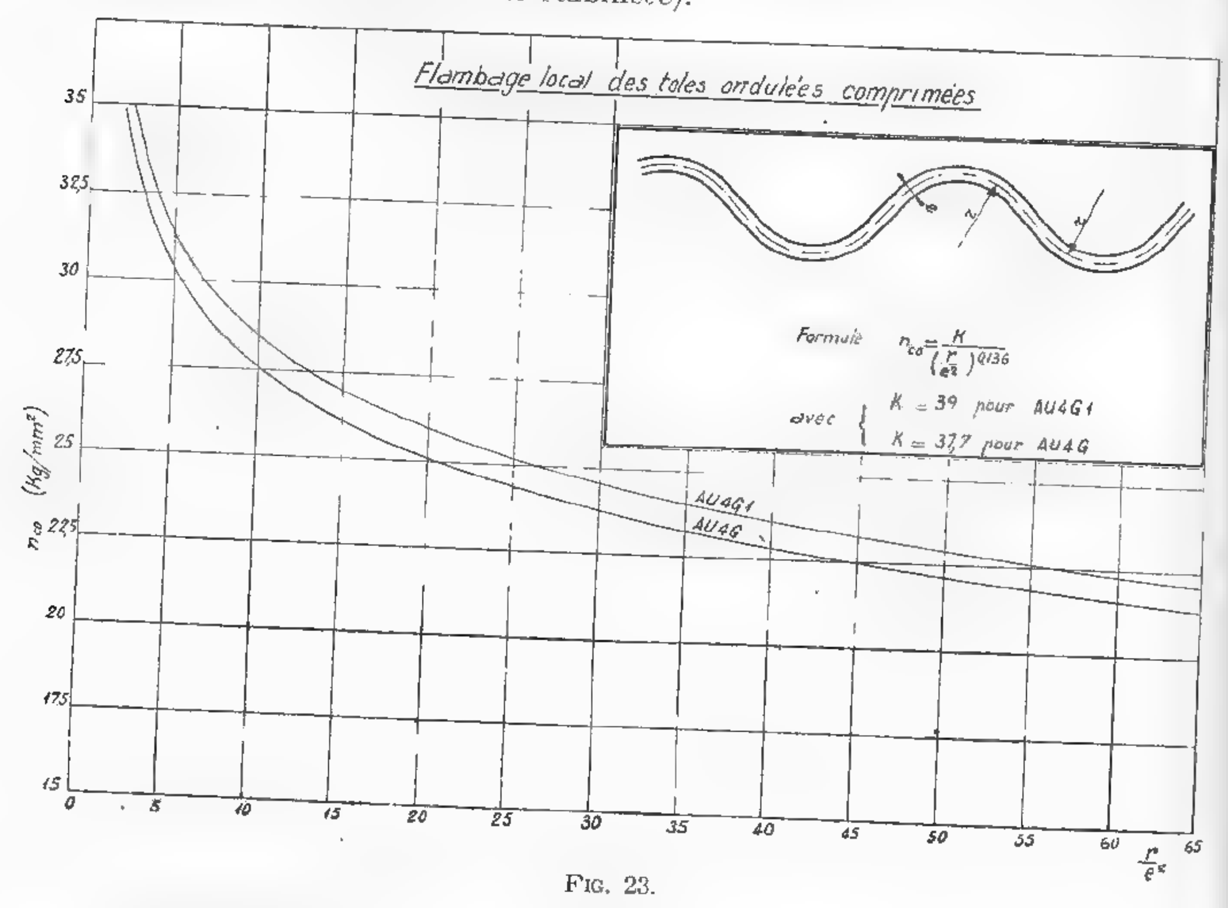


Fig. 23.

5.233 *Résistance au flambage local (compression).* — L'étude de cette résistance peut s'effectuer, théoriquement, en assimilant les tôles ondulées à des *plaques orthotropes*.

L'étude *expérimentale*, comparable à celle des raidisseurs, est cependant la plus utilisée.

Nous donnons, figure 23, un diagramme traduisant les résultats d'essais effectués aux laboratoires de la S. N. C. A. S. E. en 1937. Ces résultats concernent des *tôles ondulées seules, avec ondulations arrondies* suivant le profil représenté sur la figure. Signalons que l'on obtient des résistances unitaires légèrement plus élevées avec des assemblages tôles lisses-tôles ondulées présentant des pas de l'ordre de vingt-cinq fois l'épaisseur de la tôle lisse.

5.234 *Résistance au cisaillement.* — L'étude de cette résistance (stabilité) peut également se faire en utilisant la théorie des *plaques orthotropes.*

Nous ne donnerons qu'une *règle pratique* résultant d'essais comparatifs de déformabilité effectués aux laboratoires de la S. N. C. A. S. E. en 1939 sur des panneaux composés d'une tôle ondulée seule, ou d'assemblages tôles lisses-tôles ondulées. Les tôles ondulées essayées étaient de formes analogues à celle représentée sur la figure 23 et le montage d'essai était du type parallélogramme articulé décrit au chapitre XIX, paragraphe 4.21.

En désignant par ρ le rapport :

$$\rho = \frac{\text{pas de l'ondulation}}{\text{longueur développée d'une onde}}$$

il résulte de ces essais que le « *module d'élasticité transversal apparent* » G' des panneaux en tôle ondulée est relié au module d'élasticité G ordinaire (tôles lisses) par le rapport :

$$G' = \frac{G}{\rho^2}$$

Pour une semelle comprenant une tôle lisse d'épaisseur e_1 et une tôle ondulée d'épaisseur e_2 on pourra donc assimiler la tôle ondulée à une *tôle lisse d'épaisseur fictive au cisaillement*

$$e'_2 = \frac{e_2}{\rho^2}$$

d'où une épaisseur totale de calcul pour le cisaillement

$$e' = e_1 + e'_2.$$

5.24 **Remarque.** — L'exposé précédent montre que les *contraintes admissibles en compression* des parois de caissons sont toujours nettement inférieures à celles admises pour les longerons à semelles concentrées. Il convient, en effet, ainsi que nous l'avons signalé au paragraphe 5.21, de tenir compte du *flambage général* [1] des parois entre nervures, ce qui limite les contraintes admissibles à des valeurs inférieures aux taux de flambage local.

Il y a lieu également, pour le calcul des *parois tendues* de tenir compte de l'affaiblissement dû aux liaisons longitudinales ou transversales (trous de rivets ou points de soudure). Même avec des liaisons bien étudiées, cet affaiblissement est généralement de l'ordre de 10 à 15 % des sections brutes.

Il convient, enfin, de tenir compte des *contraintes supplémentaires* des parois engendrées par les pressions, ou dépressions, aérodynamiques qui leur sont directement appliquées.

En résumé, les caissons travailleront donc toujours en *flexion* à des

1. — Cette correction de flambage général peut s'effectuer à l'aide des formules usuelles (abaques de Strand-Euler par exemple).

taux moins élevés que les semelles des longerons des poutres à âmes minces [1].

5.3 · CALCUL SIMPLIFIÉ D'UN CAISSON CENTRAL A DEUX AMES.

5.70 **Remarques préliminaires.** — La méthode que nous exposons ci-dessous s'applique aux *caissons centraux* tels que ceux définis ci-dessus au paragraphe 5.142. Leurs âmes, disposées sensiblement symétriquement de part et d'autre du maître-couple des profils, présentent des hauteurs h_1 et h_2 peu différentes (fig. 24 *a*) et leurs semelles sont faiblement galbées. Ce sont ces propriétés qui permettent les simplifications de calcul exposées ci-après.

Les *semelles* peuvent être raidies, soit par des profilés isolés, soit par des tôles ondulées. Nous supposerons les *âmes* raidies seulement par des *montants verticaux* (et non pas des profilés longitudinaux). Elles s'assimileront ainsi, pour le calcul, à des *âmes minces* subissant donc des flux de cisaillement constants.

Nous n'exposerons, ci-après, que le *calcul aux efforts généraux normaux au plan de l'aile,* c'est-à-dire orientés, dans chaque section droite, parallèlement aux âmes. Ces efforts sont, en effet, ceux qui donnent lieu aux contraintes prédominantes.

Rappelons que, pour un calcul complet, il y aurait lieu de superposer à ces contraintes, celles provenant des efforts parallèles au plan de l'aile (flexion horizontale) et celles dues aux flexions locales des semelles sous l'action des pressions aérodynamiques directement appliquées.

Nous nous placerons également dans le cas d'un caisson en porte-à-faux soumis aux efforts existant en vol normal, c'est-à-dire à des charges agissant de bas en haut. La *semelle supérieure* sera donc *comprimée* et la *semelle inférieure tendue* par la flexion générale.

5.21 Sections travaillantes en flexion.

5.311 *Semelle supérieure (comprimée).* — En se fixant, à priori, un taux de compression probable des raidisseurs de la semelle supérieure [2], on peut déterminer, à l'aide des formules exposées au chapitre XIX, paragraphe 2.45, les *largeurs équivalentes* de la tôle de revêtement supérieure participant, fictivement, au même taux de compression que ces raidisseurs. On obtient ainsi une « *section travaillante* » *en compression de la semelle supérieure* constituée par les raidisseurs, les bandes équivalentes de revêtement, les profilés d'angle (éventuellement) auxquels on pourra adjoindre des bandes équivalentes d'âmes (fig. 24 *b*).

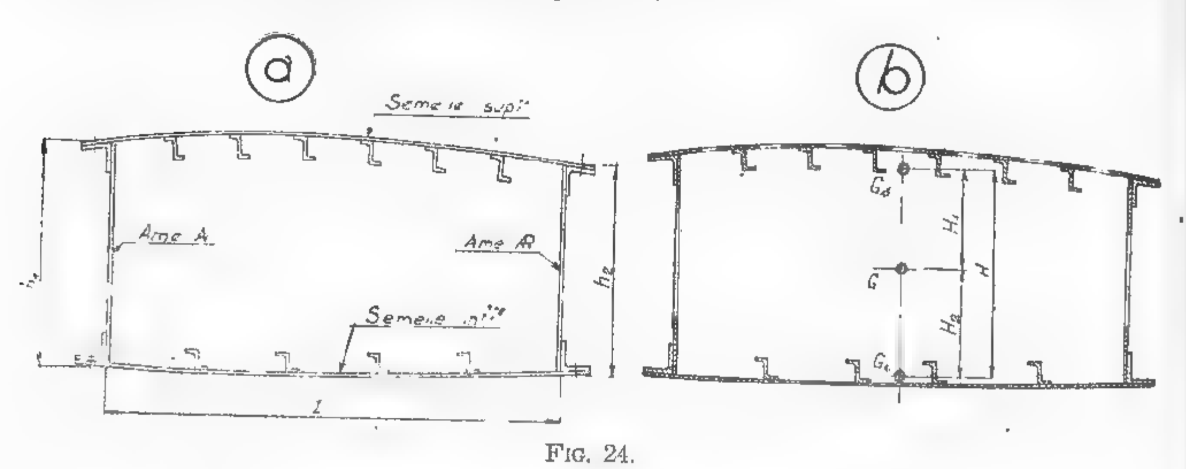


FIG. 24.

1. — Le poids d'ensemble de la structure peut cependant être plus léger, car on ne doit pas oublier que les mêmes éléments sont utilisés dans les caissons pour transmettre les efforts normaux et tangentiels, contrairement aux poutres à âmes minces dont les revêtements constituent un « poids mort » vis-à-vis des charges normales.

2. — On pourra, par exemple, adopter une contrainte égale aux 9/10 de la contrainte limite, conditionnée par le flambage local et le flambage général entre nervures, pour tenir compte des contraintes supplémentaires indiquées ci-dessus.

Soit S_s la surface totale de cette section travaillante en compression et G_s son centre de gravité.

5.312 *Semelle inférieure (tendue).* — Toute la *tôle* de revêtement inférieure participe à la *traction*, ainsi que les *raidisseurs*. On peut admettre cependant que les *âmes*, généralement instabilisées par le cisaillement et la flexion, ne participent effectivement à la résistance en traction qu'avec des largeurs équivalentes. Ces largeurs pourront, d'une manière défavorable, être prises égales à celles calculées du côté comprimé.

On obtient ainsi une section travaillante S_i dont le centre de gravité est G_i.

5.32 **Caisson rectangulaire équivalent.** — La forme des sections droites permet, avec une approximation suffisante, d'envisager pour les calculs un *caisson rectangulaire équivalent* selon figure 25 *a*. La hauteur H de ce caisson est égale, dans chaque section droite, à la distance verticale séparant les centres de gravité G_s et G_i. Les axes principaux d'inertie G*y* et Gz sont, respectivement, perpendiculaire et parallèle aux âmes. Le centre de cisaillement C_c d'une section droite peut être confondu avec le centre de gravité général G des sections travaillantes. Le centre de gravité peut être considéré à mi-distance entre les âmes, même si celles-ci sont d'épaisseurs différentes, car leurs sections équivalentes sont toujours très faibles vis-à-vis de celles des semelles.

C'est donc autour de G que s'évalueront les moments de torsion appliqués à chaque section droite.

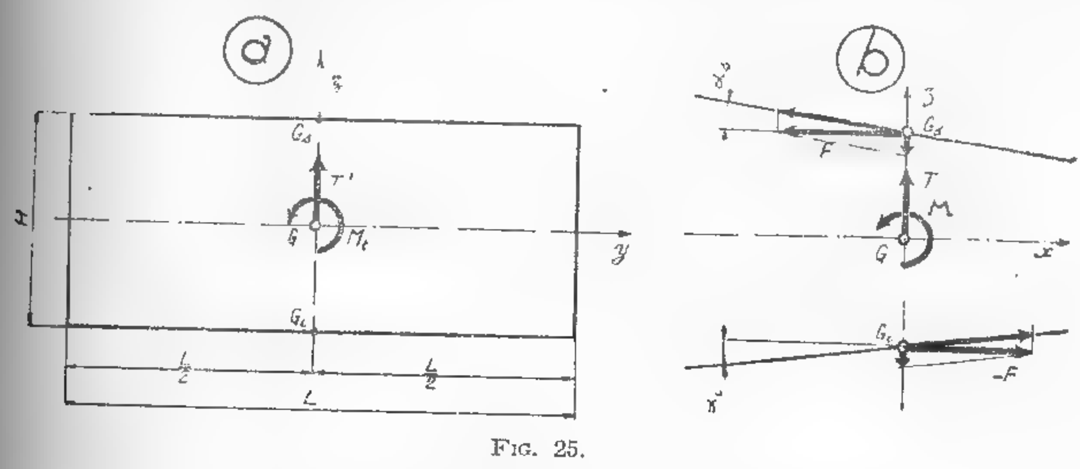


Fig. 25.

5.33 **Contraintes normales de flexion.** — Le moment fléchissant M appliqué à une section droite équivaut à deux composantes :

$$F = \pm \frac{M}{H} \qquad \text{(fig. 25 } b\text{)}.$$

On peut pratiquement, confondre ces composantes avec leurs projections dirigées suivant les directions réelles des semelles convergentes.

D'où les contraintes normales (uniformes pour chaque semelle) :

$$n_s = \frac{F}{S_s} \text{ (compression)} \qquad \text{et} \qquad n_i = \frac{F}{S_i} \text{ (traction).}$$

Remarque. — La forme galbée des semelles laisserait présager des contraintes plus élevées au centre qu'au niveau des âmes (loi des distances à l'axe neutre en flexion plane). Mais, en fait, les déformations de cisaillement dues à la « mise en charge par les âmes » (voir ci-après) tendent à décharger les parties centrales en procurant un voilement des sections droites.

Les formules simplifiées ci-dessus assurent ainsi une certaine tendance concordante entre leurs résultats et la réalité.

5.34 Transmission de l'effort tranchant.

5.341 *Notations.* — Au niveau d'une *section droite* considérée désignons par :

T l'effort tranchant total (appliqué suivant Gz) ;

k le coefficient de convergence longitudinale des semelles supposées concentrées en G_s et G_i :

$$k = \text{tg}\,\alpha_s + \text{tg}\,\alpha_i \qquad \text{(fig. 25 } b\text{)}$$

$T' = T - k\dfrac{M}{H}$ *l'effort tranchant réduit* à transmettre par cisaillements ;

L et H les dimensions du caisson équivalent ;

e_s et e_i les épaisseurs des tôles de revêtement des semelles supérieure et inférieure, ou les épaisseurs équivalentes au cisaillement, dans le cas d'un raidissage par tôles ondulées (§ 5.234) ;

e_1 et e_2 les épaisseurs des âmes avant et arrière.

5.342 *Flux de cisaillement de flexion pure.* — La symétrie du caisson équivalent, autour de Gz, lève directement l'indétermination statique propre aux sections fermées (§ 2.33). Le flux est, en effet, d'intensité nulle aux points A et A' situés sur l'axe Gz.

Son sens de cheminement sur le périmètre du caisson est celui schématisé par l'orientation des flèches représentées sur la figure 26 *a*. Les flux agissant sur chaque semelle ont une résultante générale nulle (symétrie). Il s'en suit que les flux agissant sur les *âmes* doivent admettre T' comme résultante. Elles transmettent donc chacune la moitié de cet effort, par raison de symétrie. Comme, par hypothèse, ces « *âmes minces* » sont soumises à un flux constant, l'intensité de ce flux a pour valeur :

$$\tau_a = \frac{T'}{2\,H}$$

Fig. 26.

Ceci permet de dire (fictivement) que, dans ces caissons, « les âmes transmettent la totalité de l'effort tranchant réduit ».

La *répartition réelle sur les semelles* présente l'allure schématisée par le diagramme de la figure 26 *b* (où l'intensité du flux en chaque point est

représentée par la hauteur correspondante de la partie hachurée). Le flux croît brusquement de valeur de part et d'autre de la ligne de fixation de chaque raidisseur (variation proportionnelle au moment statique propre à ce raidisseur).

En pratique, il est suffisant de considérer, pour les calculs, la *répartition linéaire moyenne* représentée sur la figure 26 *a* où les diagrammes hachurés figurent les intensités des flux en valeurs absolues.

Cette répartition revient d'ailleurs à supposer, pour le calcul des flux, les semelles constituées par deux plaques planes d'épaisseurs :

$$e'_s = \frac{S_s}{L} \quad \text{et} \quad e'_i = \frac{S_i}{L} .$$

Le moment statique W de la partie AP intéressant une section située à la distance u de Gz (fig. 26 *a*) a, en effet, pour valeur :

$$W = u \; e' s \; H_1 .$$

Le flux $\tau_s = \frac{T'}{I} W$ croît donc bien linéairement avec u.

Aux angles du caisson équivalent on retrouve le flux τ_a défini ci-dessus [1]. On a donc, dans la section ci-dessus,

$$\tau_s = \tau_a \frac{2u}{L}$$

soit :

$$\tau_s = \frac{T'}{HL} u \qquad \text{(en valeur absolue).}$$

On voit que la *mise en charge des semelles s'effectue, longitudinalement, par les âmes* ainsi que nous l'avions indiqué ci-dessus.

5.35 **Transmission de la torsion.** — Le moment de torsion M_t appliqué à une section droite donne un flux de cisaillement constant (torsion pure) d'intensité :

$$\tau_t = \frac{M_t}{2\Omega} = \frac{M_t}{2 \; HL} .$$

5.36 **Flux résultant et contraintes de cisaillement.** — La combinaison des flux dus à T′ et à M_t s'effectue algébriquement en tenant compte de leurs sens respectifs sur chaque élément. On obtient ainsi un diagramme des *flux résultants* τ_r tel que celui représenté sur la figure 27 (intensités en valeurs absolues).

Il se produit un *décalage* $d = AA_1 = A'A'_1$ *des points de flux nul*, ce décalage étant tel que

$$\frac{T'}{HL} d = \frac{M_t}{2 \; HL} \qquad \text{(en valeur absolue)}$$

soit

$$d = \frac{M_t}{2 \; T'}$$

(décalage orienté du côté opposé à l'âme surchargée par la torsion.)

Les *contraintes de cisaillement* se calculent, à partir de ce flux résultant.

1. — En fait, on ne retrouve aux fixations âmes-semelles du caisson réel, que le flux τ_a diminué de celui dû au moment statique propre de chaque cornière d'angle et bande équivalente d'âme (correction généralement négligeable).

en utilisant la relation générale $t = \frac{\tau_r}{e}$ appliquée à chaque élément considéré (épaisseur e_s, e_i, e_1 ou e_2).

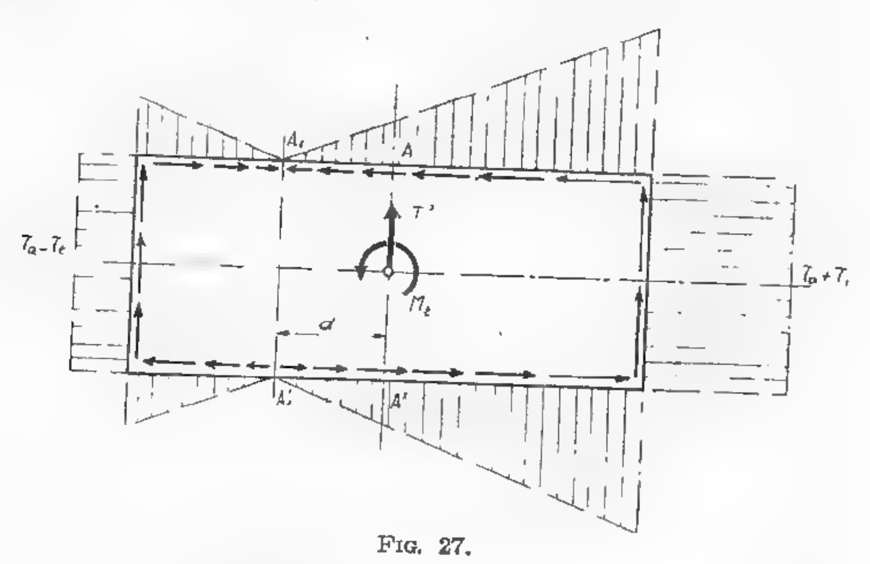


Fig. 27.

5.37 **Remarque.** — L'absence d'éléments concentrés possédant des inerties propres importantes fait que les structures caissons sont mal adaptées pour subir les « sursollicitations » résultant du travail en traction diagonale de leurs parois.

On réalise donc, généralement, le *raidissage des âmes* (montants) de telle façon que celles-ci supportent, sans plissement, les contraintes de cisaillement pur qui leur correspondent. Il convient cependant de remarquer que ces âmes sont, d'une façon générale, instabilisées par la compression provenant de la flexion (ce qui justifie la méthode de calcul ci-dessus), mais on peut négliger les efforts complémentaires provenant de cette instabilité.

Les raidisseurs des *semelles* sont, généralement, suffisamment serrés pour stabiliser également les tôles de revêtement, sous l'action du cisaillement pur.

5.38 Calcul des jonctions longitudinales.

5.381 *Jonctions âmes semelles.* — Les flux résultants appliqués aux angles du caisson donnent l'effort par unité de longueur à transmettre par ces jonctions. Notons que c'est, généralement, la possibilité de disposition du rivetage correspondant qui guide le dimensionnement des *profilés d'angle* des caissons métalliques. Pour les *caissons en bois*, le glissement âmes semelles détermine les surfaces de collage à donner aux *tasseaux d'angle* (chap. XII, § 1.45). Il arrive que pour certains caissons profonds, ou très chargés en torsion (appareils multimoteurs), la réalisation de ces jonctions âmes-semelles pose de sérieux problèmes de fabrication par suite du nombre considérable de rivets ou des grandes surfaces de collage nécessaires.

5.382 *Jonctions intermédiaires.* — Pour les caissons de grande profondeur, on est généralement obligé, par suite des dimensions maxima d'approvisionnement des tôles, de prévoir des jonctions longitudinales intermédiaires. Elles se calculent à l'aide du flux résultant existant à l'abscisse u qui leur correspond.

5.4 ETUDE DES ELEMENTS TRANSVERSAUX OU NERVURES.

5.41 **Généralités.** — Les nervures des caissons de voilure constituent des « *cloisons d'introduction de charge* », en même temps qu'elles sont nécessaires pour fractionner les *longueurs libres au flambage général* des parois comprimées. C'est ce dernier point qui détermine, généralement, l'intervalle entre ces nervures.

La réalisation des nervures de caissons est principalement guidée par des considérations de fabrication du corps creux.

C'est ainsi que, pour des caissons de faible hauteur, on réalise souvent des *nervures en deux pièces* en forme d'arcs encastrés l'un sur l'autre au montage (fig. 28 *a*). Cette disposition permet de fabriquer isolément chaque semelle équipée de ses raidisseurs. L'ensemble d'une nervure est assimilable pour le calcul, à un *cadre plan*.

Dans certaines constructions, les parties centrales des arcs supérieurs et inférieurs sont directement réunies entre elles par des montants (ou colonnettes) isolés.

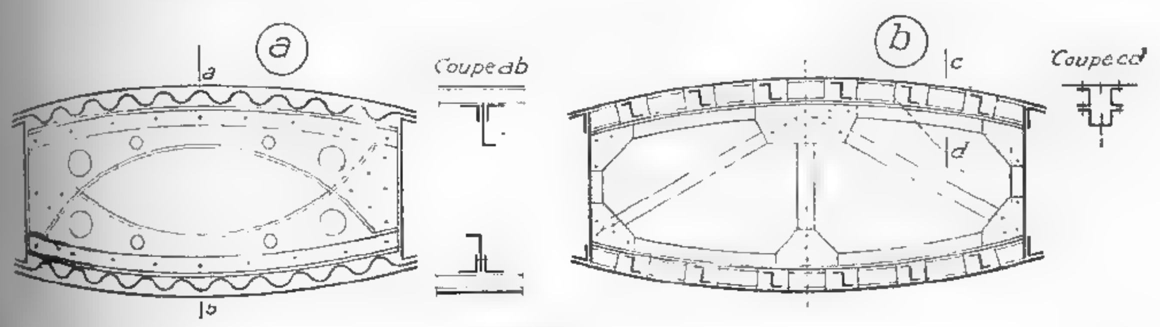


Fig. 28.

Les caissons de grandes dimensions sont généralement équipés de *nervures en treillis* (fig. 28 *b*) qui constituent, pour le calcul, des *systèmes triangulés*.

Nous ne donnerons ci-après que les principes généraux de mise en équilibre extérieur de ces nervures, ces principes étant comparables à ceux exposés au chapitre XXI pour les nervures des structures à âmes minces.

5.42 **Nervures courantes.** — Nous désignons ainsi les cloisons non intéressées par une charge concentrée importante et non situées à un changement de forme du caisson.

Leur rôle principal est d'assurer la *répartition* entre les différentes parois du caisson, des *charges aérodynamiques* appliquées à la « tranche d'envergure » qui leur correspond [1].

Le transport de ces charges au centre élastique du caisson donne lieu à des *accroissements* ΔT et ΔM_t des *efforts généraux*, d'où les *accroissements de flux* correspondants [2] qui assurent l'équilibre extérieur général de la nervure.

Notons que les charges directement appliquées aux semelles donnent lieu à des efforts secondaires de flexion qui sont principalement importants pour les nervures en treillis.

5.43 **Nervures d'introduction de charges.** — Leur principe d'équilibre est identique : Les charges à introduire donnent lieu à des accroissements des efforts généraux de part et d'autre de la nervure, d'où les accroissements de flux correspondants qui assurent les réactions (réparties) à ces charges.

5.431 *Exemple. — Introduction d'une charge appliquée au niveau d'une*

1. — Cette « tranche d'envergure » comprend, en profondeur, toutes les parties fixes de la voilure : bord d'attaque, caisson, et bord de fuite (en avant des ailerons ou volets).

2. — Ces accroissements de flux sont distribués d'une façon identique à ceux dus aux efforts d'ensemble. Ils doivent être dirigés dans le sens des réactions à ΔT et ΔM_t.

âme d'un caisson central. — Soit F la charge appliquée sur la face CD du caisson rectangulaire équivalent ABCD (fig. 29).

Cette charge, transportée en G, donne :

$$\Delta T = F\,; \qquad \Delta M_t = F\,\frac{L}{2}\,.$$

D'où les *réactions réparties* (accroissements de flux) dirigées suivant les systèmes de flèches de la figure 29 :

Equilibre à ΔT : flèches intérieures avec : $\Delta \tau_a = \frac{\Delta T}{2\,H} = \frac{F}{2\,H}$

Equilibre à ΔM_t : flèches extérieures : $\Delta \tau_t = \frac{\Delta M_t}{2\,LH} = \frac{FL}{4\,LH} = \frac{F}{4\,H}$

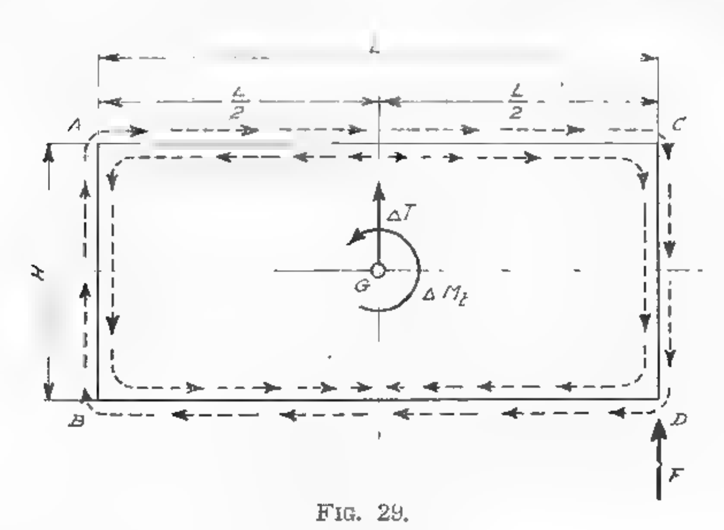


FIG. 29.

Remarquons que l'âme CD recevant F, est finalement soumise immédiatement après la nervure, à un effort total

$$H\left(\frac{F}{2\,H} + \frac{F}{4\,H}\right) = \frac{3}{4}\,F \quad \downarrow$$

et l'âme AB à un effort

$$H\left(\frac{F}{2\,H} - \frac{F}{4\,H}\right) = \frac{1}{4}\,F\,. \quad \uparrow$$

La totalité de la force F ne subsiste donc pas dans l'âme où elle est directement appliquée. Cet exemple particulier démontre la nécessité de *prévoir une cloison en regard de chaque charge concentrée, même si cette charge est appliquée directement à l'une des parois du caisson.*

5.432 *Remarques.* — *a*) Les accroissements de flux de flexion pure (flèches intérieures fig. 29) appliqués aux semelles procurent des efforts internes de compression et de traction dans les semelles des nervures ;

b) Pour des charges concentrées importantes (potences de volets, bâtis-moteurs, attaches au fuselage, etc...), il est nécessaire que les nervures soient *directement liées aux tôles de revêtement* des semelles et non seulement aux raidisseurs comme on le tolère souvent pour les nervures courantes. Cette dernière disposition, de réalisation plus simple, ne procure, en effet, qu'une mise en charge incorrecte des semelles du caisson (localisation des efforts aux angles).

5.44 Nervures situées dans un « plan de brisure » d'un caisson.

5.441 *Généralités.* — L'obliquité relative (ou *dièdre*) des porte-à-faux d'une voilure et la convergence de leurs parois, oblige à « briser » l'élément résistant pour assurer sa continuité à travers le fuselage.

Cette brisure peut s'effectuer, dans le cas des caissons, soit au niveau de chaque paroi du fuselage (caisson intérieur horizontal), soit uniquement au centre de l'appareil.

C'est cette solution que nous envisageons ci-dessous dans le cas d'un caisson central à deux âmes.

5.442 *Données* (fig. 30 *a*). — Désignons par :

β l'angle dièdre d'une aile (mesuré entre l'horizontale et l'axe élastique du caisson) ;

α_1 et α_2 les angles de convergence des semelles (du caisson équivalent) ;

M le moment fléchissant constant appliqué au caisson dans fuselage (cas de charge symétrique) ;

H la hauteur du caisson équivalent au niveau de la brisure AB (hauteur mesurée perpendiculairement à l'axe élastique).

5.443 *Équilibre d'ensemble.* — Le moment M donne lieu aux composantes suivantes dans les semelles (compte tenu de leurs angles de convergence) :

semelle supérieure (comprimée) : $F_1 = \dfrac{M}{H \cos \alpha_1}$

semelle inférieure (tendue) : $F_2 = \dfrac{M}{H \cos \alpha_2}$

(valeurs absolues).

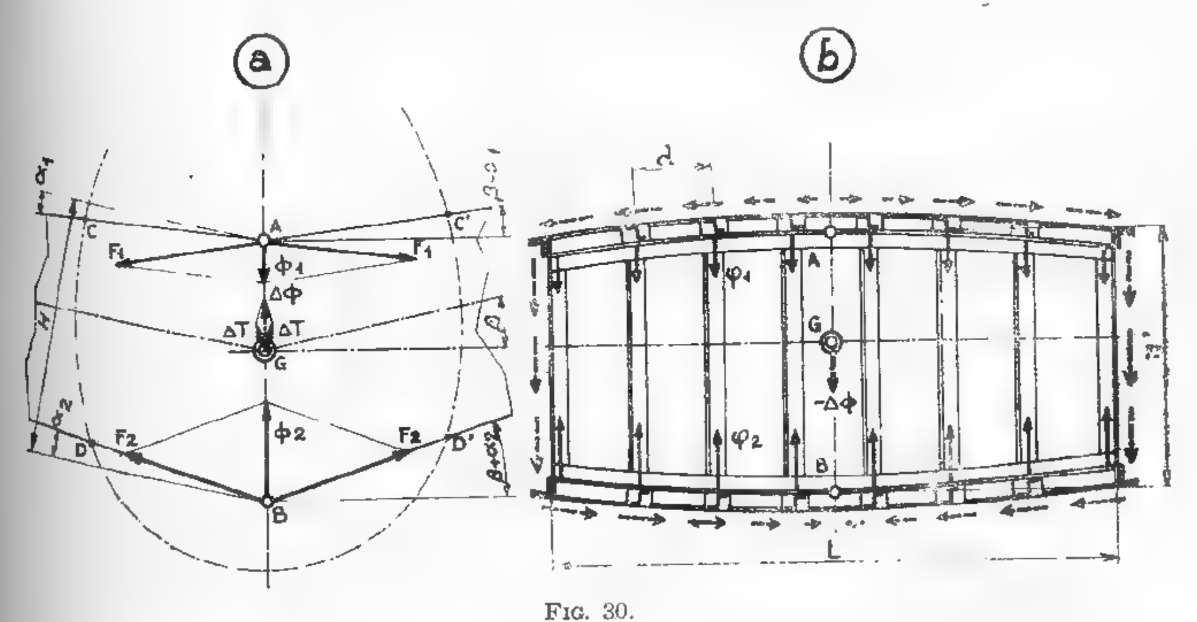


FIG. 30.

Les forces F_1, se composant en A, donnent une résultante verticale dirigée de haut en bas :

$$\Phi_1 = 2\ F_1 \sin (\beta - \alpha_1) = \frac{2\ M}{H} (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \alpha_1).$$

De même, les forces F_2 donnent en B une résultante verticale dirigée de bas en haut :

$$\Phi_2 = 2\ F_2 \sin (\beta + \alpha_2) = \frac{2\ M}{H} (\sin \beta + \cos \beta \operatorname{tg} \alpha_2).$$

La brisure a donc fait apparaître, finalement, une *force verticale dirigée de bas en haut :*

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \frac{2\ M}{H} \cos\beta\ (\mathrm{tg}\ \alpha_1 + \mathrm{tg}\ \alpha_2).$$

Cette force donne, elle-même, deux *efforts tranchants*, orientés normalement à l'axe élastique de chaque demi-caisson et dirigés de haut en bas :

$$\Delta T = \frac{\Delta\Phi}{2\cos\beta} = \frac{M}{H}\ (\mathrm{tg}\ \alpha_1 + \mathrm{tg}\ \alpha_2).$$

On retrouve ainsi l'expression classique de « *l'effort tranchant correcteur* » transmis par la convergence des semelles de chaque porte-à-faux.

Ces efforts tranchants correcteurs, ainsi restitués par la brisure, cheminent dans chaque demi-caisson, jusqu'aux sections d'encastrement CD et CD' où ils s'ajoutent aux efforts tranchants réduits (apportés par les âmes) pour donner, finalement, les efforts tranchants totaux à chaque jonction voilure-fuselage.

5.444 *Equilibre de la nervure centrale.* — Les forces Φ_1 et Φ_2 sont, en réalité, *réparties* sur toute la profondeur du caisson. En désignant par d l'espacement des raidisseurs et L la profondeur du caisson (fig. 30 *b*) on peut admettre que chaque raidisseur engendre les forces :

$$\varphi_1 = \Phi_1 \frac{d}{L} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = \Phi_2 \frac{d}{L}.$$

Il s'en suit, au niveau de chacun d'eux, un *effort interne de compression verticale de la nervure*

$$C = \varphi_1.$$

Cet effort est, généralement, encaissé par des raidisseurs verticaux convenablement disposés (fig. 30 *b*).

La nervure assure, au surplus, par *cisaillement* et *flexion*, le transport des composantes

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Ces composantes s'équilibrent par un flux de flexion pure admettant $-\Delta\Phi$ pour résultante (fig. 30 *b*). La nervure se comporte, en pratique, à cet égard comme une poutre chargée par les forces réparties $\Delta\varphi$ et appuyée sur les âmes.

5.445 *Conclusion.* — L'exemple ci-dessus montre qu'il est nécessaire de disposer une cloison au niveau de tout changement de forme d'un caisson. On ne peut se contenter d'effectuer une courbure progressive des semelles, comme dans le cas d'un longeron ordinaire dont les semelles concentrées se trouvent maintenues directement, sur toute leur longueur, par l'âme.

C'est une des difficultés principales des structures-caissons.

6. ETUDE GÉNÉRALE DES FUSELAGES-COQUES.

6.0 GÉNÉRALITÉS.

La construction des fuselages-coques constitue l'application principale des structures-coques.

Nous avons déjà signalé, au paragraphe 1.2 ci-dessus, qu'il existe quelques exemples de « *coques théoriques* » (sans raidisseurs), notamment dans les constructions en bois ou matières plastiques.

Cependant, la grande majorité des fuselages-coques sont réalisés sous forme

de « *coques pratiques* » dans lesquelles le revêtement, toujours relativement mince, est stabilisé par de nombreux raidisseurs longitudinaux (ou *lisses*). Ces structures sont, généralement, connues sous le nom de « *fuselages coques multi-lisses* », par opposition aux coques à quelques longerons principaux, assimilables à des poutres à âmes minces que nous avons étudiées au chapitre précédent (§ **6.**). C'est cette solution de coques multi-lisses que nous envisagerons dans l'exposé ci-après.

Bien que les fuselages-coques présentent toujours un plan de symétrie (coquilles symétriques), leur calcul demeure, en général, un problème assez complexe, par suite du grand nombre d'éléments qui les composent et de l'instabilité de leurs parois minces. Cette complexité se trouve accrue quand les fuselages possèdent des ouvertures importantes ou présentent des changements de forme dus à des nécessités d'aménagement.

Les applications numériques effectuées au paragraphe **7.** ci-après, montreront que la réalisation matérielle de ces calculs se trouve grandement facilitée par une disposition en « tableaux-types » et par des méthodes graphiques. Nous donnons également au paragraphe **8.** ci après, des formules algébriques permettant un calcul rapide des sections de forme circulaire. Nous exposerons, enfin, succinctement, au paragraphe **9.** quelques problèmes particuliers posés par la réalisation des fuselages-étanches à l'air (cabines des stratosphériques).

6.1 PRINCIPES DE CONSTRUCTION.

6.11 Composition générale. — Un fuselage-coque multi-lisses comprend essentiellement (fig. 31) :

— Des *parois* composées d'un revêtement (tôles ou contreplaqués) raidi par des lisses longitudinales fixées intimement à ce revêtement. Ces parois raidies transmettent la totalité des efforts généraux de flexion et de torsion appliqués à la structure ;

— Des éléments transversaux appelés *couples* ou *cadres*. Le but de ces éléments est d'assurer la forme extérieure de la structure, d'introduire les charges transversales dans les parois et de fournir à ces parois des appuis, normaux à leurs surfaces, nécessaires pour fractionner leurs longueurs libres au flambage.

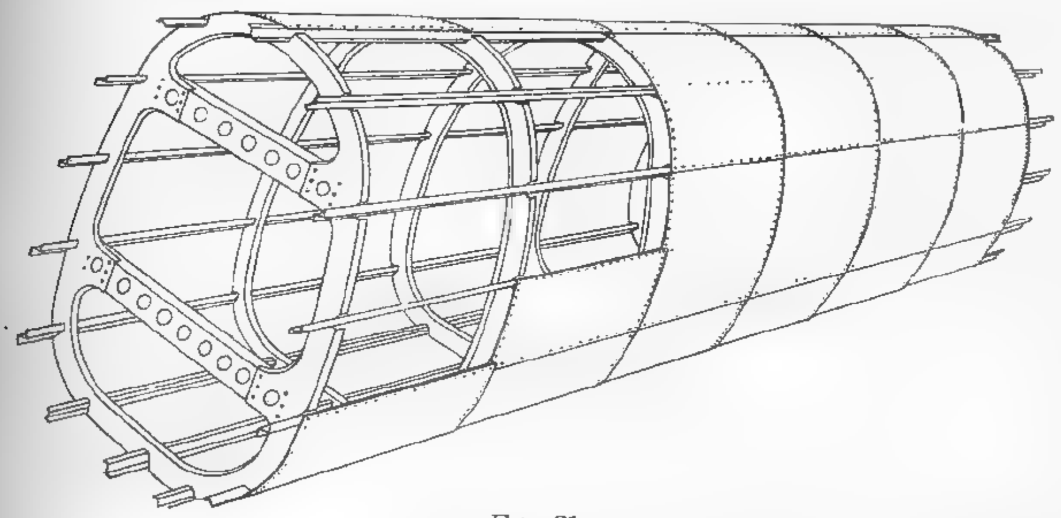


FIG. 31.

Remarques. — Dans les fuselages de grandes dimensions, les parois résistantes comprennent parfois, en supplément aux revêtements extérieurs, des *cloisons horizontales intermédiaires constituées* par les planchers des différents étages des cabines. Il est cependant nécessaire que ces planchers soient rigidement reliés au reste de la structure pour qu'ils puissent être comptés comme parois résistantes dans le sens longitudinal.

6.12 Construction des parois.

6.121 *Construction métallique.* — On emploie essentiellement des tôles de revêtement en alliages types duralumin (AU4G, AU4G1, AZ8GU)

ou védal (hydravions maritimes) et, plus rarement, des tôles en alliages ultra-légers (GM2 ou GA6Z).

Les différentes *lisses* utilisées sont de mêmes types que les raidisseurs des caissons de voilure décrits ci-dessus au paragraphe **5.22**. On emploie, le plus souvent, des profilés obtenus par pliage, ou étirage, de tôles. L'utilisation des tôles ondulées est très rare pour les fuselages. Notons une solution originale, propre à une fabrication en grande série, qui consiste à remplacer les lisses par des « bords repliés » longitudinaux des tôles de revêtement, constituées elle-mêmes par des bandes de faibles largeurs (fig. 32). L'*intervalle entre les lisses* ne peut, pratiquement, comme pour les caissons, être suffisamment serré pour assurer la stabilisation totale des revêtements comprimés (par suite de la minceur de ces revêtements dont les épaisseurs usuelles varient, pour le duralumin, de 0,6 à 2 mm). Cet intervalle varie, en pratique, entre 100 et 300 mm.

Les parois des fuselages-coques sont donc, en fait, toujours instabilisées par les efforts de calcul qu'elles supportent. Leurs procédés de calcul utilisent donc essentiellement les méthodes applicables aux tôles minces plissées, exposées au chapitre XIX.

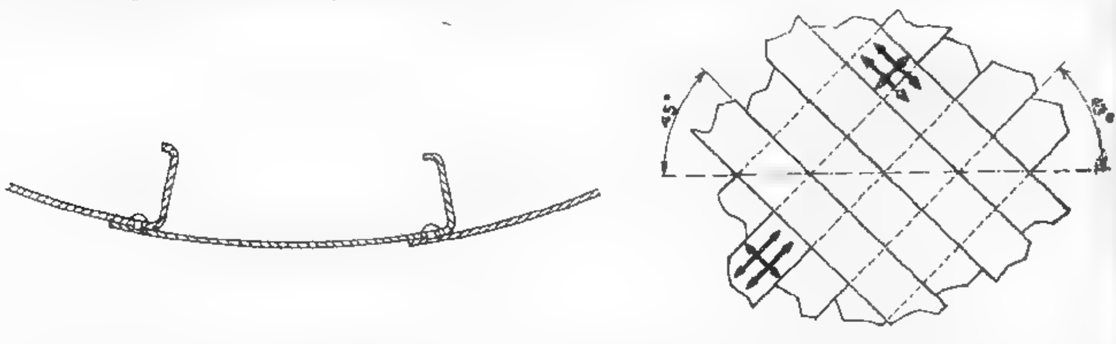


Fig. 32. Fig. 33.

6.122 *Construction bois.* — Les surfaces de *revêtement* sont réalisées en *contreplaqués* d'okoumé ou de bouleau. Ces contreplaqués peuvent être utilisés, soit en *feuilles* (planes ou galbées), soit en *bandes* croisées et collées entre elles (fig. 33). Cette dernière disposition, où les bandes sont disposées à 45° par rapport à l'axe longitudinal de la structure, présente l'avantage de réaliser un ensemble homogène où les fibres sont orientés suivant les directions optima pour résister aux cisaillements.

Les *lisses* sont, généralement, constituées par des baguettes de spruce ou de peuplier, collées sur le revêtement. Leurs *intervalles* sont analogues à ceux utilisés en construction métallique. Notons qu'il existe également un phénomène d'instabilité (ou plissement) de ces parois, ainsi que nous l'avons signalé au chapitre XIX, paragraphe **1.1**. On admet souvent, d'une façon empirique, pour calculer ces structures, que les largeurs équivalentes de contreplaqué intéressées en flexion, de part et d'autre d'une lisse, sont égales à quinze fois l'épaisseur de ce contreplaqué.

6.13 **Construction des couples.** — Les couples constituent des anneaux ou cadres plans. Ces anneaux peuvent être simples ou complétés par des traverses (voir chap. XVIII, fig. 53, 55 et 56).

6.131 *Couples courants.* — En *construction métallique*, les couples courants sont généralement obtenus, directement, par emboutissage de tôles. Il existe beaucoup de structures où ces couples ne sont reliés qu'aux raidisseurs et non aux tôles de revêtement (fig. 34 *a*). Signalons une solution originale, à rapprocher de celle représentée figure 32 concernant les lisses, qui consiste à réaliser directement une paire de couples par emboutissage de « cerces » servant également de revêtement (fig. 34 *b*).

En *construction bois*, ils sont constitués par des âmes en contreplaqué raidies par des semelles cintrées (spruce ou peuplier).

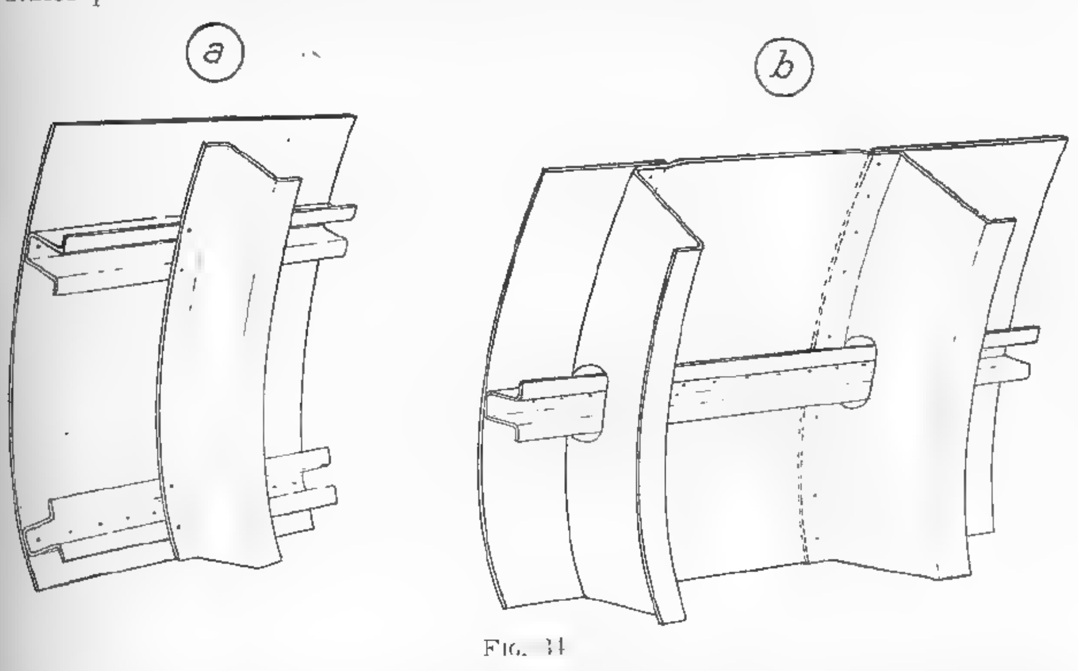


FIG. 34

6.132 *Couples forts.* — Les couples chargés d'introduire des charges transversales importantes doivent, nécessairement, être reliés aux parois de revêtement pour assurer une « *mise en charge* » correcte de celles-ci.

Ils sont renforcés par des profilés (fig. 35 *a*) ou sont réalisés sous forme de caissons (fig. 35 *b*). Certains couples forts constituent des pièces très importantes (couples d'attache voilure-fuselage ou couples de hissage des hydravions, par exemple).

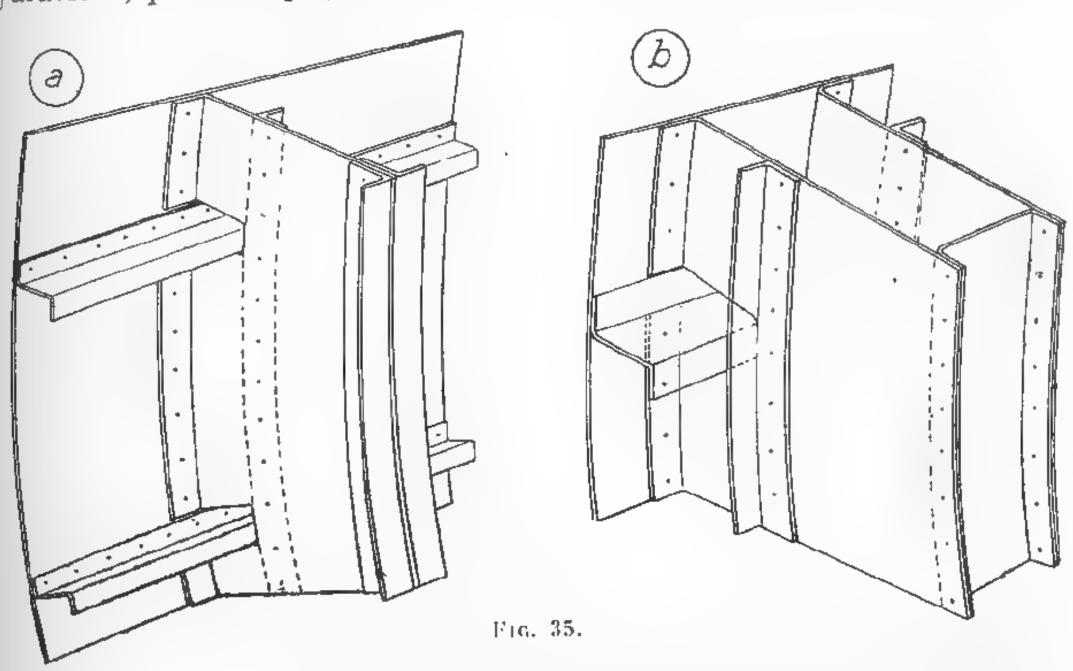


FIG. 35.

6.14 Croisement des lisses et des couples. — Pour être efficaces, les *lisses* doivent être *continues* tout le long de la coque.

Quand les couples ne sont reliés qu'aux lisses, la continuité des deux éléments n'est pas perturbée à leur croisement (fig. 34 *a*).

Pour les couples reliés au revêtement, on réalise des encoches (fig. 34 *b* et 35) ou des emboutis sur le pourtour de ces couples, pour permettre le passage des lisses. L'affaiblissement de section ainsi créé peut être compensé par des éléments supplémentaires situés sous les encoches.

6.2 DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES DE RÉSISTANCE EN FLEXION DES SECTIONS DROITES.

6.21 Position du problème. — Ainsi que nous l'avons signalé ci-dessus, paragraphe **6.121**, les parois de revêtement des fuselages-coques, réalisés en pratique, sont généralement instabilisées par les efforts qui correspondent à leurs charges de calcul.

Mais, en réalité, *cette instabilité ne se manifeste que sur une fraction du contour des sections droites.*

Considérons, en effet, la section représentée figure 36 *a* qui est soumise à un effort tranchant vertical T et à un moment fléchissant M tendant à comprimer les parois supérieures et à tendre les parois inférieures. Supposons connue la position du centre de gravité G des « *sections travaillantes* » (voir ci-dessous) et donc l'axe neutre de flexion G*y*.

L'instabilité des différents *panneaux* (délimités par les lisses) peut provenir, soit de la *compression* (due à M), soit du *cisaillement* (dû à T) ou, plus exactement de la *combinaison* de ces deux causes. Mais, par contre, la *traction*, existant en-dessous de G*y*, produit un « *effet stabilisateur* ».

Si le moment M existait seul, la « *zone d'instabilité* » s'étendrait à partir d'une certaine hauteur z_1 au dessus de G*y* [1].

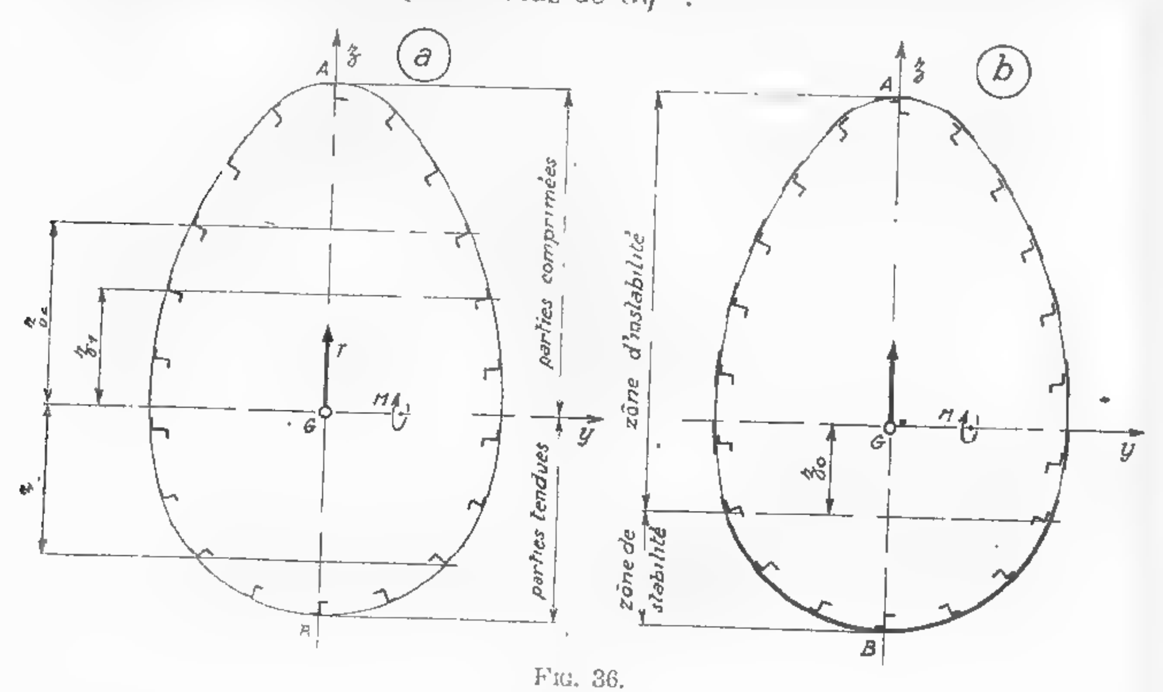


FIG. 36.

Si T existait seul, l'instabilité (due au cisaillement pur) se manifesterait pour quelques panneaux situés entre les ordonnées z_2 et z_3 de part et d'autre de l'axe neutre G*y* (où le flux de cisaillement dû à T est maximum).

La combinaison de ces deux efforts engendre donc des plissements des parois sur une certaine zone qui comprend, ordinairement, toutes les parties comprimées et une fraction, relativement faible, des parties tendues, délimitée par une ordonnée négative $z_0 < z_3$.

1. — Nous supposons, implicitement, que tous les panneaux présentent des contraintes critiques sensiblement égales (lisses équidistantes, par exemple).

Or, nous savons que dans toutes ses parties instables, le revêtement ne participe, fictivement, aux mêmes taux de contraintes normales que les raidisseurs, qu'avec dès « *bandes équivalentes* » situées de part et d'autre de chacun des raidisseurs. Il en découle donc une « *section résistante en flexion* » telle que celle représentée sur la figure 36 *b*. C'est en partant de cette section résistante que l'on doit calculer les *caractéristiques de résistance en flexion* de la section droite considérée (position de G, moment d'inertie I_y, moments statiques W, etc...).

Mais, en fait, la détermination exacte de z_0 conduirait à des calculs fort laborieux. Nous savons, en effet, que la grandeur des largeurs équivalentes dépend du taux de contrainte supporté par chaque lisse et que ce taux de contrainte dépend lui-même des caractéristiques de résistance de la section. Il faudrait donc procéder à des *approximations successives*, ces approximations n'étant valables que pour le seul *cas de charge étudié* (valeurs particulières de T et de M). Si l'on remarque, au surplus, que la superposition de la flexion horizontale et de la torsion modifierait encore tout le problème, on voit qu'un calcul « exact » serait, pratiquement, inextricable.

On est donc obligé d'avoir recours à des *méthodes* plus ou moins *approchées* dont nous proposons deux exemples ci-après.

6.22 Première méthode (méthode simple défavorable).

6.221 *Principe.* — On suppose que *l'instabilité* s'étend à la *totalité* des panneaux composant le contour des sections droites. On admet, au surplus, que les *largeurs équivalentes* 2*c* de revêtement, intéressées au niveau de chaque lisse, sont égales pour toutes les lisses de la section, en adoptant la valeur qui correspond à la lisse la plus comprimée. On calculera donc, en pratique, la largeur 2*c* en partant de la contrainte maximum admissible en compression des lisses (limitée par le flambage local et le flambage général entre couples, voir ci-dessus paragraphe 5.22).

Compte tenu de l'ordre de grandeur des contraintes admissibles usuelles qui sont ordinairement comprises entre 22 et 28 kg/mm² pour les lisses en AU4G, on adoptera donc, pour ces parois, d'après la formule simplifiée de Karman (chap. XIX, § **2.462**) :

$$30\,e < 2\,c < 35\,e$$

(e étant l'épaisseur de la tôle de revêtement).

On détermine ainsi la « *section résistante* » de chaque lisse plus tôle intéressée d'où la position de G, les moments d'inertie I_y et I_z et les moments statiques W_y et W_z (voir disposition pratique des calculs dans les applications numériques données ci-après au paragraphe **7.**).

6.222 *Critique de la méthode.* — Cette méthode de calcul simple est donc essentiellement *défavorable* pour le calcul en flexion.

Remarquons, cependant, que le fait de négliger les tôles intermédiaires tendues conduit à un déplacement du centre de gravité vers les parties comprimées, d'où à une diminution des cotes z des lisses correspondantes, en flexion verticale. Les contraintes normales de flexion étant proportionnelles aux termes $\left(\frac{z}{I}\right)$ relatifs à chaque lisse, la méthode ci-dessus conduira donc à des résultats plus voisins de la réalité pour les lisses comprimées que pour les lisses tendues. Or, en fait, ce sont les parois comprimées qui déterminent l'échantillonnage de la coque.

On utilisera donc, en pratique, la méthode ci-dessus pour effectuer un *premier dimensionnement de la coque*.

Notons que cette méthode présente pour avantage essentiel celui de *conserver les mêmes sections travaillantes, quel que soit le sens de flexion*

envisagé (flexions verticales positive ou négative ou flexion horizontale). La superposition des contraintes dans les différents cas de charge est donc très aisée.

6.23 Deuxième méthode (méthode défavorable plus approchée que la première).

6.231 *Principe.* — En *flexion verticale*, qui conduit généralement aux contraintes normales prédominantes, on délimite, forfaitairement, une « *zone instable* ». Cette délimitation peut se faire en adoptant par exemple pour z_0 (fig. 36 *b*) la moitié du z maximum des parties tendues [1].

On peut également admettre que les largeurs équivalentes de revêtement dans cette zone instable, sont toutes égales, comme dans la méthode 1 (procédé défavorable). On détermine ainsi la nouvelle position de G*y* et les caractéristiques de résistance correspondantes. On vérifiera toujours que les contraintes supportées par le premier panneau de la zone stable sont telles qu'elles n'engendrent pas de plissement (combinaison traction + cisaillement : abaque **Planche 42**).

On est ainsi assuré de s'être placé dans un cas désavantageux, quoique plus voisin de la réalité que dans la méthode 1.

En *flexion horizontale*, on peut utiliser une méthode analogue mais on perd ainsi tous les avantages dus à la *symétrie* de la section (l'axe neutre se décale vers les parties tendues).

En fait, il est souvent suffisant de conserver la méthode 1 (axe neutre confondu avec l'axe de symétrie) pour ce sens de flexion.

6.232 *Critique de la méthode.* — Cette méthode est moins rapide que la précédente, mais elle conduit à un dimensionnement plus raisonnable des parois de la coque, surtout si les lisses sont très espacées ($d > 100\ e$, par exemple).

Pour des *sections quelconques* (un seul axe de symétrie) elle conduit à déterminer des caractéristiques de résistance différentes en flexions verticales positive et négative.

Par contre, elle s'applique d'une manière particulièrement simple aux *sections bi-symétriques* et notamment aux *sections circulaires*.

Nous effectuerons au paragraphe **7.1** ci-après une *comparaison* entre les résultats numériques obtenus par l'une et l'autre méthode.

6.3 DÉTERMINATION DES EFFORTS GÉNÉRAUX APPLIQUÉS AUX SECTIONS DROITES.

6.31 Axe de référence. — Les fuselages-coques comprenant, principalement, des sections fermées il n'est pratiquement pas nécessaire de déterminer leur *axe élastique*, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus, paragraphe **4.2**.

On choisit donc pour *axe de référence* des efforts, un *axe longitudinal arbitraire*, situé dans le plan de symétrie du fuselage et perpendiculaire au plan des couples [2].

On déterminera, cependant, les centres de cisaillement C_c des *sections ouvertes* quand le fuselage considéré comporte des ouvertures importantes, en vue du calcul en torsion-flexion de ces parties ouvertes, (§ **4.1**).

---

1. — On prendra, plus exactement, la cote z de la lisse la plus voisine de cette limite arbitraire z_0 (comptée à partir de l'axe neutre correspondant à la méthode 1 ci-dessus).

2. — On aura, cependant, avantage à choisir cet axe de telle façon qu'il rencontre les sections droites en des points O peu éloignés de leurs centres de gravité G.

6.32 Notations. — Nous désignerons, au niveau d'une *section droite* considérée S, dont le *centre de référence* est O (fig. 37), par :

T_z l'effort tranchant total appliqué suivant G*z* ;

M_y le moment fléchissant correspondant (flexion verticale) ;

T_y l'effort tranchant total appliqué suivant GY ;

M_z le moment fléchissant correspondant (flexion horizontale) ;

M'_t le moment de transport des efforts par rapport à O (vecteur normal au plan de la section) ;

N l'effort normal (positif en compression) appliqué en O suivant l'axe longitudinal OX.

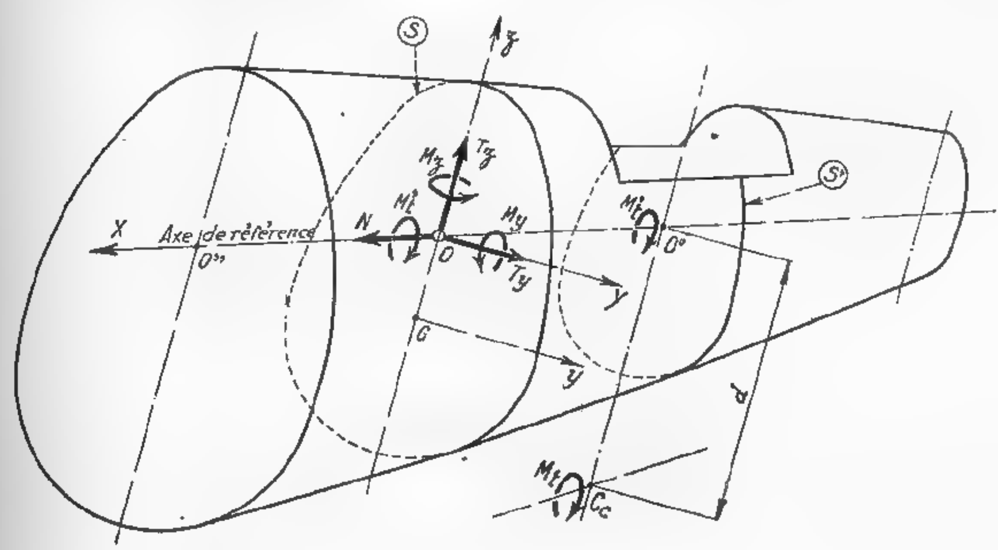


FIG. 37.

Si la coque possède des parties ouvertes importantes, on déterminera de plus, pour les sections comprises dans ces parties, les *moments de torsion réels* M_t appliqués à ces sections. Ces moments, évalués par rapport à la droite joignant leurs centres de cisaillement C_c, ont pour expression :

$$M_t = M'_t + T_y\, d$$

en désignant par *d* la distance $O'C_c$ (section S', fig. 37).

6.33 Efforts tranchants réduits. — Le galbe longitudinal des fuselages-coques entraîne une *convergence* des lisses. Cette convergence donne lieu à une participation directe de ces lisses à la transmission des efforts tranchants, au même titre que les semelles d'une poutre à âmes minces.

En effet, plaçons-nous dans le cas de la *flexion verticale* du tronçon de fuselage représenté figure 38 *a*. Le moment M_y, agissant au droit de la section S, engendre au niveau d'une lisse P de section ΔS (compte tenu de la tôle intéressée), une *composante de flexion*

$$F = \frac{M_y}{I_y}\, z \Delta S.$$

Désignons par α l'angle que fait dans une projection verticale du fuselage (fig. 38 *a*), la tangente en P à la lisse considérée avec l'axe longitudinal. La composante F donne dans cette vue [1] :

— suivant la direction projetée de la lisse : $F_1 = \dfrac{F}{\cos \alpha}$

— suivant le plan de la section : $F_2 = F \operatorname{tg} \alpha$.

1. — La décomposition complète de F devrait s'opérer dans l'espace en tenant compte de l'obliquité transversale des lisses (vue en plan). La décomposition indiquée suffit pour faire apparaître le résultat cherché.

Comme pour les poutres courantes, on assimile toujours F_1 à F (ce qui est d'autant plus justiciable que les sections ΔS utilisées pour le calcul des contraintes normales sont des sections droites de chaque lisse).

L'ensemble des efforts verticaux F_2 dus à toutes les lisses de la section donne un *effort tranchant correcteur* (ou *réducteur*)

$$T''_z = \Sigma \text{ F tg } \alpha.$$

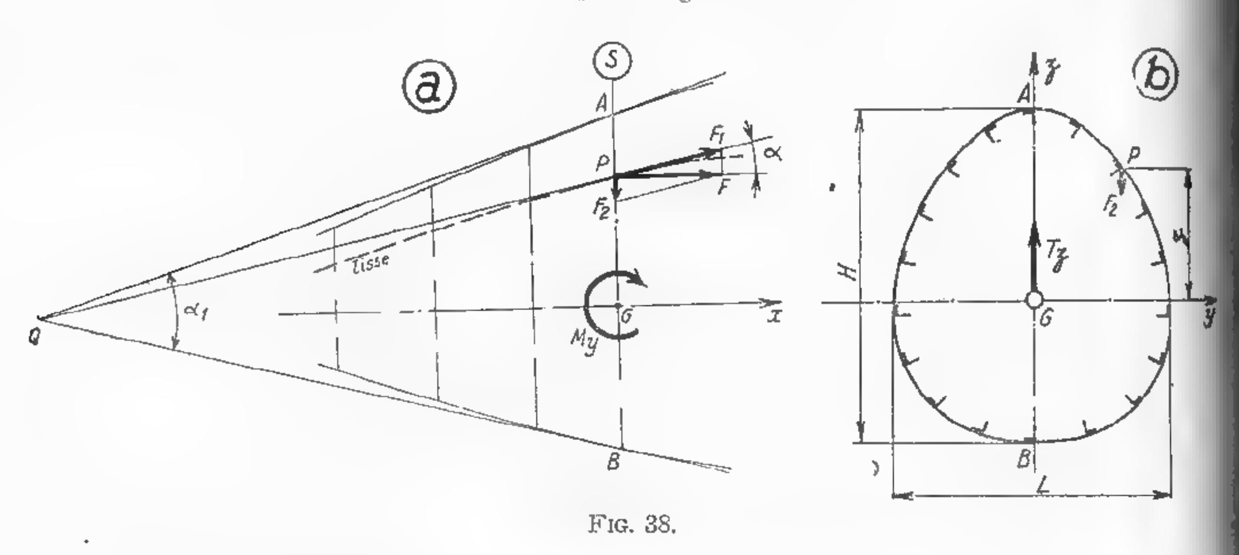


Fig. 38.

Si les lisses sont *d'orientations quelconques*, cet effort doit se déterminer, pour chaque section, compte tenu des pentes de chaque lisse.

Mais, en pratique, la disposition des lisses sur le pourtour des diverses sections droites affecte, généralement, une allure sensiblement *homothétique*. Le foyer de cette homothétie, en projection verticale, se trouve au point de rencontre Q des tangentes menées en A et B au contour extérieur du fuselage. En désignant par α_1 l'angle formé par ces tangentes on a très sensiblement, pour chaque lisse,

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha_1 \frac{z}{\text{H}}$$

avec H = hauteur totale de la section considérée, d'où

$$T''_z = \frac{M_y}{\text{H } I_y} \text{ tg } \alpha_1 \; \Sigma z^2 \Delta S$$

Or,

$$\Sigma z^2 \Delta S = I_y.$$

On obtient donc une expression simple de *l'effort tranchant correcteur en flexion verticale :*

$$\boxed{T''_z = \frac{M_y}{\text{H}} \text{ tg } \alpha_1.}$$

L'effort tranchant corrigé, ou *effort tranchant réduit vertical,* restant à transmettre par cisaillement des parois est donc :

$$\boxed{T'_z = T_z - T''_z.}$$

On calcule de même *l'effort tranchant réduit horizontal* T'_y, en considérant la largeur totale L de la section et l'angle β_1 formé, dans une vue en

plan; par les tangentes au contour qui correspondent à la section considérée:

$$\boxed{T''_y = \frac{M_z}{L} \operatorname{tg} \beta_z \qquad \text{et} \qquad T'_y = T_y - T''_y.}$$

Remarques. — *a*) Au point de vue de cette correction d'effort tranchant, une coque s'assimile donc à une poutre dont les semelles seraient concentrées aux fibres extrêmes (et non aux fibres moyennes équivalentes).

b) Les mêmes remarques que celles indiquées au chapitre IX (§ 3.85) sont valables pour les sens respectifs de T, T' et T'' liés à ceux de M et de T.

c) Cette méthode de correction des efforts tranchants est également applicable aux sections ouvertes.

6.4 DÉTERMINATION DES CONTRAINTES DES PAROIS (OU CALCUL DES SECTIONS).

6.40 Remarques préliminaires. — Nous nous plaçons ci-après dans le cas général d'une coque multi-lisses présentant des sections droites symétriques, mais de formes quelconques et dont les lisses possèdent des sections ΔS et sont disposées à des intervalles Δl quelconques [1].

Le calcul des contraintes des *parois*, c'est-à-dire des *lisses* et du *revêtement*, s'effectue au niveau de quelques *sections droites caractéristiques* du fuselage pour lesquelles on a déterminé les caractéristiques de résistance (§ **6.2**) et les efforts généraux (§ **6.3**) qui correspondent au cas de calcul prédominant pour chacune d'elles.

Nous distinguerons deux catégories de contraintes :

a) les *contraintes dues aux efforts généraux* mentionnés ci-dessus ;

b) les *contraintes supplémentaires* dues à l'instabilité des parois de revêtement.

Il est généralement impossible de connaître, à priori, l'emplacement des contraintes normales ou tangentielles maxima sur le contour d'une même section droite. Aussi, est-on conduit, en pratique, à déterminer les contraintes partielles de nombreux éléments (lisses ou panneaux de revêtement) de chaque section droite considérée [2].

Notons, toutefois, que la *symétrie* de la structure permet toujours de ne considérer que des demi sections, sous réserve seulement d'affecter d'un double signe ($\pm$) les contraintes provenant des efforts engendrant des distributions de charges antisymétriques (flexion horizontale et torsion).

Les applications numériques effectuées au paragraphe **7.** montreront la *disposition pratique* des différents calculs mentionnés ci-après.

6.41 Contraintes dues aux efforts généraux.

6.411 *Généralités et conventions de signes.* — La détermination de ces contraintes constitue une application directe des théories exposées aux paragraphes **2.** à **4.** ci-dessus.

Nous ne mentionnerons donc que les formules finales en tenant compte des notations et sens positifs des charges adoptés au paragraphe **6.32**. Nous considérerons les demi-sections situées à gauche de l'axe de symétrie (dans une vue de l'arrière) et nous adopterons pour sens positifs :

contraintes normales : + = compression ;
flux de cisaillement positifs dans le sens des aiguilles d'une montre (pour la demi section considérée et sens inverse sur l'autre).

---

1. — Nous étudierons ci-après (§ **8.**) le cas particulier de sections circulaires avec lisses de sections égales et disposées à intervalles égaux.

2. — Pour de petits fuselages comprenant une dizaine de lisses par demi-section, on doit, en pratique, étudier chaque lisse et chaque panneau. Pour des fuselages plus importants on étudiera, par exemple, un panneau sur deux ou trois.

6.412 *Contraintes normales dues à* M_y et M_z. — Que les sections soient ouvertes ou fermées, l'on obtient, pour une *lisse* considérée (avec revêtement intéressé) :

Flexion verticale :

$$n_1 = \frac{M_y}{I_y} z.$$

Flexion horizontale :

$$n_2 = \frac{M_z}{I_z} y.$$

6.413 *Flux de cisaillement dus à* T'_z et T'_y. — On obtient pour un *panneau* considéré (intervalle Δl entre lisses) :

a) *Sections fermées* (fig. 39 *a*).

— Flexion verticale (§ 2.332) :

$$\tau_1 = \frac{T'_z}{I_y} W_y$$

avec W_y = somme des moments statiques, par rapport à Gy, des « sections travaillantes » ΔS comprises entre A et le panneau considéré [1].

— Flexion horizontale (§ 4.2) :

$$\tau_2 = \frac{T_y}{I_z} W_z - \frac{\mu}{2\Omega}$$

en choisissant A comme point se départ du flux arbitraire et en posant W_z = somme des moments statiques par rapport à G_z des sections travaillantes ΔS comprises entre A et le panneau considéré et μ = moment par rapport à O du flux arbitraire (supposé nul en A).

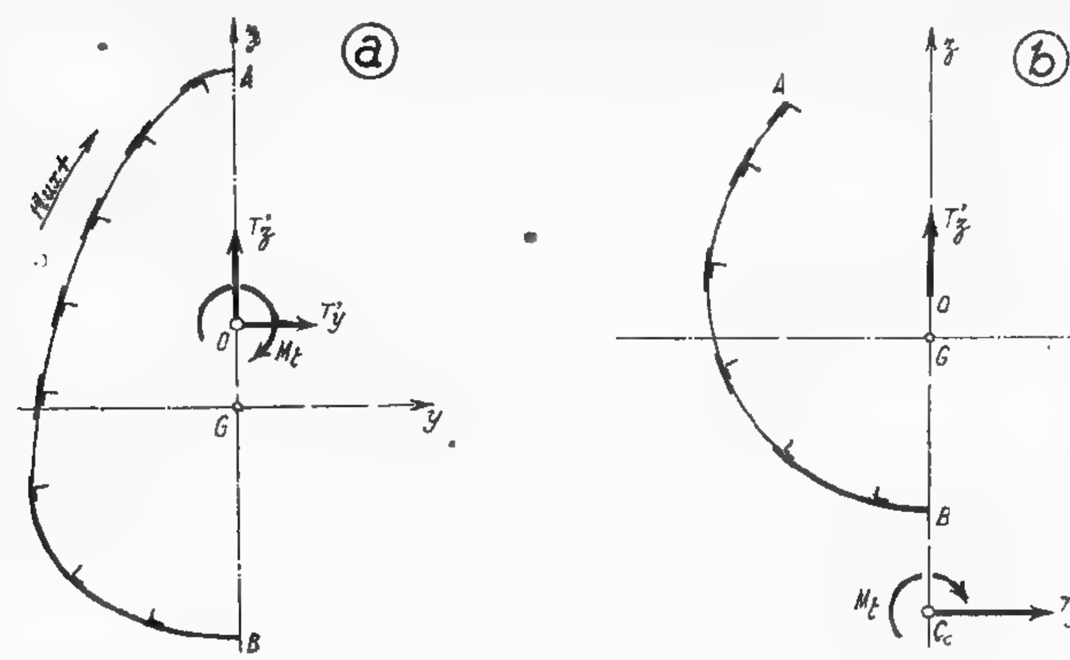


FIG. 39.

b) *Sections ouvertes* (fig. 39 *b*).

Flexion verticale :

$$\tau'_1 = \frac{T'_z}{I_y} W_y$$

1. — Si le point A (axe de symétrie) correspond à l'axe d'une lisse, compter la demi-section $\left(\frac{\Delta S}{2}\right)$ de cet élément travaillant.

Flexion horizontale :

$$\tau'_2 = \frac{T_y'}{I_z} W_z$$

(mêmes notations que ci-dessus).

6.414 *Flux de cisaillement du à* M'_t *(sections fermées)* :

$$\tau_3 = \frac{M'_t}{2\Omega} = \text{constante} \qquad (\S\ 3.1)$$

6.415 *Flux et contraintes dus à* M_t *(sections ouvertes).* — Les parties ouvertes, soumises à M_t (autour de C_c), peuvent se calculer en *torsion-flexion* selon la méthode exposée au paragraphe **4.1**. Si M_t varie le long d'une même ouverture, on adoptera sa valeur moyenne dans cet intervalle. On devra également adopter une section moyenne, si les sections droites du fuselage varient dans la partie ouverte.

Rappelons que pour un *panneau* bordé par une lisse P (côté bord libre A) on trouve un *flux de cisaillement*

$$\tau'_3 = \frac{M_t}{C} \sum_A^P u \, \Delta S$$

et pour une *lisse*, appartenant à une section droite située à une distance x de la « section libre » de la partie ouverte, une *contrainte normale*

$$n'_3 = \frac{M_t}{C} u\, x.$$

(Voir définition de u et de C au paragraphe **4.12**).

6.416 *Contraintes dues à* N. — Ces contraintes étant généralement peu importantes, et le centre de référence O étant choisi près du centre de gravité G (note [1], § **6.31**), on peut admettre que N engendre un état de compression (ou de traction) pure de l'ensemble des éléments résistants constituant la section.

On obtient donc une *contrainte normale uniforme* de ces éléments de section totale S :

$$n_4 = \frac{N}{S}.$$

6.417 *Contraintes générales résultantes.* — Les doubles signes indiqués ci-après permettent d'effectuer la combinaison des contraintes sur le côté gauche (signes supérieurs) et sur le côté droit (signes inférieurs).

a) Contrainte normale résultante d'une lisse :

$n = n_1 \pm n_2 + n_4$ (sections fermées),
$n' = n'_1 \pm n'_2 \pm n'_3 + n_4$ (sections ouvertes).

b) Flux de cisaillement résultant sur un panneau de revêtement :

$\tau = \tau_1 \pm \tau_2 \pm \tau_3$ (sections fermées),
$\tau' = \tau'_1 \pm \tau'_2 \pm \tau'_3$ (sections ouvertes).

c) Contrainte de cisaillement correspondante du revêtement d'épaisseur e :

$$t = \frac{\tau}{e} \qquad \text{ou} \qquad t' = \frac{\tau'}{e}.$$

6.42 Contraintes supplémentaires dues au plissement des parois de revêtement.

6.421 *Position du problème.* — Nous avons vu ci-dessus, au paragraphe **6.21**, que l'instabilité des parois de revêtement résultait d'une combinaison d'efforts normaux et de cisaillements. Ce phénomène se caractérise donc par l'apparition,

dans les panneaux instables, de *plissements obliques*, ou *« champs de traction diagonale »* chap. XIX, §§ **4.** et **5.**

Nous savons que ces plissements obliques donnent naissance à des *« sollicitations complémentaires »* appliquées aux éléments de bordure des panneaux. Ce sont ces sollicitations qui engendrent les *contraintes supplémentaires* des parois, étudiées ci-dessous. Leur influence sur les éléments transversaux, ou couples, sera étudiée au paragraphe suivant.

6.422 *Hypothèses simplificatrices.* — Nous avons vu au chapitre XIX, paragraphe **5.4**, que le phénomène de plissement engendré dans une plaque mince, par une *combinaison* de sollicitations normales et tangentielles, présentait une allure complexe. Il est, en effet, assez délicat de déterminer leurs contraintes critiques et surtout de définir *l'angle d'orientation moyenne* β des vagues de plissement, pour chaque panneau d'une coque. Cet angle se trouve en pratique, influencé par les rigidités locales des parois et par les actions mutuelles des différents panneaux entre eux. Aussi se contente-t-on souvent d'effectuer le calcul d'une façon approchée que nous proposons ci-après :

Nous supposerons que les « sollicitations complémentaires » des bordures ne se manifestent que pour les panneaux instabilisés par le cisaillement supposé isolé, et nous adopterons, pour ces panneaux, l'angle unique d'orientation des plis : $\beta = 45°$. Nous devrons donc, pour déterminer quels sont les panneaux à étudier, comparer les contraintes t ou t' définies ci-dessus, paragraphe **6.417**, aux *contraintes critiques de cisaillement pur* t_0 de chaque panneau. Ces contraintes critiques t_0 seront déterminées selon les méthodes exposées au chapitre XIX, paragraphe **4.4**. Notons que l'on ne peut, généralement, pas négliger l'influence du rayon de courbure R des panneaux. On utilisera donc, en pratique, la formule donnée au chapitre XIX, paragraphe **4.422**. Les contraintes t'_0 rentrant dans cette formule pourront être déterminées à l'aide de l'abaque n° 2, **Planche 40** (voir application numérique, § **7.1** ci-après).

Remarque. — Pour les panneaux comprimés (contrainte n ou n' positives de leurs lisses de bordure), les contraintes critiques t_0, ainsi déterminées, sont supérieures à leurs contraintes critiques réelles provenant de la combinaison compression + cisaillement. Comme ces contraintes critiques entrent en déduction des contraintes générales t dans les expressions ci-après, il apparaît que la méthode ci-dessus conduit à des résultats avantageux. Il convient cependant de signaler que ces formules théoriques sont établies sans tenir compte de facteurs généralement inaccessibles aux calculs, tels que les rigidités propres des tôles et des éléments de bordure. Ces formules sont donc *défavorables*, aussi la méthode adoptée s'éloigne-t-elle peu, en pratique, de la réalité et elle présente un avantage de simplicité.

6.423 *Vérification des tôles de revêtement en traction diagonale.* — On vérifiera la *résistance en traction diagonale* des parois de revêtement instables, en utilisant la méthode exposée au chapitre XIX, paragraphe **6.3**, dans le cas d'une âme mince de longeron.

Rappelons qu'en désignant par P le pas des rivetages de bordure des panneaux et par d le diamètre des rivets, la condition de résistance s'exprime par :

$$2t - t_0 \leqslant n_a\left(1 - \frac{d\sqrt{2}}{\mathrm{P}}\right).$$

On se réservera, en fait, une certaine marge de sécurité pour tenir compte des considérations exposées dans la remarque insérée à la suite de l'établissement de cette formule.

6.424 *Sollicitations supplémentaires appliquées aux bordures.* — Considérons le panneau plissé ABCD (panneau 1) représenté figure 40. Ce panneau est limité par deux lisses consécutives AB et CD distantes de Δl

et par deux couples AC et BD distants de ΔL. Soit τ_1 le flux de cisaillement résultant appliqué à ce panneau et τ_{01} le *flux critique* qui correspond à sa contrainte critique t_{01} :

$$\tau_{01} = t_{01} \cdot e_1$$

(avec e_1=épaisseur du revêtement considéré).

D'après ce que nous avons vu au chapitre XIX, paragraphe 4.53, les éléments de bordure sont sollicités, selon figure 40, par des *forces réparties* dont l'intensité par unité de longueur est :

$$f_1 = \tau_1 - \tau_{01} = \Delta\tau_1 \qquad \text{(angle des plis : } \beta = 45°\text{).}$$

Les panneaux voisins, s'ils sont également plissés, sont soumis à des systèmes de charges analogues f_2, f_3, f_4... égales aux différences entre leurs flux réels et critiques : $\Delta\tau_2$, $\Delta\tau_3$, $\Delta\tau_4$...

L'ensemble de ces forces engendre une *compression* et une *flexion* supplémentaires des lisses que nous étudions successivement ci-dessous, en nous plaçant pour les notations, dans le cas de la lisse AB.

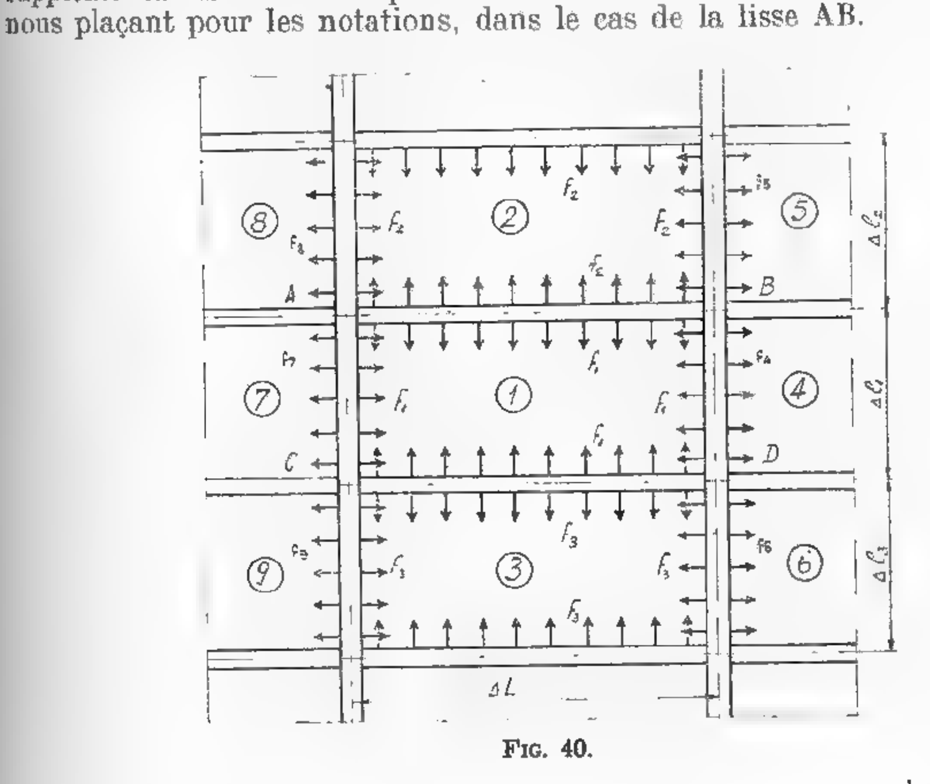


Fig. 40.

6.425 *Contraintes de compression supplémentaires.* — Si les couples AC et BD étaient les « *couples terminaux* » de la structure, la figure 40 montrerait clairement l'existence d'une *compression supplémentaire des lisses*. Elles encaisseraient les réactions d'appui des couples sollicités l'un vers l'autre par les forces f_1, f_2, f_3 (phénomène analogue à la compression supplémentaire des semelles d'un longeron, chapitre XIX, paragraphe **6.52**). On trouverait, immédiatement, pour la lisse AB, une force C_s, sensiblement égale à

$$C_s = f_1 \frac{\Delta l_1}{2} + f_2 \frac{\Delta l_2}{2} .$$

Or, en fait, le phénomène est identique dans le cas d'un *panneau intermédiaire*. En effet, aux compressions résultant des différences $(f_1 - f_4)$, $(f_1 - f_7)$, etc... (fig. 40), s'ajoutent celles provenant des actions opposées sur les couples extrêmes qui se transmettent à travers toute la structure.

L'expression ci-dessus est donc générale, même pour les coques gal

bées, à condition de prendre pour hauteurs Δl_1 et Δl_2 des panneaux (trapézoïdaux) leurs hauteurs moyennes.

La compression C_s donne lieu à une *contrainte de compression supplémentaire* n_{s1} de la lisse considérée :

$$n_{s1} = \frac{C_s}{\Delta S}$$

soit :

$$\boxed{n_{s1} = \frac{\Delta\tau_m \cdot \Delta l_m}{\Delta S}}$$

en désignant par ΔS la section de la lisse (y compris la tôle de revêtement intéressée), $\Delta\tau_m$ la moyenne des flux supplémentaires des panneaux adjacents et Δl_m la moyenne des cordes de ces panneaux.

6.426 *Contraintes de flexion supplémentaires.*

a) Parois planes. — Supposons que les panneaux 1 et 2 qui intéressent la lisse AB (fig. 40) soient situés dans un même plan (plan de la figure). Cette lisse est alors soumise à une charge répartie ayant pour valeur, par unité de longueur :

$$p = f_1 - f_2.$$

Cette charge engendre un flexion de la lisse dans le plan du panneau. En assimilant cette lisse à une poutre continue sur appuis multiples, fournis par les couples, on trouve un moment fléchissant maximum, au niveau des couples (chap. XVIII, §4.44)

$$m = p\,\frac{\Delta L^2}{12}.$$

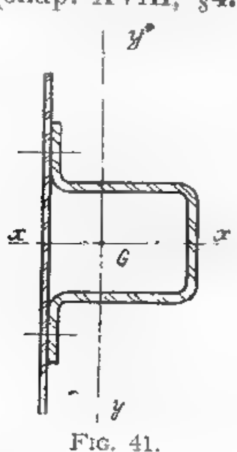


Fig. 41.

D'où une contrainte maximum de flexion supplémentaire

$$n_{s2} = \frac{m}{\left(\frac{i}{v}\right)_{xx'}},$$

avec $\left(\frac{i}{v}\right)_{xx'}$ = module d'inertie de la lisse (+ tôle intéressée) autour de l'axe xx' normal au revêtement (fig. 41).

Notons que les charges p qui ne proviennent que de la différence entre les flux de cisaillement existant dans deux panneaux voisins sont généralement peu élevées. Les contraintes n_{s2} sont donc, le plus souvent, négligeables dans le cas des parois planes.

b) Parois galbées. — Dans le cas, plus fréquent, d'une paroi galbée, les forces f_1 et f_2 agissant de part et d'autre de la lisse considérée, se *composent* suivant les indications de la figure 42 *a* [1] en donnant une résultante φ par unité de longueur. Si l'angle $\Delta\gamma$ formé par les cordes des panneaux est relativement important et si les forces f_1 et f_2 ne sont pas très différentes, on peut admettre que cette résultante est orientée normalement à la paroi.

On trouve alors comme expression pour cette résultante :

$$\varphi = (f_1 + f_2)\,\sin\frac{\Delta\gamma}{2}.$$

1. — On peut admettre que f_1 et f_2 sont orientées suivant les cordes de chaque panneau plissé.

soit :

$$\boxed{\varphi = 2\Delta_{\prime m} \sin \frac{\Delta\gamma}{2}}$$ (notations ci-dessus).

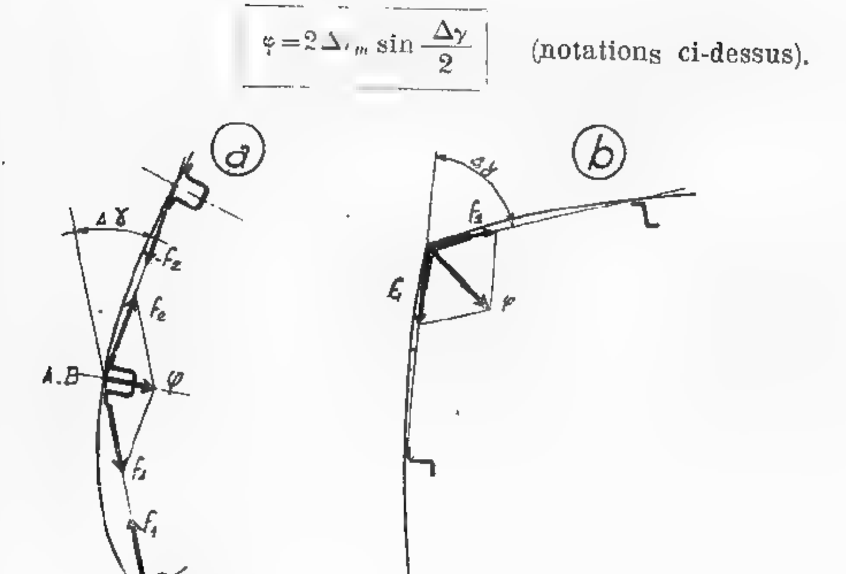


Fig. 42.

Notons que, dans le cas de *coques anguleuses*, telles que celle représentée sur la figure 42 *b*, la force φ s'exerçant sur la lisse située à l'angle devient importante. C'est une des raisons pour lesquelles on utilise alors des *profilés d'angle* possédant une forte inertie pour réaliser ces lisses.

Les forces réparties φ donnent lieu à des *moments fléchissants* :

$m_1 = \varphi \frac{\Delta L^2}{12}$ au niveau des couples,

$m_2 = -\varphi \frac{\Delta L^2}{24}$ au milieu des intervalles entre couples,

d'où les *contraintes supplémentaires* (fig. 41)

$$n_{s_2} = \frac{m_1}{\left(\frac{I}{v}\right)_{yy}} \quad \text{(compression côté revêtement)}$$

ou

$$n_{s_2} = \frac{m_2}{\left(\frac{I}{v}\right)_{yy'}} \quad \text{(compression côté intérieur).}$$

6.43 Contraintes résultantes des parois. — Les *lisses* sont soumises à des *contraintes normales résultantes maxima* obtenues en superposant leurs contraintes générales n ou n' aux contraintes supplémentaires ci-dessus :

$$n_r = n + n_{s_1} + n_{s_2}$$

ou

$$n'_r = n' + n_{s_1} + n_{s_2}.$$

Ces contraintes sont limitées supérieurement :

— En *compression* : par les contraintes admissibles au flambage général entre couples (compte tenu du flambage local et de l'action de la flexion supplémentaire) ;

— En *traction :* par la contrainte n_a du matériau diminuée de l'affaiblissement des parois dû aux trous de rivets ou points de soudure [1].

Remarque. — Il convient de remarquer que les valeurs maxima des contraintes générales et des contraintes supplémentaires ne coïncident généralement pas. Ces contraintes supplémentaires sont, en effet, tributaires des flux de cisaillement. Or, on sait que les flux de flexion pure sont nuls au niveau des contraintes normales maxima et vice-versa au niveau de l'axe neutre. Comme les flux de torsion sont, généralement, faibles, il arrive fréquemment que les contraintes supplémentaires n'aient aucune influence pratique sur le dimensionnement des parois [2].

C'est pourquoi on pourra, en principe, effectuer les premiers calculs, destinés à définir ce dimensionnement, en négligeant les contraintes supplémentaires.

L'application numérique effectuée au paragraphe 7.1 concrétisera ces remarques.

6.5 CALCUL DES COUPLES.

6.50 **Remarque préliminaire.** — Nous nous bornerons, ci-dessous, à définir les *états d'équilibres extérieurs des éléments transversaux* (cadres ou couples) des fuselages-coques multi-lisses et à exposer leurs *principes généraux de calcul.*

Les applications numériques effectuées aux paragraphes 7.3 et 7.4 montreront la *disposition pratique* de ces calculs èt, en particulier, les *méthodes graphiques* qui permettent une solution aisée de ces problèmes.

Pour étudier les « *états d'équilibre* » des couples, c'est-à-dire pour définir les *sollicitations* qu'ils reçoivent, nous aurons à discriminer trois catégories de couples : les « *couples courants* », les « *couples d'introduction de charges* » et les « *couples situés à des changements de forme des structures* ». Cette discrimination ne tiendra aucunement compte de la réalisation interne de ces éléments.

Les *principes généraux de calcul* des couples, c'est-à-dire ceux guidant le calcul de leurs contraintes sont, par contre, essentiellement influencés par leur réalisation interne. C'est ainsi que nous aurons à distinguer les couples ouverts des couples fermés.

6.51 Equilibre des couples courants.

6.511 *Définition.* — Un couple courant est un couple non sollicité par une force concentrée importante et non situé à un changement de forme brutal de la structure auquel il appartient. Nous exposons, ci-dessous, deux types de sollicitations distinctes permettant le calcul des couples courants.

6.512 *Sollicitations provenant de la flexion générale dans une coque galbée.* — Considérons la coque multi-lisses de forme galbée, représentée figure 43 *a* qui est soumise, par exemple, à une *flexion verticale* de moment M_y. Remplaçons le galbe progressif des parois par une succession de brisures au niveau de chaque couple courant, tel que A_1B_1, A_2B_2... Le tronçon de lisse P_1P_2 est soumis en P_2 à un effort F orienté suivant sa direction et ayant, sensiblement, pour valeur :

$$F = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \, \Delta S.$$

Par suite de l'angle de brisure formé par les tronçons P_1P_2 et P_2P_3, on obtient en P_2 une *force f, dirigée perpendiculairement à la paroi* en ce point (force radiale, fig. 43 *b*) et dont la *projection verticale* a pour valeur :

$$f_z = F \ \mathrm{tg} \ \Delta\alpha$$

en désignant par $\Delta\alpha$ l'angle de brisure de la lisse *mesuré en projection verticale.* Nous donnons la décomposition de forces analogue pour une lisse P′ située dans la partie tendue.

On voit que les *composantes horizontales* telles que f_y ou f'_y s'équili-

1. — Cet affaiblissement est en général de l'ordre de 10 à 15 %.

2. — Elles conditionnent, par contre, fréquemment, l'écartement entre couples.

brent avec celles qui s'exercent sur les lisses symétriques. Cet équilibre engendre un *travail interne* du couple, mais ne demande *aucune réaction extérieure.*

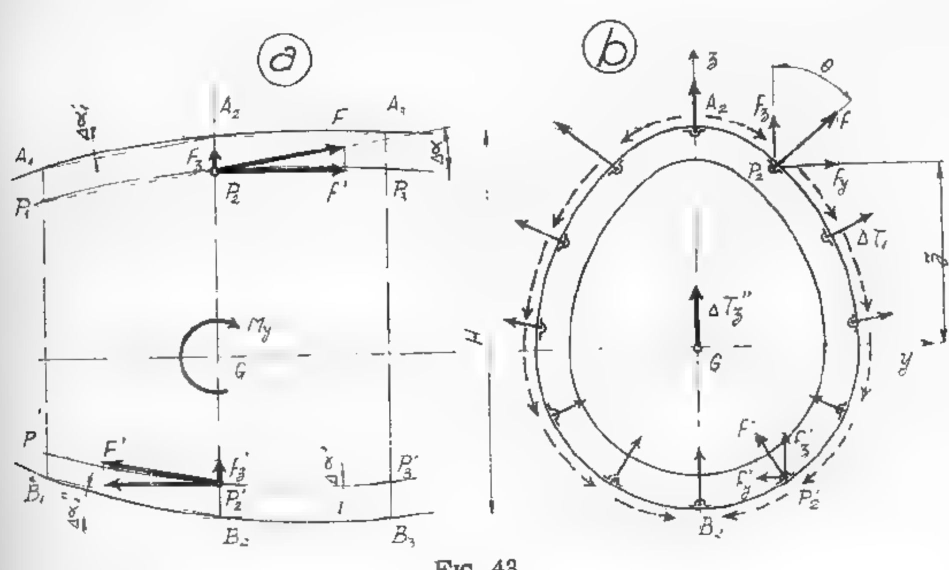


FIG. 43.

Par contre, les *composantes verticales,* telles que f_z ou f'_z s'ajoutent entre elles et donnent lieu à une *introduction d'effort tranchant vertical dans la coque :*

$$\Delta T''_z = \Sigma\ f_z = \frac{M_y}{I_y}\ \Sigma\ z\ \Delta S\ \text{tg}\ \Delta\alpha_z$$

Il est aisé de constater que cette introduction d'effort correspond exactement à la *différence entre les efforts tranchants correcteurs* T''_z existant de part et d'autre du couple A_2B_2 (voir § **6.33**).

En d'autres termes, *le couple « restitue » au revêtement une part d'effort tranchant correcteur* (ou réducteur) *que les lisses ne peuvent plus transmettre avec leurs nouveaux angles de convergence.* Il en découle un *accroissement* $\Delta\tau_1$ *du flux de cisaillement de flexion verticale* appliqué aux parois, dont la répartition est régie par les mêmes principes que celle du flux τ_1, soit (voir § **6.413**) :

$$\Delta\tau_1 = \frac{\Delta T''_z}{I_y} W_y.$$

Le couple est donc soumis à des *réactions tangentielles* égales et opposées aux forces correspondant à $\Delta\tau_1$.

L'ensemble des forces radiales f (ou de leurs composantes f_z et f_y) et des réactions tangentielles forme un *système en équilibre extérieur* (fig. 43 *b*). On calcule le couple sous l'action de ce système (voir Application numérique, § **7.4**).

Calcul pratique des sollicitations. — Si la coque présente une *allure sensiblement homothétique*, on peut admettre, d'une façon analogue à ce que nous avons exposé pour le calcul de l'effort tranchant réduit (§ **6.33**), que l'on a la relation :

$$\text{tg}\ \Delta\alpha = \text{tg}\ \Delta\alpha_1 \cdot \frac{z}{H}.$$

en désignant par $\Delta\alpha_1$ *l'angle total de brisure en projection verticale* de la coque, au niveau du couple considéré de hauteur H :

$$(\Delta\alpha_1 = \Delta\alpha'_1 + \Delta\alpha'', \text{ sur la figure 43 } a).$$

On obtient alors, pour une lisse de cote z, une *composante verticale* :

$$f_z = \frac{M_y}{H} \frac{\operatorname{tg} \Delta\alpha_1}{I_y} z^2 \Delta S$$

et une *composante horizontale* :

$$f_y = f_z \operatorname{tg} \theta$$

en désignant par θ l'angle formé par la normale à la paroi au point considéré avec l'axe de symétrie vertical Gz (fig. 43 *b*) [1]. L'*introduction d'effort tranchant* $\Delta T''_z$ a pour expression :

$$\Delta T''_z = \Sigma\ f_z = \frac{M_y}{H} \frac{\operatorname{tg} \Delta\alpha_1}{I_y} \sum z^2\ \Delta S$$

soit :

$$\Delta T''_z = \frac{M_y}{H} \operatorname{tg}\ \Delta\alpha_1.$$

Remarques. — *a*) En flexion horizontale, il se produit un phénomène analogue. On envisagera alors les angles de brisure $\Delta\beta$ de chaque lisse, ou l'angle total de brisure $\Delta\beta_1$ de la coque, ces angles étant évalués dans une *projection horizontale* (vue en plan).

b) Nous avons représenté, sur la figure 43, un couple fermé, mais les mêmes considérations s'appliquent aux *couples ouverts*.

c) Ces sollicitations sont indépendantes du mode de travail du revêtement (stable ou instable).

d) Ces sollicitations n'atteignent une importance notable que si la coque est fortement galbée ou si les couples sont très espacés.

6.513 *Sollicitations dues au plissement des parois.* — Ces sollicitations découlent directement de l'équilibre d'un panneau plissé, exposé au paragraphe **6.424**.

Considérons le fragment de coque représenté figure 44 *a* et supposons que, de part et d'autre du couple AB considéré, le revêtement soit plissé dans les panneaux **1**, **2**, **3**, **1'**, **2'** et **3'** où les flux supplémentaires [2] sont $\Delta\tau_1$, et les forces réparties appliquées aux bordures f_1, f_2... (notations analogues à celles du paragraphe **6.42**).

On néglige, généralement, les *actions horizontales* provenant des différences $(f_1 - f'_1)$, $(f_2 - f'_2)$... qui tendraient à produire une flexion du couple considéré normalement à son plan. Les couples ne sont, en effet, pas conçus pour résister à ces charges qui sont directement encaissées par les rigidités locales des bords des panneaux.

Par contre, les couples fournissent les *réactions d'appui* aux lisses entraînées en flexion par les forces projetées verticalement sur la figure 44 *a*. On sait que cette flexion s'opère tangentiellement ou normalement aux parois selon qu'elles sont planes ou galbées (§ **5.426**).

Dans l'un ou l'autre cas, le type de sollicitation du couple AB est celui représenté par la figure 44 *b* [3].

Il est soumis à un *système de forces égales et opposées* : (Q_1 et $- Q_1$),

1. — On peut se dispenser, en pratique, du calcul de ces composantes horizontales, si l'on adopte un procédé graphique pour le calcul du couple (Voir ci-après § 7.4).

2. — Ces flux supplémentaires sont égaux aux différences entre les flux réels et critiques de chaque panneau (§ 6.42).

3. — Il est inutile, dans le cas de coques galbées, de faire apparaître les actions radiales des lisses (forces φ de la figure 42). Le système envisagé est équivalent (voir fig. 44 *c*).

(Q_1 et — Q_2)... provenant des actions des lisses bordant chaque panneau plissé. Ces forces ont sensiblement pour valeurs :

$$Q_1 = f_1 \frac{\Delta L_1}{2} + f'_1 \frac{\Delta L_2}{2}$$

soit :

$$Q_1 = \frac{1}{2} (\Delta\tau_1 \; \Delta L_1 + \Delta\tau'_1 \; \Delta L_2)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} (\Delta\tau_2 \; \Delta L_1 + \Delta\tau'_2 \; \Delta L_2)...$$

En utilisant des notations analogues à celles adoptées au paragraphe 6.426, on peut encore écrire, d'une façon générale :

$$\boxed{Q = \Delta\tau_m \cdot \Delta L_m}$$

en désignant par :

$\Delta\tau_m$ la moyenne arithmétique des « *flux supplémentaires* » agissant sur les deux panneaux adjacents à l'intervalle considéré,

et par ΔL_m la moyenne des intervalles entre couples au niveau du couple calculé.

On voit que ces forces forment un *système général nul* ne nécessitant donc aucune réaction extérieure.

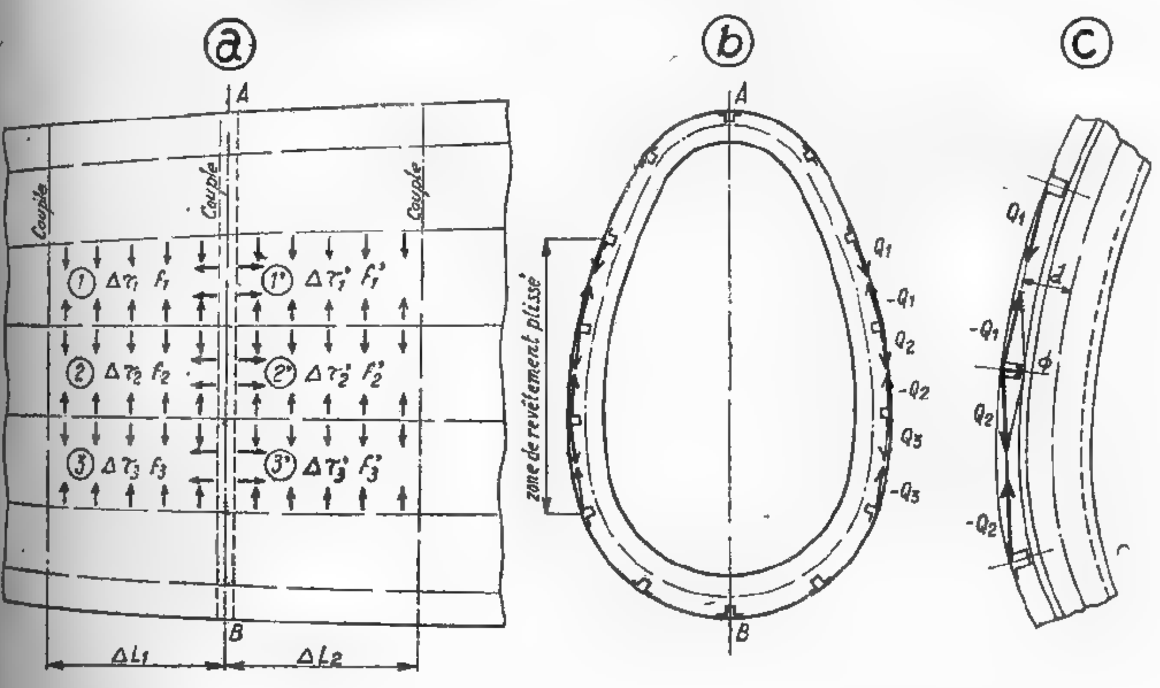


Fig. 44.

Elles engendrent, essentiellement, des *compressions* Q_1, Q_2, Q_3 du couple, mais également des *moments fléchissants* secondaires dus au décalage *d* entre les parois et la fibre neutre de ce couple (fig. 44 *c*).

Notons que le calcul de ces efforts fait l'objet d'un calcul hyperstatique pour les couples fermés (voir Application numérique ci-après § 7.4).

6.514 *Remarques.* — *a*) Ainsi que nous l'avons déjà signalé (§ 6.11) les couples courants ont également pour but de fractionner les longueurs libres au flambage des parois comprimées. Les sollicitations correspondantes ne sont, pratiquement, pas chiffrables.

b) Les sollicitations étudiées ci-dessus montrent que le *rôle d'un couple courant est essentiellement celui d'un conservateur de forme* (maintien du galbe longitudinal ou transversal de la coque).

c) Les autres catégories de couples étudiées ci-après subissent également les

mêmes sollicitations, mais celles-ci sont, généralement, négligeables devant celles provenant des fonctions particulières à ces couples.

6.52 Equilibre des couples d'introduction de charges.

6.521 *Généralités.* — Comme dans toute structure à parois minces, l'introduction des charges concentrées doit faire l'objet d'une attention particulière. Dans les fuselages-coques, les *charges transversales* sont réparties sur les parois par les couples.

C'est ainsi qu'il y a lieu de disposer des *couples spéciaux* au niveau (ou tout au moins à proximité immédiate) de chaque charge transversale concentrée importante (attaches voilure-fuselage ou empennages-fuselage, cadres de hissage, supports de réservoirs ou de train d'atterrissage, etc...).

6.522 *Principe d'équilibre.* — En supplément à leurs rôles de couples courants (remarque *c*) ci-dessus), les couples étudiés peuvent avoir à répartir sur le revêtement les charges transversales suivantes :

accroissement d'effort tranchant vertical : ΔT_z,
accroissement d'effort tranchant horizontal : ΔT_y,
accroissement de moment de transport (ou de torsion) : $\Delta M'_t$ (ou ΔM_t).

Ces *accroissements* sont d'ailleurs mis en évidence par les diagrammes représentatifs des efforts généraux T_z, T_y ou M_t, tracés le long de la coque, qui subissent des *variations brusques* de part et d'autre de ces couples. Nous insistons bien sur le fait que ce ne sont que ces *variations* qui sont à considérer pour le calcul des couples introducteurs de charges. A ces variations d'efforts généraux correspondent des *variations* $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$ ou $\Delta\tau_3$ des *flux de cisaillement* τ_1, τ_2 ou τ_3 appliqués à ces parois. Ces variations sont donc réparties sur le pourtour de la coque, selon les mêmes lois que celles exposées pour les flux généraux.

Les *efforts tangentiels* correspondants, orientés dans le sens des réactions, *équilibrent* les charges à introduire. On obtient ainsi un *système en équilibre extérieur* comprenant des *actions concentrées* et des *réactions réparties*. Le calcul du couple considéré s'effectue sous l'action de ce système.

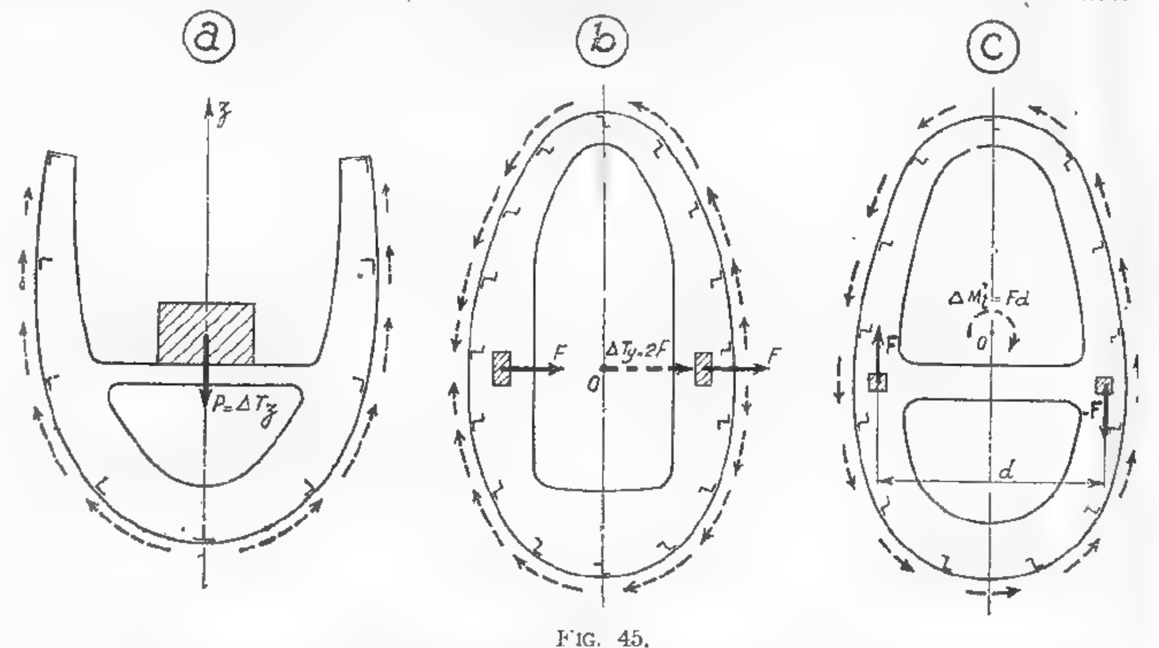


FIG. 45.

6.523 *Exemples.* — Nous donnons, à titre d'exemples, trois figures d'équilibres relatives à des couples introducteurs de charges :

Fig. 45 *a* : Couple ouvert supportant une charge P (donnant lieu à $\Delta T_z = P$).

Fig. 45 *b* : Couple fermé recevant deux charges concentrées F appliquées au niveau du centre de référence O, d'où : $\Delta T_y = 2$ F.

Fig. 45 *c* : Couple fermé recevant deux composantes opposées F et — F distantes de *d* d'où : $\Delta M'_t = Fd$.

6.53 Equilibre des couples situés à des changements de formes des coques. — Quand une coque change brutalement de forme (passage d'une section fermée à une section ouverte, par exemple), la distribution théorique des flux de cisaillement se trouve également modifiée brutalement.

Il en résulte qu'un élément est nécessaire pour assurer cette « *transformation de flux* ». C'est le rôle d'un couple convenablement disposé [1].

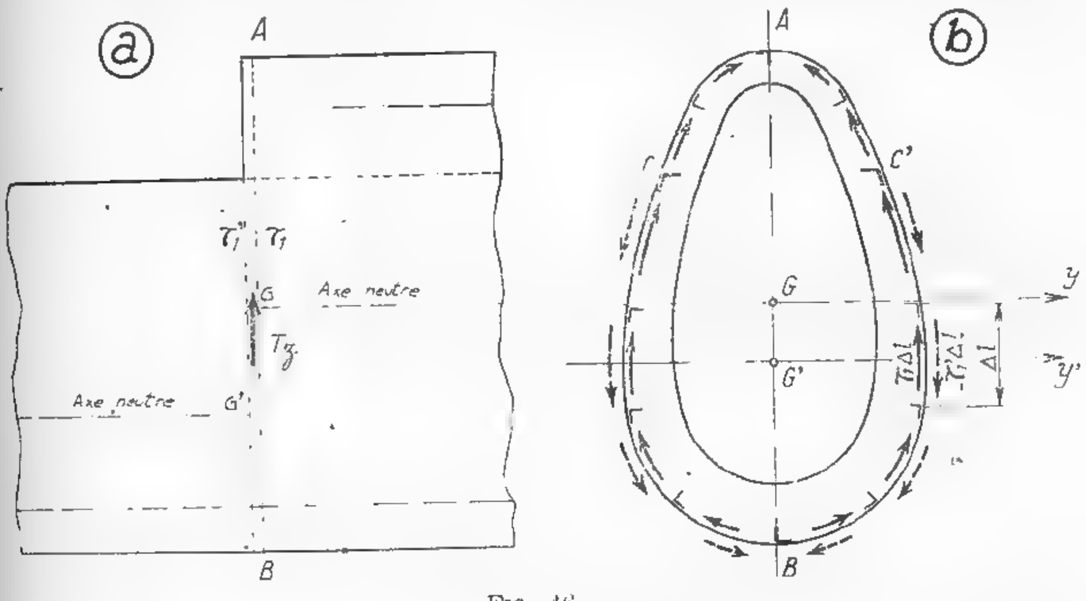


Fig. 46.

La figure 46 *b* schématise l'équilibre du couple AB situé au bord d'une ouverture de grande dimension (fig. 46 *a*). Les sollicitations indiquées correspondent à une flexion verticale de la coque. On voit que le couple est soumis à un système *d'actions réparties* provenant du flux τ_1 sur la partie fermée qui s'équilibre entièrement par un système de *réactions réparties* qui correspondent au flux τ'_1 existant dans la partie ouverte. Dans les panneaux non interrompus, le couple est soumis à des forces tangentielles

$$f_1=(\tau_1-\tau'_1)\ \Delta l$$

qui équilibrent les forces $f_2=\tau_1\Delta l$ appliquées aux panneaux interrompus par l'ouverture.

Le calcul du couple s'effectue sous l'action de ce système de charges tangentielles en équilibre.

6.54 Principes de calcul des couples.

6.451 *Généralités.* — L'état d'équilibre extérieur d'un couple étant connu, il reste à déterminer les *efforts internes* supportés par chaque section droite de ce couple, afin de calculer les contraintes correspondantes. On voit que les sollicitations ci-dessus formant des systèmes plans, le couple est soumis à une *flexion dans son plan* (effort tranchant T, moment fléchissant M) accompagnée d'*efforts normaux* N. Nous donnerons, aux paragraphes 7.3 et 7.4 des méthodes graphiques permettant la détermination rapide de ces efforts.

6.542 *Efforts tangentiels.* — Chaque panneau de revêtement de largeur Δl (distance entre lisses) constitue une *âme mince* dont nous savons déterminer la grandeur et la position de la résultante de cisaillement correspondant au flux à considérer pour le calcul du couple (chap. XXI, § 1.42).

1. — En fait, la transformation de flux ne peut s'opérer brutalement quand des éléments longitudinaux se trouvent interrompus par une ouverture. L'équilibre décrit ci-dessous constitue donc un cas de calcul désavantageux pour le couple.

Notons cependant, qu'étant donné le faible galbe de chaque panneau, il est, généralement, suffisant d'admettre que ces résultantes de cisaillement agissent suivant la *corde* de ce panneau [1]. Les distances Δl servant au calcul des résultantes (ou efforts tangentiels) sont les cordes de chaque panneau (et non leurs longueurs développées).

6.543 *Symétrie.* — Les couples constituent, en général, des *arcs*, *anneaux* ou *cadres plans symétriques*. Nous savons (chapitre XVIII, paragraphe **5.42** et **6.3**) que l'on aura donc toujours intérêt à discriminer les états de sollicitations *symétriques* et *antisymétriques*. Les premiers sont dus à la flexion verticale (suivant Gz) et les autres à la flexion horizontale et à la torsion. Cette discrimination se trouvera donc, pratiquement, opérée dès le calcul des efforts généraux. On n'effectuera, au surplus, les calculs que sur un *demi-couplé*.

6.544 *Couples ouverts.*

a) Couples ouverts simples. — Seuls les *couples ouverts simples* (sans traverse, voir fig. 47 *a*), constituent des *systèmes isostatiques purs* où le calcul des efforts dans une section quelconque S s'opère sans difficulté par projections ou transport des charges appliquées (et réactions) comprises entre cette section et une extrémité libre A ou A' ;

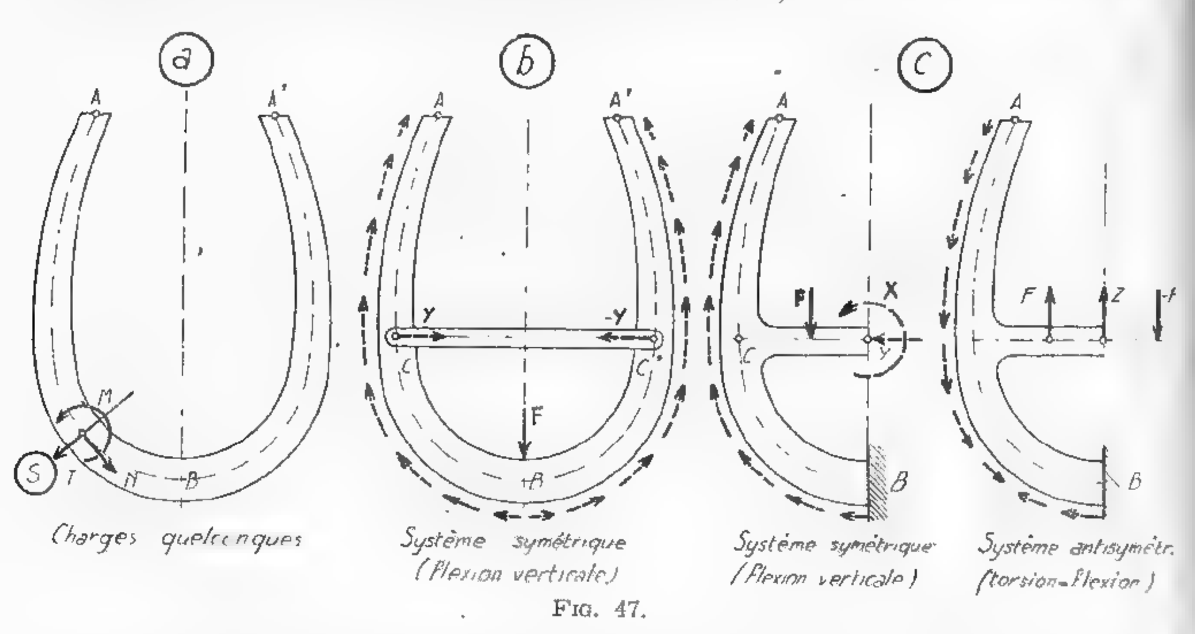


Fig. 47.

b) Couples ouverts avec une traverse (fig. 47 *b* et 47 *c*). — Les branches libres AC et A'C' sont évidemment isostatiques. La partie CBC' est influencée par les *réactions hyperstatiques* de la traverse.

Si cette traverse peut être considérée comme *articulée* en C et C' (fig. 47 *b*) elle introduit une *inconnue* Y (poussée) dans les cas de charges symétriques (Y=0 dans les cas antisymétriques d'où problème entièrement isostatique).

Si la traverse est *encastrée* en C et C', nous savons que sa section centrale est soumise aux efforts de liaison X et Y dans les cas symétriques et Z dans les cas antisymétriques (fig. 47 *c*).

6.545 *Couples fermés.* — Ils constituent toujours des *systèmes hyperstatiques*. Les « sections de coupure » devront être effectuées à l'aplomb

1. — Sauf cependant quand ces panneaux sont trop grands ou trop galbés (voir § 7.2).

de l'axe de symétrie pour chaque élément dont il est nécessaire d'interrompre la continuité pour obtenir un arc isostatique.

Nous avons déjà donné au chapitre XVIII, paragraphe **6.3**, quelques figures de mise en équilibre général de ces couples. La figure 48 schématise également quelques cas particuliers. Voir également les applications numériques données aux paragraphes **7.3** et **7.4** ci-après.

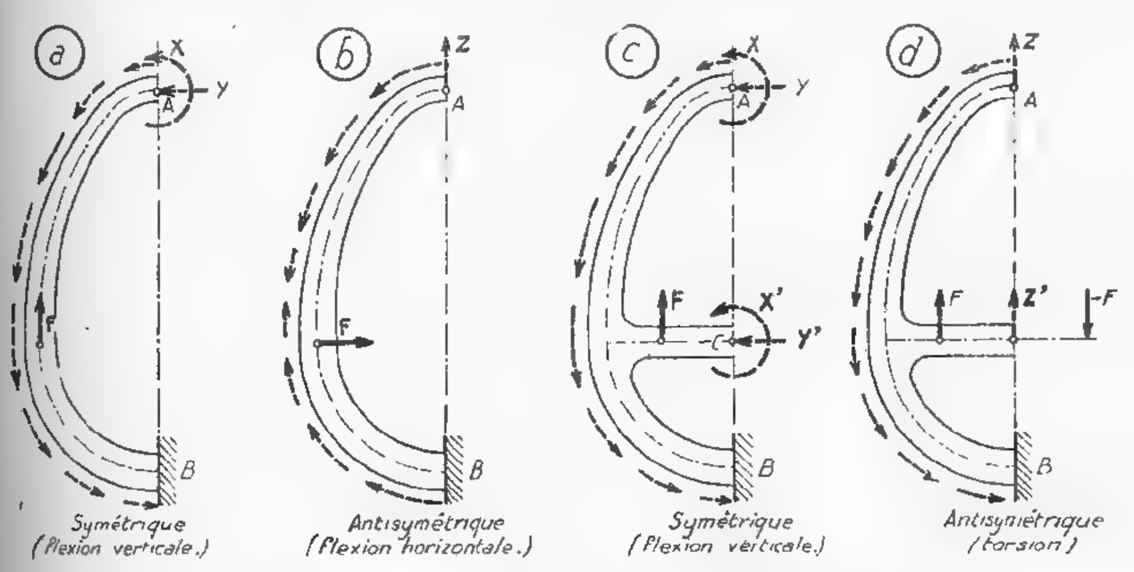


Fig. 48.

6.546 *Sections résistantes.* — Quand les couples sont liés au revêtement on pourra toujours tenir compte, dans leurs sections résistantes, d'une certaine fraction de revêtement intéressée. On prendra, par exemple, une « *double largeur équivalente* » égale à 30 *e* (fig. 49).

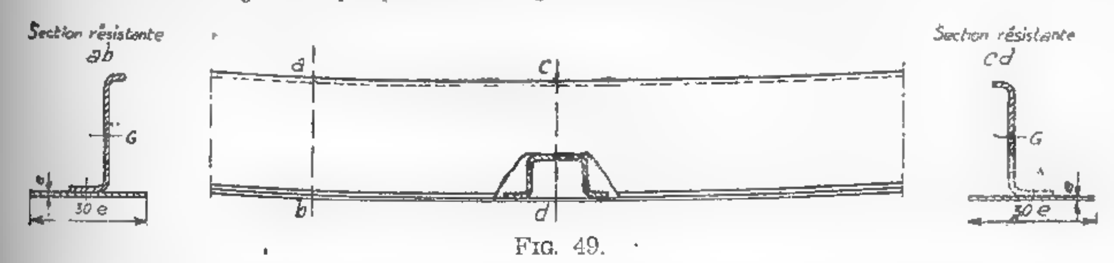


Fig. 49.

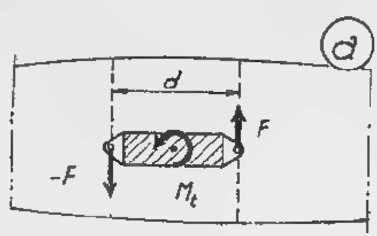
Signalons également que des essais effectués sur des éléments de construction du type de la figure 49 ont montré que l'on pouvait, au niveau des encoches pratiquées pour le passage des lisses, compter sur une « *section résistante* » telle que celle représentée par la coupe *cd*. (La bande de tôle équivalente est suffisamment stabilisée par la lisse pour rester efficace au niveau de l'encoche.) Les inerties nécessaires aux calculs hyperstatiques doivent être évaluées avec la section courante (section *ab*).

6.6 INTRODUCTION DES CHARGES LONGITUDINALES DANS LES COQUES.

6.61 Généralités. — Nous venons de voir ci-dessus que l'introduction des *charges transversales* (efforts tranchants et moments de torsion) dans une coque constitue un problème très accessible au calcul, puisqu'il se réduit au dimensionnement de *couples introducteurs de charges* travaillant dans leurs plans.

On devra donc toujours s'efforcer de réaliser sous cette forme les différentes introductions importantes de charges concentrées. C'est ainsi que

pour transmettre à un fuselage la torsion d'un caisson d'aile (qui engendre une introduction de flexion ΔM_y dans le fuselage) on aura intérêt à réaliser des attaches transformant cette torsion en deux composantes transversales: $F = M_t/d$ (fig. 50 *a*), plutôt qu'en deux composantes longitudinales : $Q = M_t/h$ (fig. 50 *b*).



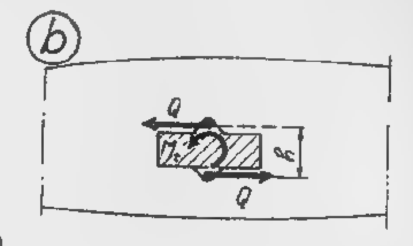


Fig. 50.

Il existe cependant des cas où cette réalisation est impossible. Il est, au surplus, nécessaire d'introduire des *efforts longitudinaux purs* tels que les charges normales N (efforts de traînée par exemple).

6.62 Principe. — L'introduction d'une telle charge importante constitue un problème délicat. On « accroche », généralement, cette charge à un *élément longitudinal fort* AA′ (fig. 51) et l'on admet que cet élément se déleste dans le revêtement d'une façon progressive sur une certaine longueur *l* appelée *« longueur d'amortissement »*.

6.63 Cas particulier. — La figure 51 représente le cas simple d'une *charge* N *appliquée suivant le plan de symétrie de la structure*. Elle donne lieu à un *flux longitudinal* : $\tau'_A = \dfrac{N}{2l}$ de part et d'autre de AA′. Elle engendre également un moment fléchissant :

$$M_y = N\ h.$$

En supposant que la répartition de cette flexion se fait suivant la loi idéale dans la section A′B′ on peut calculer les flux de cisaillement agissant sur chaque génératrice PP′ de la coque dans l'intervalle *l*.

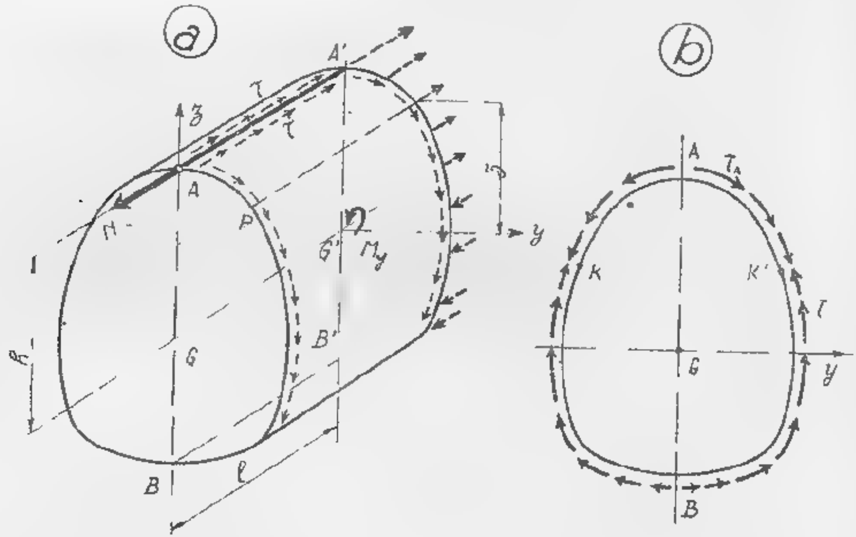


Fig. 51.

Un élément ΔS de la section A′B′, situé à une distance z de G′y, reçoit, en effet, une réaction normale

$$f = \frac{M_y}{I_y}\, z\ \Delta S$$

soit :

$$f = \frac{N}{I_y} h \, \Delta W_y.$$

Le *flux longitudinal* s'exerçant le long de PP' vaut donc :

$$\tau - \tau_A - \sum_A^P \frac{f}{l} = \frac{N}{2\,l} - \frac{Nh}{l\,I_y} W_y$$

(notation admise ci-dessus au sujet de $W_y = \sum_A^P \Delta W_y$),

soit :

$$\boxed{\tau = \frac{N}{l}\left(\frac{1}{2} - \frac{h}{I_y} W_y\right).}$$

Par *réciprocité*, il existe un *flux transversal* égal dans chaque section droite de l'intervalle l.

On obtient ainsi *l'allure générale* représentée par la figure 51 *b* (deux points nuls en B et K par demi-section). Ce flux forme un *système général en équilibre* (résultante nulle) pour chaque section droite.

Les *couples terminaux* AB et A'B' se calculent sous l'action des forces tangentielles correspondantes [1].

La *contrainte normale* en P' a pour valeur :

$$n = \frac{N}{S} + \frac{M_y}{I_y} z$$

soit :

$$\boxed{n = N\left(\frac{1}{S} + \frac{h}{I_y} z\right).}$$

7. APPLICATIONS NUMÉRIQUES CONCERNANT LE CALCUL DES FUSELAGES-COQUES

7.0 GÉNÉRALITÉS.

Ainsi que nous l'avons déjà signalé ci-dessus, le but essentiel des applications exposées ci-après, est de faciliter la *conduite matérielle des calculs* d'une coque, en faisant ressortir quelques dispositions pratiques de ces calculs en « *tableaux-types* ».

Nous avons également fait emploi de *vérifications* ou de *constructions graphiques*, d'une utilisation particulièrement aisée dans les bureaux d'études.

Nous donnons quatre applications différentes : deux calculs de *sections* (ou parois) et deux calculs de *couples*, groupées en six *planches* (annexées en fin de volume).

Ces applications concernent des *structures présentant un seul axe de symétrie* (cas le plus fréquent).

Nous verrons, au paragraphe suivant, que des calculs entièrement algébriques peuvent être entrepris dans le cas particulier de sections circulaires.

7.1 CALCUL D'UNE SECTION FERMÉE D'UN FUSELAGE-COQUE MULTI-LISSES.

Cette application est effectuée **Planches 46 A et 46 B.**

Elle concerne le *calcul complet des parois d'une coque* au niveau de la section considérée, c'est-à-dire la recherche des contraintes dues aux *efforts généraux* et des *contraintes supplémentaires* dues au travail des parois en plissement diagonal.

1. — Dans l'ensemble de la structure, ces couples s'assimilent à des « *couples de changement de forme* »

Les méthodes et notations utilisées sont conformes à celles exposées aux paragraphes **6.2** à **6.4**.

Nous avons, en particulier, adopté la *méthode* 2, exposée au paragraphe **6.23**, en ce qui concerne la participation des tôles de revêtement à la transmission des efforts normaux en flexion verticale [1] et les *hypothèses simplificatrices* exposées au paragraphe **6.**422 pour déterminer les panneaux soumis au plissement diagonal.

La **planche 46** A groupe le calcul des *paramètres de résistance* de la section, c'est-à-dire des grandeurs indépendantes des charges appliquées. Ce calcul est conduit sous la forme de détermination de *flux de cisaillement dus à des efforts tranchants réduits unitaires* $(T'_x)_u$ et $(T'_y)_u$ égaux à 1000 kg et appliqués au point de référence O et selon les sens des efforts réels considérés par la suite (**Planche** 46 B).

Noter les *vérifications graphiques* concernant la grandeur des résultantes de cisaillement (tracés opérés pour la paroi côté gauche seulement). Noter également la *vérification de moment* opérée dans la colonne 14 du tableau 2 (flux de flexion avec torsion dû à $(T'_y)_u$ appliqué en O).

La **Planche 46** B donne le *calcul des contraintes* des éléments longitudinaux (lisses et revêtement) au niveau de la section considérée, sous l'action des efforts indiqués [2].

Les *contraintes n* et *t dues aux efforts généraux* sont calculées, dans le tableau 4, pour toutes les lisses et tous les panneaux.

Les *contraintes supplémentaires* et les *contraintes résultantes* ne sont déterminées (tableau 5) que pour les lisses bordant les panneaux plissés (condition $t>t_0$: tableau 4, colonnes 13 et 14, et tableau 3, colonne 7).

Remarques.

a) *Influence des contraintes supplémentaires.* — La comparaison des résultats trouvés, planche 46 B, dans les colonnes 5 et 6 du tableau 4, d'une part, et dans les colonnes 7, 11 et 12 du tableau 5, d'autre part, montre que *les contraintes supplementaires des lisses* (dues au plissement du revêtement) *sont faibles, vis-à-vis de celles dues aux efforts généraux.* On voit également que les maxima de ces deux critères de contraintes ne se superposent pas [3].

En définitive, dans l'exemple considéré, les lisses sont entièrement *dimensionnées* par les contraintes *n* dues aux efforts généraux seuls puisque les contraintes normales maxima sont finalement atteintes pour des lisses ne subissant pas de sollicitations supplémentaires (panneaux adjacents stables en cisaillement pur), soit :

en compression : lisse 0′ (côté D) où $n = 22{,}43$ kg/mm² (colonne 6, tableau 4),
en traction : lisse 2 (côté G) où $n = -15{,}51$ kg/mm² (colonne 5, tableau 4).

Remarquons, toutefois, que ce résultat ne saurait être généralisé à priori, car les contraintes supplémentaires augmenteraient rapidement avec un accroissement de la distance ΔL entre couples [4] ou une diminution de l'inertie propre des lisses.

b) *Comparaison entre les méthodes* 1 *et* 2 (§§ **6.**22 et **6.**23). — La *méthode* 1 (tout le revêtement supposé plissé), qui n'a été envisagée ici qu'à titre de première approximation pour situer l'axe neutre en flexion verticale (colonnes 3 et 4, tableau 1, planche 46 A), aurait conduit à un moment d'inertie en flexion verticale :

$$I'_y = \Sigma\ (z_0 - d_1)^2\,\Delta S_1 = \Sigma\ (z_0 - 55{,}3)^2 \Delta S_1 = 57786\ \text{cm}^4$$

(au lieu de 77628 cm⁴ par la méthode 2) et à des modules d'inertie :

$$\text{lisse 1 : } \frac{57786 \cdot 10^4}{1188 - 553} = 856 \cdot 10^3\ \text{mm}^3\ ; \qquad \text{lisse 12 : } \frac{57786}{553 - 12} = 1068 \cdot 10^3\ \text{mm}^3.$$

---

1. — En flexion horizontale nous avons adopté la méthode 1 pour conserver l'avantage de la symétrie de la structure.

2. — Ces efforts correspondent au « coefficient de calcul à la rupture » de la structure.

3. — Nous avions déjà signalé ce dernier point au paragraphe **6.**43.

4. — Cet accroissement aurait également pour effet de diminuer les contraintes admissibles en compression, par suite du flambage général des parois entre couples.

Les *contraintes maxima en flexion verticale* (moment M_y) auraient donc eu pour valeur :

en *traction* (lisse 1) : $-\frac{23.000 \cdot 10^3}{856 \cdot 10^3} = -26,9$ kg/mm²,

en *compression* (lisse 12) : $\frac{23.000 \cdot 10^3}{1068 \cdot 10^3} = 21,6$ kg/mm².

Par la *méthode* 2 nous avons obtenu, pour ces mêmes lisses (colonne 2, tableau 4) :

lisse 1 : $n_1 = -15,42$ kg/mm² ; lisse 12 : $n_1 = 19,39$ kg/mm².

Les *écarts relatifs* entre les deux méthodes sont donc :

Pour les contraintes maxima de *traction :*

$$100 \frac{26,9 - 15,42}{15,42} = 74,3\%.$$

Pour les contraintes maxima de *compression :*

$$100 \frac{21,6 - 19,39}{19,39} = 11,4\%.$$

Le fait de ne considérer que la méthode 1 conduirait donc à des résultats désavantageux, principalement pour les parties tendues.

c) *Justification de la méthode* 2. — Cette méthode n'est valable que si les panneaux où toute la tôle a été comptée en traction (zone 4 — 1 — 4′ pl. 46 A) sont effectivement *stables* sous l'action de leurs efforts appliqués.

Vérifions la *stabilité du panneau* 3′ — 4′ (bordure côté droit de cette zone) où la contrainte de cisaillement (instabilisatrice) est maximum et la contrainte de traction (stabilisatrice) est minimum pour cette zone.

On a, pour ce panneau :

contrainte de cisaillement (uniforme) : $t = 3,34$ kg/mm² (col. 14. tab. 4),
contraintes de traction : lisse 3 : —8,04 kg/mm², lisse 4 : —3,32 kg/mm² (col 6, tabl. 4).

La moyenne de ces dernières contraintes est

$$n_t = -0,5\ (8,04 + 3,32) = -5,68 \text{ kg/mm}^2.$$

Nous supposerons que le panneau est soumis à une contrainte de traction uniforme n_t égale à cette valeur.

La contrainte critique de cisaillement pur t_o du panneau vaut (planche 46 B, tableau 3, colonne 7) :

$$t_0 = 1,85 \text{ kg/mm}^2.$$

La contrainte critique de compression pure n_{co} est donnée par l'abaque de de la *planche* 38 avec R=790 mm (tableau 3, colonne 4) et $e = 1,25$, d'où

$$n_{c_0} = 2,2 \text{ kg/mm}^2.$$

On a donc

$$\frac{t}{t_0} = \frac{3.34}{1,85} = 1,805 \quad \text{et} \quad \frac{n_t}{n_{c_0}} = -\frac{5,68}{2,2} = -2,58.$$

L'abaque n° 1 de la *planche* 42, donnant les conditions de stabilité sous sollicitations combinées des plaques cylindriques (courbe 2), montre que le point représentatif des valeurs ci-dessus est situé à l'intérieur de l'espace limité par cette courbe.

Le panneau considéré est donc *stable* et la méthode 2 utilisée est justifiée (elle se trouve même être défavorable).

7.2 CALCUL D'UNE SECTION OUVERTE D'UN FUSELAGE-COQUE MULTILISSES.

Cette application, effectuée **Planche 47**, concerne une section de fuselage-coque située à l'extrémité d'une partie ouverte symétrique de longueur importante.

Nous nous sommes limités à un *cas de calcul sous charges transversales* (charges sur empennage vertical par exemple) qui engendrent une *flexion horizontale* et un état de *torsion-flexion* dans la partie ouverte (voir § 4.1).

Il y aurait lieu, pour un calcul complet, de superposer aux contraintes obtenues celles provenant de la flexion verticale et du travail en plissement diagonal des parois, mais les calculs correspondants sont analogues à ceux effectués dans l'application précédente.

Nous avons supposé que la partie ouverte était sensiblement cylindrique et que les rigidités de ses encastrements extrêmes sur les parties fermées étaient identiques. La section dite « libre » se trouve ainsi au milieu de l'ouverture (§ 4.15), soit à une distance $x=0,9$ m de la section considérée.

Le tableau de calcul 1 donne la détermination des *caractéristiques de résistance* utiles aux calculs et le tableau 2 le calcul des *contraintes des lisses et du revêtement*. On voit que la transmission de la torsion M_t donne lieu à des contraintes normales n'_s relativement importantes.

Nous avons effectué deux *vérifications graphiques* concernant les *grandeurs* des résultantes des flux. (Elles doivent être égales à T_y en flexion pure et à zéro en torsion pure.) Nous avons, également, effectué deux vérifications de *moments* des forces tangentielles par rapport à C_c. En flexion pure (colonne 26) ce moment doit être nul, et en torsion pure (colonne 28) il doit être égal à M_t, ce qui se trouve bien vérifié.

Remarques.

a) ***Position des résultantes des flux agissant sur chaque panneau.*** — Pour satisfaire exactement aux vérifications mentionnées ci-dessus, nous avons dû déterminer avec précision la constante de torsion-flexion C, en faisant apparaître les ***positions réelles des résultantes de flux*** agissant sur chaque panneau[1]. Chaque panneau constituant une âme mince galbée a sa résultante *f décalée d'une quantité* :

$$\delta=\frac{2\Delta\Omega}{\Delta l_1}$$ (Voir fig. 52 et chap. XXI, §§ 1.4 et 6.).

On substitue ainsi au contour réel du revêtement le polygone résistant, tracé sur la planche 47.

Dans toutes les autres applications, nous nous sommes contentés de situer *f* sur la corde *ab*, ce qui est, en général, suffisant (voir ci-dessus, § 6.542).

FIG. 52.

b) *Angle de torsion de la partie ouverte.* — La partie ouverte comprenant deux « parties libres » de longueur $l=900$ mm, l'***angle de torsion relatif*** de ses encastrements extrêmes est donné par (voir § 4.17).

$$\theta=2\,\theta_0=\frac{2\,M_t}{EC}\,\frac{l^3}{3}$$

soit avec E=7000 kg/mm² (AU4G)

$$\theta=\frac{2\cdot 2780\cdot 10^3}{7000\cdot 30{,}282\quad 10^{12}}\,\frac{900^3}{3}=0{,}0191\text{ rad}=1^\circ 6'.$$

c) *Comparaison de rigidité en torsion avec une coque fermée.*

Supposons qu'une paroi mince d'épaisseur $e=1{,}25$ (identique à celle du revêtement) réunisse les lisses de bordure 1 et 1′. On obtiendrait, en admettant que O soit confondu avec le centre de torsion de cette section fermée, c'est-à-dire que le moment de torsion pure soit égal à M'_t.

$$\theta'=\frac{M'_t}{GJ}\,2\,l \quad \text{(chap. XIII, § 4.2)}$$

avec

$$J=\frac{4\Omega^2}{\sum\frac{\Delta l}{e}}$$ soit avec Ω = aire des corps creux=536000 mm²

1. — Contrairement à l'approximation généralement admise (voir § 6.542).

et
$$\sum \frac{\Delta l}{e} = \frac{2720}{1,25} = 2180$$

$$J = 528 \cdot 10^6 \ mm^4$$

d'où un angle de torsion

$$\theta' = \frac{1000 \cdot 10^3}{2800 \cdot 528 \cdot 10^6} \, 1800 = 0,00122 \ rad = 0°4'.$$

Ce calcul fait ressortir la *faible rigidité relative en torsion des parties ouvertes :* défaut déjà signalé à plusieurs reprises [1].

7.3 CALCUL D'UN COUPLE D'INTRODUCTION DE CHARGES, DANS UN FUSELAGE-COQUE MULTI-LISSES.

Ce calcul effectué **Planches** 48 A et 48 B concerne un couple situé à proximité immédiate de la *section fermée* étudiée au paragraphe **7.1** (Planches 46 A et 46 B) [2].

7.31 Données. — Le couple, d'*inertie variable*, est soumis à *deux charges F symétriques* agissant sur deux ferrures déportées vers l'extérieur (attaches d'un faux-longeron d'aile, par exemple).

L'ensemble de ces deux forces F donne une *introduction d'effort tranchant* vertical : $\Delta T_z = 10000$ kg dans la coque. Le couple constitue donc un *anneau plan symétrique, chargé symétriquement.*

Nous avons envisagé douze sections droites du demi-couple gauche, passant chacune par une lisse de la section de la coque.

Les caractéristiques moyennes de résistance du couple entre ces sections (caractéristiques nécessaires au calcul hyperstatique) sont données colonnes 2 à 4 (tableau 1). Ces caractéristiques sont déduites du schéma des sections droites, donné planche 48 A et de la courbe correspondante des moments d'inertie de flexion du couple, tracée planche 48 B.

Notons que les intervalles Δl, sont les *distances curvilignes*, comptées sur la fibre moyenne du couple [3], séparant deux sections droites consécutives.

7.32 Equilibre du couple. — L'introduction de ΔT_z donne lieu à une *variation de flux* $\Delta \tau_1$ (en flexion verticale) de part et d'autre du couple. Cette variation est égale à 10 fois le flux unitaire $(\tau_1)_u$ déterminé planche 46 A pour $(T'_z)_u = -1000$ kg.

Les *réactions tangentielles* r_i du revêtement, dans chaque panneau (colonne 5) sont donc égales à : $r_i = 10 \, f_i$, avec f_i=forces tangentielles déterminées colonne 14 du tableau 1, planche 46 A.

7.33 Dynamique des forces extérieures (actions et réactions). — Il est tracé planche 48 A en portant bout à bout les réactions tangentielles r_i à partir de la section 1 et la force F, à l'emplacement où elle se trouve (section 7). Remarquons que les points 1 et 12 sont une même horizontale, ce qui constitue une vérification de la mise en équilibre (l'ensemble du dynamique, y compris le demi-couple côté droit, se refermerait au point 1).

7.34 Calcul des efforts internes agissant sur le couple.

7.341 *Méthode de calcul.* — Cette méthode est identique à celle exposée au chapitre XVIII (§ 6.3) pour les anneaux plans symétriques soumis à des charges symétriques.

L'anneau est rendu *isostatique* par une coupure fictive effectuée au niveau de la section 1. Il reste donc, pour le calcul, un demi-couple encastré à la sec-

---

1. — Signalons au surplus que l'angle θ calculé pour la partie ouverte est inférieur à la réalité, car il suppose les encastrements de cette partie absolument indéformables (en flexion).

2. — Cette considération nous dispense de reprendre le calcul des distributions de flux de cisaillement sur le pourtour de la coque. Nous supposerons que celle-ci est soumise à une flexion verticale générale négative au niveau du couple (cas envisagé planche 46).

3. — La fibre moyenne du couple se détermine d'après les positions des c. de g. de chaque section droite travaillante (voir schéma pl. 48 A).

tion 12 (symétrie) et soumis, dans la « section de coupure » à *deux inconnues de liaison hyperstatiques :*

un moment fléchissant : X }
un effort normal : Y } Voir sens arbitraires adoptés

d'où l'expresssion du moment fléchissant M dans une section droite courante :

$$M=m+X+\alpha Y$$

avec :

m=moment dû aux forces extérieures dans le système coupé,
α=distance de la section à Y (colonne 10, tableau 1).

7.432 *Calcul du moment m : résultantes partielles.* — En joignant le point 1 du dynamique (planche 48 A) au point représentatif d'une section considérée, on obtient, en grandeur et en direction, la *résultante partielle* R des efforts agissant entre cette section et l'extrémité libre du système rendu isostatique (colonne 7, tableau 1).

Les *bras de levier d* de ces différentes résultantes sont déterminés graphiquement sur le tracé du couple. On utilise pour cela la remarque suivante : *Chaque résultante* R *passe par le point de concours de la résultante précédente et de la nouvelle force appliquée.*

Exemple. — Connaissant R_5, on sait que R_6 doit passer par le point de rencontre de R_5 avec la force tangentielle agissant sur le panneau 5-6 [1] et que cette résultante R_6 doit être parallèle à 1-6 sur le dynamique.

On obtient ainsi, de proche en proche, l'épure de la planche 48 A dont les résultats sont consignés, colonne 8. Le moment m est égal au produit

$$m=R\,d \qquad \text{(colonne 9).}$$

7.433 *Détermination des inconnues X et Y.* — Les équations donnant X et s'écrivent (chap. XVIII, § 2.553) :

$$\frac{1}{2E}\frac{\partial U}{\partial X}=\sum m\frac{\Delta l_1}{I}+X\sum\frac{\Delta l_1}{I}+Y\sum\alpha\frac{\Delta l_1}{I}=0$$

$$\frac{1}{2E}\frac{\partial U}{\partial Y}=\sum m\alpha\frac{\Delta l_1}{I}+X\sum\alpha\frac{\Delta l_1}{I}+Y\sum\alpha^2\frac{\Delta l_1}{I}=0.$$

A l'aide des valeurs calculées, colonnes 9 à 12, on construit, par points, en fonction de $\frac{\Delta l_1}{I}$ porté en abscisses (colonne 4) les *courbes représentatives* des diverses fonctions figurant sous les signes Σ ci-dessus.

Ces courbes sont données planche 48 B, pour un demi-couple.

Le *planimétrage* des aires qu'elles délimitent donne les valeurs de chaque coefficient (pour un demi-couple) compte tenu des échelles (Voir planche 48 B).

On obtient ainsi les deux équations :

$$525{,}5+1{,}952\ X+0{,}922\ Y=0$$
$$982\ +0{,}922\ X+0{,}7645\ Y=0$$

d'où l'on tire :

Y=—710 kg (traction section 1),
X=66,5 mkg (moment section 1).

7.434 *Moments fléchissants.* — Les moments de liaison : αY=—710 sont calculés colonne 13.

On obtient :

$$M=m+\alpha Y+X \qquad \text{(colonne 15).}$$

7.345 *Efforts tranchants et normaux.* — L'origine réelle du dynamique (planche 48 A) est décalée, par rapport au point 1, d'une quantité 0-1 représentant en grandeur et direction la force Y s'exerçant à travers la section 1.

En traçant, à partir de ce point 0, un faisceau de normales et de parallèles aux diverses sections, aboutissant à leurs points figuratifs, on obtient les *efforts normaux* N et les *efforts tranchants* T, consignés colonnes 16 et 17.

---

1. — Nous avons assimilé les axes de cisaillement des panneaux à leurs cordes.

7.346 *Courbes représentatives.* — Elles sont tracées planche 48 B en portant en abscisses le développement de la fibre moyenne du couple. Remarquer les discontinuités au niveau de la section 7, dues à l'introduction de F [1]. Noter également que T ne s'annule pas à l'aplomb du maximum de M entre sections 4 et 6 (voir explication chap. IX, § 2.12).

7.35 **Calcul des contraintes.** — Les *caractéristiques de résistance* des sections droites, déduites du schéma du couple et de la courbe des moments d'inertie, planche 48 B, sont données colonnes 18 et 21.

Les *contraintes normales* partielles et totales sont données colonnes 22 à 26 et les *contraintes de cisaillement moyennes de l'âme*, colonne 27.

On voit que la section la plus fatiguée est la *section* 7, immédiatement au-dessous du point théorique d'introduction de l'effort F.

7.36 **Remarques.** — Pour compléter le calcul du couple, il resterait à étudier :

— un cas de calcul aux charges transversales : introduction d'un effort tranchant ΔT_y et du moment de transport $\Delta M'_t$ correspondant (dû au décalage entre les ferrures et l'axe de référence 0, planche 46 A) ;

— un cas de calcul aux charges verticales antisymétriques : introduction d'un couple de torsion pure ΔM_t.

Dans ces deux cas, le calcul ne comporterait qu'une inconnue hyperstatique : l'effort tranchant Z dans la section de coupure (chap. XVIII, § 6.31).

7.4 CALCUL D'UN COUPLE COURANT D'UN FUSELAGE-COQUE MULTILISSES.

Ce calcul, effectué **Planche 49**, concerne un couple que nous avons également supposé être situé à proximité immédiate de la section de coque fermée, étudiée au paragraphe 7.1 (planches 46 A et 46 B), cette supposition ayant pour but d'éviter une reprise du calcul des distributions de flux de cisaillement.

7.41 **Données.** — Couple d'*inertie constante*, réalisé en tôle emboutie, non repris directement sur le revêtement (voir § 6.131 et schéma planche 49).

Nous n'avons traité que le seul cas de calcul qui correspond à la ***flexion verticale de la coque*** (efforts T_z et M_y envisagés planche 46 B).

7.42 **Calcul des sollicitations extérieures.** — Leur ensemble forme un *système de charges symétriques* comprenant (Voir § 6.51) :

7.421 *Sollicitations dues au galbe longitudinal de la coque.* Nous avons supposé un « angle de brisure » : $\Delta\alpha_1 = 2°20'$ au niveau du couple.

Les *projections verticales* f_z des actions radiales f des lisses sont calculées colonne 3 selon la méthode simplifiée exposée au paragraphe 6.512, soit :

$$f_z = \frac{M_y}{H} \frac{\text{tg}\,\Delta\alpha_1}{I_y} z^2 \Delta S_2 = \frac{23 \cdot 10^6}{1200} \cdot \frac{0,04075}{77628} z^2 \Delta S_2 = 1,0062\, z^2 \Delta S_2 \cdot 10^{-6} \text{ (en kg)}.$$

Les termes $z^2 \Delta S_2$ relatifs à chaque lisse (colonne 2) sont directement extraits de la planche 46 A (colonne 8, tableau 1).

On trouve une *introduction d'effort tranchant vertical* :

$$\Delta T''_z = 2\, \Sigma\, f_z = -781 \text{ kg}.$$

Les forces radiales f sont obtenues directement sur le *dynamique des efforts* en projetant chaque composante verticale sur la direction de la section droite considérée [2].

Les *réactions tangentielles* r_1 du revêtement (dues à $\Delta T''_z$) sont calculées, colonne 4, par proportion directe avec les efforts f_1 déterminés planche 46 A (col. 14, tab. 1), soit :

$$r_1 = -\frac{781}{1000} f_1 = -0,781\, f_1.$$

Le *dynamique* tracé planche 49 comprend ces réactions tangentielles

On voit que les points 1' et 12 sont sur une même horizontale (le tracé complet se refermeraient en 1', compte tenu du demi-couple droit).

1. — En réalité, ces variations sont réparties sur une certaine distance par les fixations de la ferrure.

2. — On peut, sans erreur sensible, admettre que les sections droites du couple, normales à la fibre moyenne de ce couple, sont également normales au revêtement.

7.422 *Sollicitations dues au plissement des parois.* — La détermination des panneaux plissés se fait planche 46 B, en comparant les flux r_1 (col. 8, tab. 4) aux flux critiques r_0 (col. 8, tab. 3) d'où les *flux supplémentaires* $r\Delta_1$ et les forces $Q=\Delta r_1 . \Delta L$, indiqués colonnes 8 et 9, planche 49 pour ces panneaux plissés en cisaillement pur (traction diagonale).

7.43 Calcul des efforts internes agissant sur le couple.

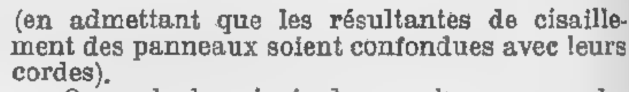
7.431 *Principe.* — Le système symétrique et symétriquement chargé est rendu isostatique par une coupure fictive suivant la section (1). Le principe général de calcul est identique à celui développé au paragraphe 7.3. Cependant, le couple étant d'inertie constante nous avons adopté, pour le calcul des inconnues hyperstatiques X et Y, une méthode entièrement numérique, en procédant par addition de produits partiels dans un tableau (au lieu de procéder par planimétrages de surfaces).

7.432 *Calcul du moment m.* — Nous avons séparé le moment m_1 dû aux actions provenant du galbe seul et les moments complémentaires dus aux forces Q.

Le moment m_1 est calculé selon le principe ci-dessous (différent de celui utilisé planche 48 A) [1]:

Le dynamique permet de faire apparaître pour chaque section la grandeur et la direction de la force F agissant au c. de g. de cette section (couple coupé). Considérons une section droite de rang i. Le moment m_1 agissant en cette section a pour expression (fig. 53) :

$$(m_1)_i=(m_1)_{i-1}+(F)_{i-1}\ d+r_1\ \delta$$



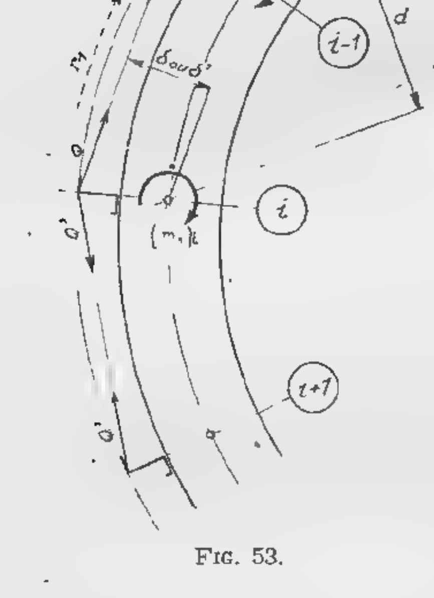


Fig. 53.

(en admettant que les résultantes de cisaillement des panneaux soient confondues avec leurs cordes).

On calcule ainsi de proche en proche (colonnes 10 à 15) le moment m_1 à l'aplomb de chaque section [2].

Le moment m a pour expression :

$$(m)_i=(m_1)_i+Q\ \delta'.$$

Selon que l'on considère la force Q s'exerçant dans l'intervalle

$$(i-1)-(i) \quad \text{ou} \quad (i)-(i+1),$$

on trouve deux valeurs de Q, respectivement valables immédiatement avant ou après la section (i) considérée (Voir colonnes 17, 18 et 21, 22).

7.433 *Détermination des inconnues* X *et* Y. — Pour effectuer l'intégration par tranches nous avons déterminé, colonne 19, les valeurs de m_1 moyen auxquelles on ajoute les valeurs $Q\delta'$ (colonne 18) pour trouver les valeurs m_m du moment s'exerçant au milieu de chaque intervalle entre sections droites.

Les termes nécessaires au calcul hyperstatique sont déterminés colonnes 24 à 29. Notons que a_1=bras de levier de Y par rapport au milieu d'un intervalle et que Δl_1=longueur de la fibre moyenne développée dans l'intervalle.

On obtient finalement les équations et les valeurs de X et Y indiquées planche 49.

1. — Les résultantes partielles R seraient, en effet, rejetées à de grandes distances pour les sections inférieures.

2. — Nous avons fait apparaître, sur le dynamique, la plus grande des deux résultantes F s'exerçant immédiatement avant ou après la section (introduction des forces radiales f). Le moment ne change pas de valeur pour l'une ou l'autre résultante.

7.434 *Efforts réels.* — Les moments de liaison αY sont déterminés au niveau de chaque section, d'où :

$$M = m + X + \alpha Y \qquad \text{(colonnes 33 et 34).}$$

Les efforts tranchants T. se déterminent d'une façon analogue à celle exposée au paragraphe 7.345 en faisant apparaître l'origine réelle O du dynamique. Aux efforts normaux déterminés d'après ce dynamique, il convient d'ajouter les forces Q pour les sections comprises au niveau de panneaux plissés (sections 4 à 7).

7.44 **Contraintes.** — Les caractéristiques de résistance du couple et ses contraintes maxima, atteintes dans la section 6, sont données planche 49.

8. CAS PARTICULIER DE FUSELAGES-COQUES DE SECTIONS CIRCULAIRES

8.0 GÉNÉRALITÉS.

Il existe de nombreux avions possédant des fuselages-coques dont les *sections droites* sont de forme circulaire. Nous verrons, d'ailleurs, au paragraphe suivant, que cette forme de sections présente des avantages incontestables, dans la réalisation des *fuselages étanches à l'air* (appareils dits stratosphériques).

Il est possible, moyennant les conditions constructives exposées ci dessous, d'établir, pour cette forme particulière de section, des *expressions algébriques* dont l'utilisation dispense des calculs « point par point » effectués dans les applications numériques ci-dessus [1].

Nous nous limiterons à exposer les *résultats* (formules algébriques) auxquels on est conduit. Nous distinguerons cependant deux cas s'apparentant aux deux méthodes de calcul exposées ci-dessus au paragraphe 6.2.

8.1 CONDITIONS D'APPLICATION. NOTATIONS GÉNÉRALES.

Les résultats ci-après concernent des sections de *forme circulaire* possédant une *paroi de revêtement d'épaisseur constante* et de *nombreuses lisses de même section* et *d'espacement constant.*

Nous désignerons, dans chaque section considérée par :

- R le rayon de la section,
- e l'épaisseur du revêtement,
- ΔS la section d'une lisse (lisse seule sans largeurs équivalentes de revêtement),
- Δl l'intervalle (curviligne) entre deux lisses consécutives : $\Delta l = \frac{2\pi R}{N}$

avec N = nombre de lisses de la section.

Le centre O de chaque section constitue donc un *centre de symétrie polaire* de la structure. Il s'en suit que les expressions ci-après sont valables *quel que soit le sens de flexion considéré* (orientation quelconque des efforts tranchants). Nous les supposerons, par exemple, verticaux.

Le grand nombre des lisses autorise à substituer à la section réelle (revêtement + lisses) une *section équivalente* correspondant à une *coquille théorique* (sans lisses) d'épaisseur fictive convenable. Les deux cas envisagés ci-après diffèrent entre eux de par l'expression ou la variation de cette épaisseur fictive le long du contour d'une même section.

8.2 PREMIER CAS : COQUE CIRCULAIRE THÉORIQUE D'ÉPAISSEUR CONSTANTE.

8.21 **Conditions.** — En dehors d'une coque théorique proprement dite, ce cas s'applique à la section définie ci-dessus, dans les deux conditions particulières suivantes :

---

1. — On peut également établir des expressions algébriques pour des *sections de forme elliptique régulière*, mais, outre que ces sections sont rares, les formules correspondantes sont de forme complexe et leur utilisation devient, en fait, plus laborieuse que les calculs points par points.

a) Le revêtement reste *entièrement stable* sur le pourtour de la section (revêtement très épais ou efforts faibles), voir figure 54 *a* [1].

b) On admet pour le calcul (en première approximation) la *première méthode* définie au paragraphe **6.22**. On suppose donc que le revêtement ne participe à la transmission des contraintes normales de flexion, que sous forme de *largeurs équivalentes identiques* pour les lisses comprimées ou tendues (fig. 54 *b*).

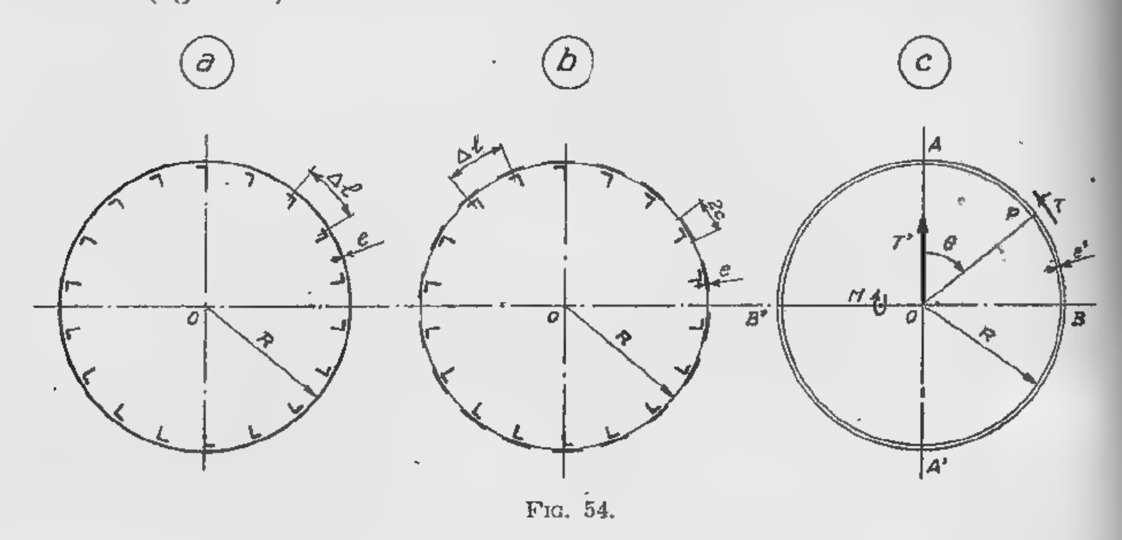


FIG. 54.

8.22 Caractéristiques de résistance. — Dans l'une ou l'autre hypothèse, désignons par 2 *c* la largeur de revêtement intéressée par une lisse [2].

L'épaisseur fictive de la coque théorique équivalente (sections des lisses supposées réparties, figure 54 *c*) est donc :

$$e' = \frac{\Delta S + 2\,c\,e}{\Delta l}.$$

Le *moment d'inertie* de flexion (autour d'un diamètre quelconque) a pour expression (voir Planche 2) :

$$I = \pi R^2 e'.$$

8.23 Expressions des contraintes de flexion. — Soient T′ l'effort tranchant réduit appliqué à la section (orientation quelconque) et M le moment fléchissant correspondant (vecteur normal à T′).

Envisageons un point P quelconque du contour, défini par l'angle θ (fig. 54 *c*). On obtient en ce point :

Contrainte normale de flexion :

$$n = \frac{M}{\pi R^2 e'} \cos \theta.$$

Flux de cisaillement :

$$\tau = \frac{T'}{\pi R} \sin \theta.$$

Contrainte de cisaillement (revêtement réel seul) :

$$t = \frac{\tau}{e} = \frac{T'}{\pi R e} \sin \theta.$$

1. — Cette condition est très rare, en pratique.

2. — Dans la condition *a*) on a : $2c = \Delta l$.

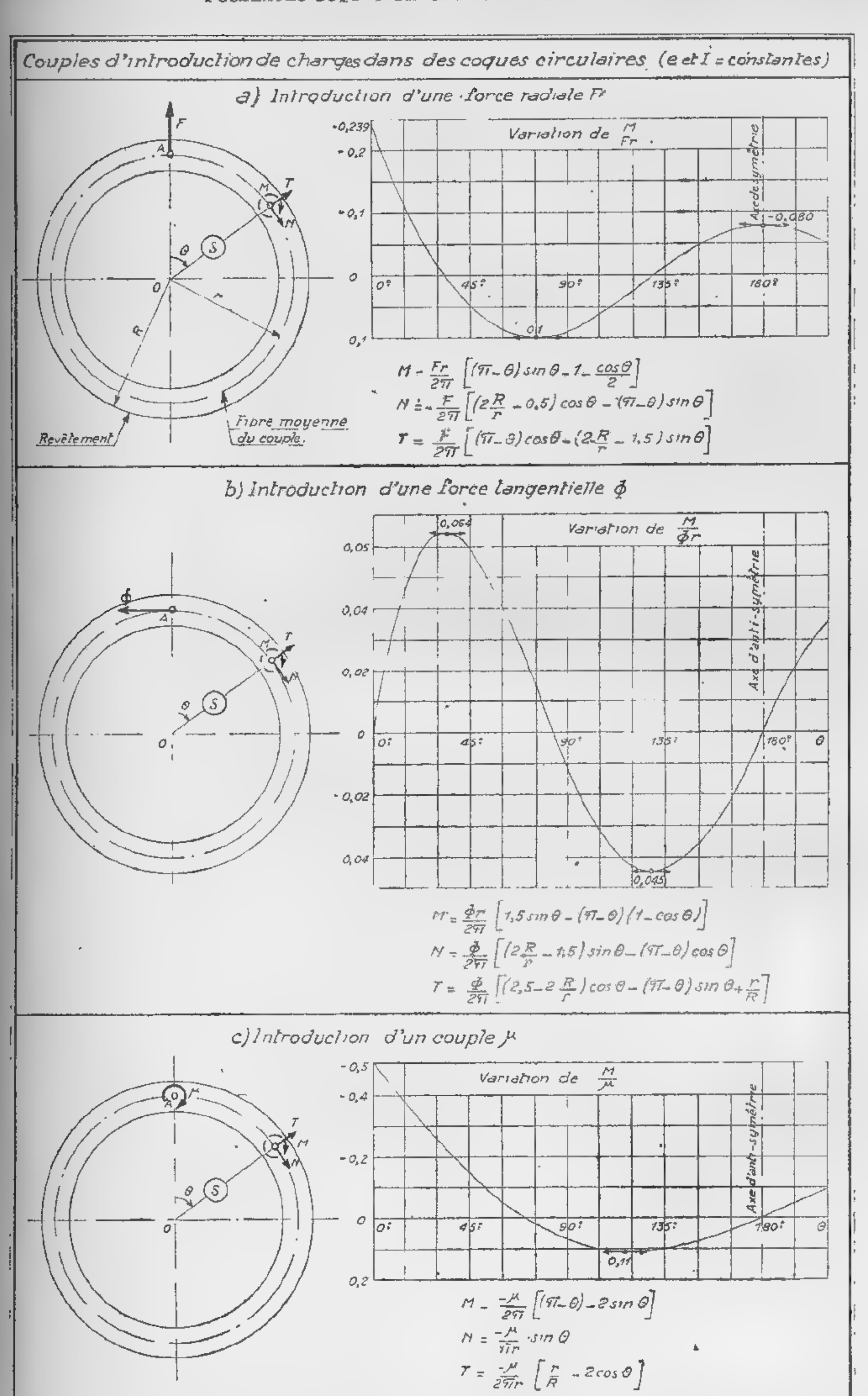


Fig. 55 (voir § 8.24 page suivante).

Contraintes maxima.

Contraintes normales en A et A' :

$$n_{max} = \pm \frac{M}{\pi R^2 e'} ;$$

Contrainte de cisaillement en B et B' :

$$t_{max} = \frac{T'}{\pi R e} .$$

8.24 Calcul des couples d'introduction de charges. — Quand les couples sont constitués par de simples *anneaux circulaires d'inertie constante* (sans traverse intermédiaire) et qu'ils sont sollicités en un point A quelconque situé sur leur axe neutre, il est possible d'établir des formules algébriques simples donnant directement en chaque section, la valeur des efforts internes M, N et T dus à leur rôle de répartiteurs de charges sur le revêtement.

Nous donnons, figure 55 (page précéd.), les expressions et les courbes de variation de ces efforts dans trois cas de charge distincts :

a) Introduction d'une force F radiale ;

b) Introduction d'une force Φ tangentielle ;

c) Introduction d'un couple μ.

Remarquons que l'introduction d'une *force d'orientation quelconque* agissant en un point A avec un certain *bras de levier* peut s'étudier en combinant les trois cas ci-dessus.

8.3 DEUXIEME CAS : COQUE CIRCULAIRE THÉORIQUE A DEUX EPAISSEURS.

8.31 Conditions de réalisation, hypothèses. — Quand on applique à une section circulaire, telle que celle définie ci-dessus, paragraphe **8.1**, la *deuxième méthode de calcul* exposée au paragraphe **6.23**, on est amené à considérer deux épaisseurs différentes pour la coque théorique circulaire équivalente, soit (fig. 56 *a* et 56 *b*) :

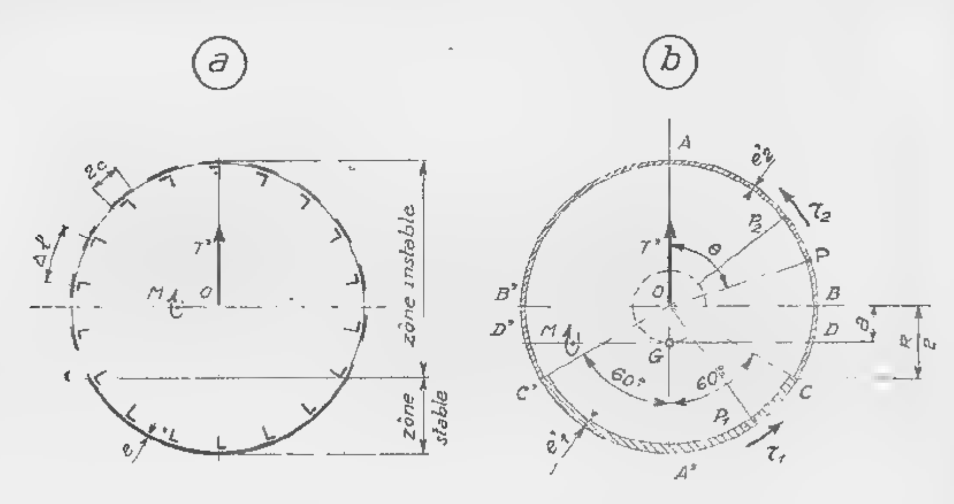


Fig. 56.

— Dans la *zone stable* (où tout le revêtement réel participe à la transmission des efforts de traction) :

$$e'_1 = \frac{\Delta S + e \cdot \Delta l}{\Delta l} = e + \frac{\Delta S}{\Delta l} .$$

— Dans la *zone instable* (où le revêtement ne participe, fictivement, que sous forme d'une largeur équivalente 2 c affectée à chaque lisse) :

$$e'_2 = \frac{\Delta S + 2\,c\,e}{\Delta l}.$$

Nous avons vu que la délimitation exacte de ces deux zones devrait s'effectuer, par approximations, dans chaque cas de charge.

Les formules ci-après sont établies *en admettant forfaitairement que la zone stable occupe un tiers du pourtour de la section* [1], c'est-à-dire qu'elle est délimitée par un angle COC′ égal à $2\pi/3 = 120°$ (fig. 56 *b*). Notons que les points C et C′ sont situés à une distance R/2 du diamètre BB′, normal à la direction de T′.

8.32 Caractéristiques de résistance. — *L'axe neutre de flexion* DD′ est décalé, par rapport à BB′ (fig. 56 *b*), d'une distance a ayant pour expression :

$$a = \frac{3R\sqrt{3}}{2\pi}\,\frac{e'_1 - e'_2}{e'_1 + 2e'_2} = 0{,}827\,R\,\frac{k-1}{k+2}$$

en posant : $k = \dfrac{e'_1}{e'_2}$ (caractéristique de section).

Ce décalage est orienté vers la zone stable, c'est-à-dire vers les parties tendues par le moment fléchissant M. Remarquons que, si le sens de flexion varie, l'axe neutre reste normal à T′ et tangent à un petit cercle de rayon a.

Le *moment d'inertie* I de la section résistante, par rapport à l'axe de flexion DD′ est donné par :

$$I = R^3\left[\frac{\pi}{3}\,(e'_1 + 2\,e'_2) + (e'_1 - e'_2)\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{2\pi}\,\frac{e'_1 - e'_2}{e'_1 + 2\,e'_2}\right)\right]$$

soit :

$$I = e'_2\,R^3\left[1{,}047\,(k+2) + (k-1)\left(0{,}433 - 1{,}432\,\frac{k-1}{k+2}\right)\right].$$

8.33 Contraintes normales de flexion. — En un point P du contour (fig. 56 *b*), la contrainte normale de flexion est donnée par :

$$n = \frac{M}{I}\,(R\cos\theta + a)$$

(avec n positif en compression).

Contraintes normales maxima :

en A (compression) :

$$n_{c\max} = \frac{M}{I}\,(R + a)$$

en A′ (traction) :

$$n_{t\max} = \frac{M}{I}\,(R - a).$$

8.34 Flux et contraintes de cisaillement.

8.341 *Flux dans la zone stable.* — En un point P_1 défini par l'angle θ compté à partir de A $\left(\theta > \dfrac{2\pi}{3}\right)$ on obtient :

$$\tau_1 = \frac{T'\,R\,e'_1}{I}\,(R\sin\theta + a\theta - A) \qquad \text{(avec } \theta \text{ en radians)}$$

1. — On constate, en pratique, avec les épaisseurs usuelles de revêtement et les grandeurs relatives de T et M que cette hypothèse conduit, en général, à des résultats légèrement défavorables.

en posant :

$$A = \frac{e'_1 - e'_2}{e'_1} \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi a}{3} \right) = \frac{k-1}{k} (0{,}866\ R + 2{,}094\ a).$$

8.342 *Flux dans la zone instable.* — En un point P_2 (θ compris entre 0 et $\frac{2\pi}{3}$) on obtient :

$$\tau_2 = \frac{T'}{I} R\, e'_2\ (R \sin \theta + a\theta) \quad \text{(avec } \theta \text{ en radians).}$$

Aux points de transition C ou C' on obtient :

$$\tau_c = \frac{T'}{I} R\, e'_2 \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi a}{3} \right) = \frac{T'}{I} R\, e'_2\ (0{,}866\ R + 2{,}094\ a).$$

8.343 *Flux maximum.* — Le flux est maximum en D ou D' au niveau de l'axe neutre. En désignant par θ_0 l'angle AOD, c'est-à-dire en posant :

$$\cos \theta_0 = -\frac{a}{R}$$

on obtient la valeur de τ_{max} à l'aide de l'une ou l'autre des expressions de τ_1 ou de τ_2 ci-dessus, selon la position de D par rapport à C. En général, le point D est compris dans la zone instable [1]. On a alors :

$$\tau_{max} = \frac{T'}{I} R\, e'_2\ (R \sin \theta_0 + a\ \theta_0) \approx \frac{T}{I} R\, e'_2 \left[\sqrt{R^2 - a^2} + a \left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{R} \right) \right].$$

8.344 *Contraintes de cisaillement.* — En un point quelconque, la contrainte de cisaillement du revêtement réel est donnée par :

$$t = \frac{\tau}{e}$$

avec τ = flux en ce point. On a, en particulier :

$$t_{max} = \frac{\tau_{max}}{e}.$$

9. PROBLÈMES PARTICULIERS AUX FUSELAGES-COQUES ÉTANCHES A L'AIR (CABINES DES AVIONS STRATOSPHÉRIQUES)

9.0 GÉNÉRALITÉS.

Le vol aux hautes altitudes permet de réaliser un gain de performances appréciables, pour les appareils équipés de moteurs à compresseurs d'admission spécialement étudiés. Pour bénéficier de ces avantages, il devient nécessaire, notamment dans le cas des appareils commerciaux, de soustraire les passagers à l'influence de la dépression atmosphérique relative existant entre le sol (ou les faibles altitudes) et l'altitude du vol.

C'est pourquoi les fuselages des appareils dits « stratosphériques » ou « substratosphériques » [2] sont réalisés, totalement ou partiellement, sous forme de

---

1. — Pour qu'il soit compris dans la zone stable il faudrait : $k > 5{,}6$, soit : $e'_1 > 5{,}6\ e'_2$.

2. — Les appareils commerciaux à cabines étanches, réalisés actuellement, appartiennent, en fait, à la catégorie des « substratosphériques ». Leurs altitudes de vol varient, en effet, entre 6.000 et 10.000 m, alors que la stratosphère proprement dite ne débute qu'à 11.000 m (atmosphère standard).

cabines étanches à l'air, ou, plus précisément, de « *cabines à pression intérieure rétablie* »[1]. Il existe à l'intérieur de ces cabines, une pression p_1 supérieure à la pression ambiante p_0, d'où une *pression effective*, $\Delta p = p_1 - p_0$ (chap. VI, § 5.1) agissant dans le sens d'un gonflement.

Les structures des fuselages, ainsi réalisés, ont à supporter les efforts dus à cette pression effective, *en supplément* à leurs efforts généraux normaux à l'altitude du vol.

Pour calculer ces suppléments d'efforts, on convient d'adopter une *pression de calcul* p qui est égale à la pression effective Δp, amplifiée par un certain *coefficient de sécurité* c[2]. Nous ne nous occuperons, en principe, que de cette pression de calcul : $p = c\Delta p$.

Nous nous limiterons à l'examen succinct des principaux problèmes de résistance des matériaux posés par la transmission de ces efforts supplémentaires dus à la pression et par leur combinaison avec les efforts généraux.

Mentionnons seulement que des problèmes, non moins capitaux, se posent en ce qui concerne l'étanchéité de la cabine, l'alimentation et le conditionnement de l'air, le maintien de la température, le rétablissement de la puissance des moteurs aux hautes altitudes, etc...

9.1 PRINCIPES GÉNÉRAUX DE CONSTRUCTION DES FUSELAGES ÉTANCHES.

Il apparaît clairement que les structures en *coques multi-lisses* s'imposent pour la réalisation des cabines étanches.

La *forme des sections droites* de ces structures exerce une influence capitale sur la grandeur des contraintes engendrées par la pression interne.

La solution la plus utilisée consiste à réaliser des cabines dont les *sections droites sont de forme circulaire*. Nous savons que l'intérêt essentiel présenté par cette solution est d'obtenir des sections droites de « *forme stable* » sous l'action de la pression (chap. VI, § 5.3). Les fermetures extrêmes de ces cabines sont avantageusement réalisées par des *surfaces de révolution* (calottes sphériques ou fragments de calottes sphériques, paraboloïdes, cônes, etc...). Remarquons que l'ensemble du fuselage ne constitue pas toujours un corps de révolution. La recherche d'une meilleure forme aérodynamique peut, en effet, conduire à incurver la ligne des centres (fig. 57 *a*). Des nécessités d'aménagement (logement d'un atterrisseur tricycle) peuvent également conduire à briser cette ligne vers l'avant (fig. 57 *b*).

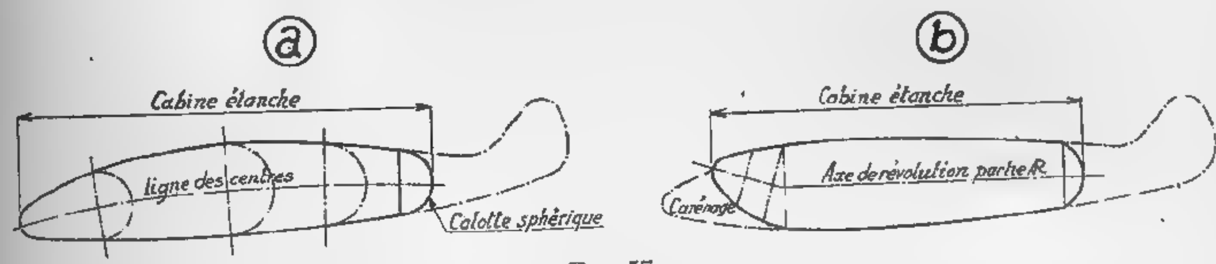


FIG. 57.

Des considérations analogues à celles ci-dessus (forme extérieure ou aménagements) ont conduit à réaliser des cabines étanches dont les sections droites sont composées de deux cercles raccordés extérieurement par un

1. — Ces cabines sont alimentées, en permanence, par des compresseurs d'air, ce qui a pour effet de compenser les inévitables défauts d'étanchéité. Des soupapes tarées maintiennent à une valeur fixée la pression intérieure qui est, en général, celle existant à de faibles altitudes (1.500 à 2.500 m).

2. — Le règlement de calcul français (Norme 2004-C) impose comme coefficient de sécurité pour cette pression qui constitue une « charge sûre », un coefficient égal à 4/3 pour obtenir les « charges limites » (ou charges de limite élastique), ce qui correspond à un coefficient égal à 2 pour les « charges extrêmes » (ou charges de rupture).

carénage et complétés intérieurement par une surface plane, non étanche, servant de plancher (*sections bi-circulaires* ou *lobées*, voir fig. 58).

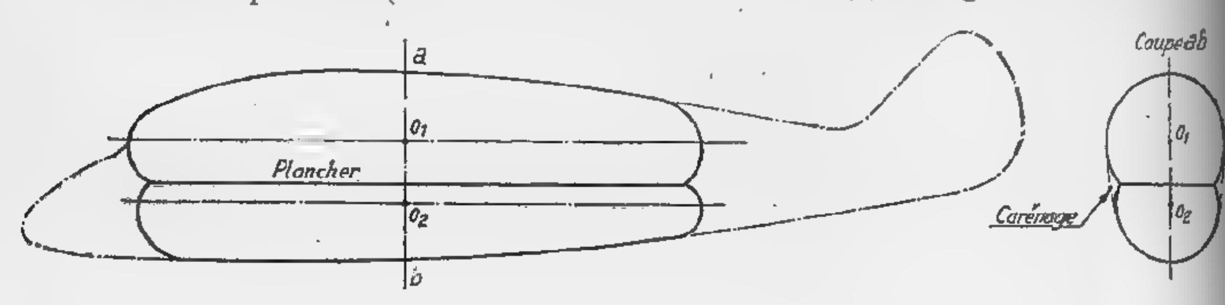


FIG. 58.

On a enfin réalisé des cabines étanches sans modifier les formes générales du fuselage (*sections d'allure elliptique* par exemple).

Nous examinerons successivement les contraintes des parois et des couples dans ces trois cas.

9.2 CALCUL SIMPLIFIÉ DES PAROIS (REVÊTEMENT ET LISSES) SOUS L'ACTION DE LA PRESSION INTÉRIEURE SEULE.

9.21 Sections circulaires.

9.210 *Remarque préliminaire.* — Nous avons déterminé au chapitre VI (§ 5.4) les contraintes supportées par les parois d'une *enveloppe cylindrique mince* soumise à une pression interne p, soit :

contrainte de traction dans le sens transversal : $n_1 = \dfrac{pR}{e}$

contrainte de traction dans le sens longitudinal : $n_2 = \dfrac{n_1}{2} = \dfrac{pR}{2\ e}$.

Rappelons que, pour établir ces formules, nous avons supposé :

a) l'épaisseur de l'enveloppe très mince ;
b) l'enveloppe libre de se dilater, c'est à dire, sans maillage longitudinal (lisses) ou transversal (couples).

La première hypothèse reste admissible pour les parois des fuselages étanches dont l'épaisseur est très faible vis-à-vis du rayon.

Il serait, par contre, trop désavantageux de ne pas tenir compte des lisses.

La méthode de calcul que nous exposons ci-après est une méthode approchée simple traduisant un *équilibre d'ensemble* des sections transversales et longitudinales (même principe qu'au chapitre VI, § 5.4).

Elle néglige l'influence des flexions locales dues aux inégalités de déformation, du revêtement et du maillage (Voir ci-après, § 9.4).

Elle peut être utilisée pour un premier calcul de dimensionnement.

9.211 *Contraintes longitudinales.* — Désignons, dans une *section transversale* (fig. 59) par :

N le nombre de lisses dont chacune a une section droite ΔS ;
e l'épaisseur du revêtement de rayon R ;
α l'angle d'inclinaison de la paroi sur une normale à la section.

On obtient, en supposant que les lisses et le revêtement travaillent au même taux de contrainte [1].

Contrainte de traction longitudinale du revêtement et des lisses :

$$n_l = \frac{p\ \pi\ R^2}{(2\ \pi\ R\ e + N\ \Delta S)\cos\alpha}$$

1. — Cette hypothèse est désavantageuse pour les lisses.

soit, en faisant apparaître « l'épaisseur équivalente » e'_1 de la paroi tendue (§ 8.31) :

$$e'_1 = e + \frac{\Delta S}{\Delta l} \left(\text{avec } \Delta l = \text{intervalle entre lisses} = \frac{2\pi R}{N} \right).$$

$$\boxed{n_l = \frac{pR}{2\, e'_1 \cos \alpha}}$$

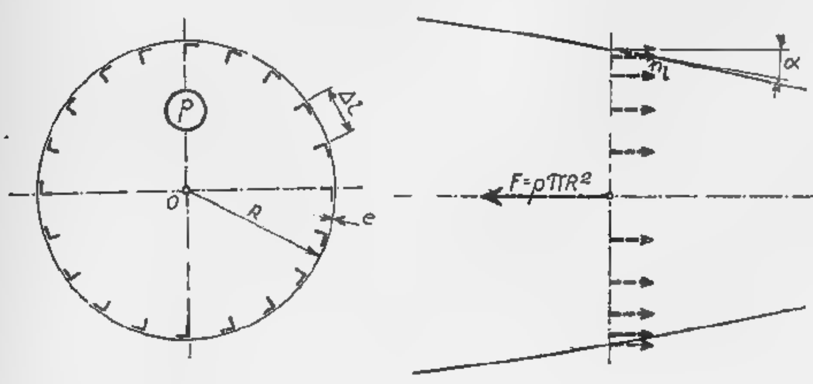


FIG. 59.

9.212 *Contrainte transversale.* — Les couples étant généralement beaucoup plus espacés que les lisses, et leur liaison au revêtement n'étant pas toujours réalisée, on peut admettre d'une façon défavorable pour le calcul du revêtement, que celui-ci transmet la totalité de l'effort agissant dans une section longitudinale. On obtient ainsi une *contrainte de traction transversale de la tôle de revêtement* :

$$\boxed{n_t = \frac{p\,R}{e}.}$$

Les lisses ne supportent évidemment aucune contrainte dans ce sens.

9.213 *Influence d'un galbe longitudinal.* — Quand la ligne des centres O des sections droites circulaires est incurvée (cas de la figure 57 *a*), la force longitudinale $F = p\pi R^2$ (fig. 59) appliquée à l'ensemble d'une section reste toujours appliquée en O et normale à cette section (chap. VI, § 5.3). On en déduit donc, par raison de symétrie polaire, que tous les points de la paroi subissent encore la même contrainte de traction longitudinale uniforme n_l. Un galbe longitudinal n'exerce donc aucune influence sur la répartition des contraintes, contrairement à une opinion très répandue.

9.22 Sections bi-circulaires.

9.221 *Équilibre d'une section droite* (fig. 60). — Au point de raccordement A, un élément de longueur égale à 1 (dimension comptée longitudinalement) reçoit les forces suivantes :

— De la part de la paroi supérieure, une force :

$$f_1 = p\ R_1 \text{ normale à } O_1A\ ;$$

— De la part de la paroi inférieure, une force :

$$f_2 = p\ R_2 \text{ normale à } O_2A.$$

Ces deux forces ont pour projections verticales :

$$f_1 \cos \beta_1 = p\ R_1 \cos \beta_1 \quad \text{et} \quad f_2 \cos \beta_2 = p\ R_2 \cos \beta_2$$

Or,

$$R_1 \cos \beta_1 = R_2 \cos \beta_2 = AH = \frac{d}{2}$$

donc :

$$f_1 \cos \beta_1 = f_2 \cos \beta_2.$$

La résultante f_3 est donc dirigée suivant AA' :
Elle a pour valeur :

$$f_3 = f_1 \sin \beta_1 + f_2 \sin \beta_2 = p\ (R_1 \sin \beta_1 + R_2 \sin \beta_2)$$

soit :

$$f_3 = p\ h$$

en désignant par h la distance O_1O_2.

Cette force f_3 s'équilibre par une force égale et opposée en A'.

On voit ainsi que la présence d'une cloison horizontale AA' (non étanche) est nécessaire tout le long de la cabine [1] pour stabiliser les sections droites.

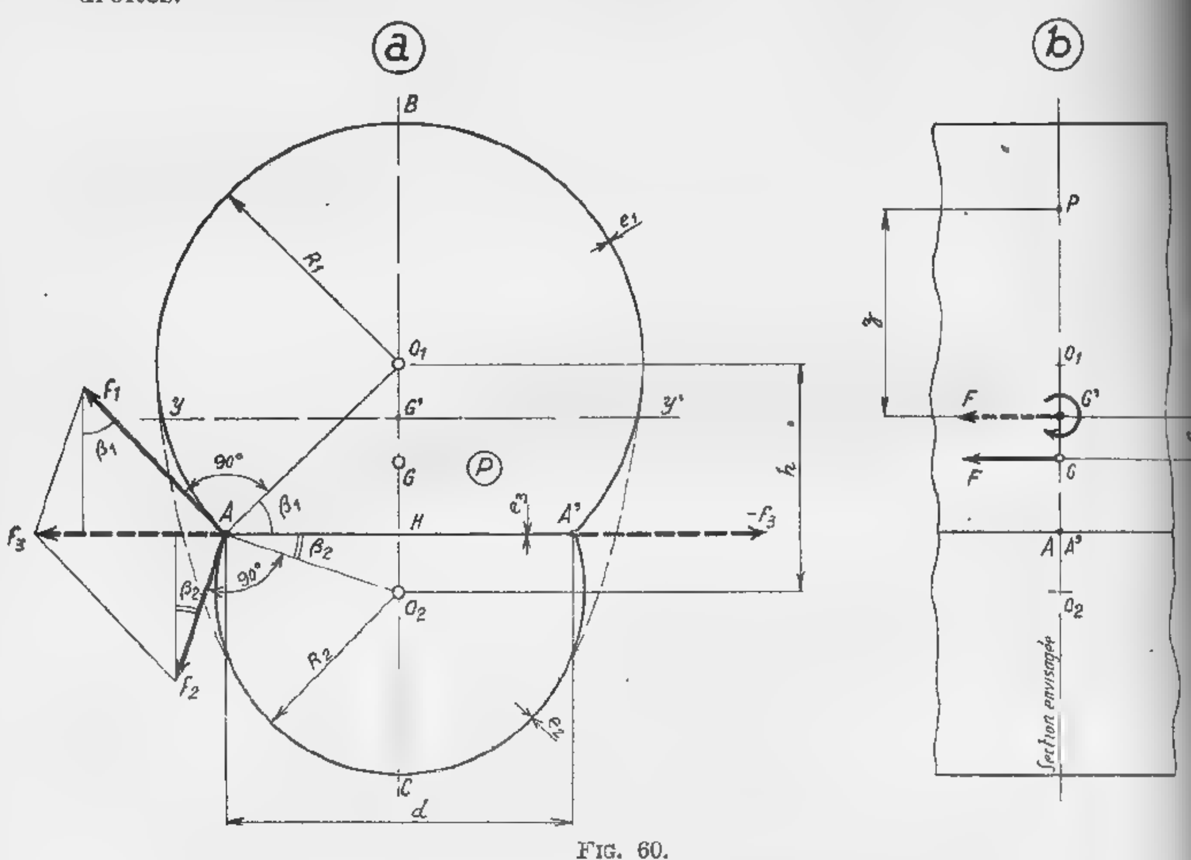


Fig. 60.

9.222 *Contraintes transversales.* — Revêtement supérieur ABA' :

$$n_{t1} = \frac{f_1}{e_1} = \frac{p\ R_1}{e_1}.$$

Revêtement inférieur ACA' :

$$n_{t2} = \frac{f_2}{e_2} = \frac{p\ R_2}{e_2}.$$

Cloison AA' :

$$n_{t3} = \frac{f_3}{e_3} = \frac{p\ h}{e_3}.$$

1. — Cette cloison pourrait néanmoins être remplacée par des cadres horizontaux possédant une rigidité suffisante.

9.223 *Contraintes longitudinales.* — La force longitudinale totale à équilibrer par les différents éléments d'une section droite est

$$F = p\Omega$$

avec Ω = surface délimitée par le contour de cette section (contour ABA'CA fig. 60).

On a donc

$$F = \frac{p}{2}\left[(\pi+2\beta_1)R_1^2+(\pi+2\beta_2)R_2^2+d\,h\right]$$

(avec β_1 et β_2 en radians).

Cette force F est appliquée au centre de gravité G de l'aire Ω (chap. VI, § 5.2).

Elle engendre des contraintes longitudinales de tous les éléments résistants « traversant » la section considérée (cloison AA' comprise, si celle-ci est rigidement liée aux fonds). La répartition de ces contraintes est un problème qui ne peut pratiquement être résolu qu'en faisant appel à des hypothèses.

Il semble que l'on puisse admettre que les sections droites restent planes. En désignant par δ la distance entre les centres de gravité G de l'aire Ω et G' de la section S de l'ensemble des éléments résistants, on obtient ainsi (fig. 60 *b*) :

Contrainte de traction uniforme : $n_{l_1} = \dfrac{F}{S}$.

Contrainte de flexion due au moment transport : $\mu = F\delta$: $n_{l_2} = \dfrac{F\delta}{I_{yy'}}\,z$.

Contrainte longitudinale totale : $n_l = n_{l_1} + n_{l_2}$.

9.23 **Sections quelconques.** — Chaque « panneau » du maillage constitué par les couples et les lisses doit être étudié isolément, en l'assimilant à une plaque mince de courbure cylindrique (chap. XVII, § 5.2).

Rappelons qu'une expression approchée de la *tension transversale* est toujours donnée par :

$$n_t = p\,\frac{R}{e}$$

avec R = rayon de courbure moyen du panneau d'épaisseur *e*.

La tension longitudinale peut s'étudier comme ci-dessus. Si un panneau est plan, on lui appliquera les théories relatives aux *plaques planes minces* ou aux *membranes planes* (chap. XVII, §§ 4. et 3.).

9.3 CALCUL DES COUPLES.

9.31 **Sections circulaires.** — Les couples sont entraînés par le revêtement dans sa dilatation (accroissement du rayon R) due à la tension transversale n_t.

Un *couple courant* constitué par un simple anneau de section constante S_c et sans traverse, subit de ce fait une *contrainte de traction constante* n_c.

Pour déterminer cette contrainte, on peut supposer d'une manière défavorable pour le couple, que celui-ci participe à la résistance à l'éclatement transversal, au même titre que la paroi. On obtient ainsi l'expression simple :

$$n_c = \frac{p\,R\,\Delta L}{e\,\Delta L + S_c} = \frac{p\,R}{e + \dfrac{S_c}{\Delta L}}$$

avec ΔL = intervalle entre couples et e = épaisseur du revêtement de rayon R.

Un *couple de section non constante* ou possédant des *liaisons supplé-*

mentaires (traverse par exemple) ne peut, en théorie, subir exclusivement une contrainte de traction constante. En pratique, on peut se contenter de calculer la contrainte de traction en chaque point à l'aide de la formule ci-dessus (avec S_c = section du couple au point considéré), en négligeant la flexion supplémentaire due à l'incompatibilité des déformations du revêtement et du couple.

Remarque. — Voir au chapitre VI, paragraphe **5.532**, les sollicitations complémentaires appliquées à un couple situé à l'aplomb du raccordement d'un fond sphérique.

9.32 Sections bi-circulaires. — On démontre que si la traverse AA' (fig. 60 *a*) est encastrée, les couples courants ne travaillent également qu'en traction pure. Le principe de calcul est analogue à celui ci-dessus.

9.33 Sections quelconques. — Dans cette solution, les couples jouent un rôle primordial, car ils doivent, par *flexion*, s'opposer aux changements de forme des sections droites qui tendent à devenir circulaires sous l'action de la pression. Pour les calculer, on peut admettre (défavorablement) que chaque couple stabilise une tranche d'envergure égale à la distance ΔL entre couples. On calcule ainsi les *actions radiales* des lisses (fig. 61 *a*) :

$$\varphi = p\ \Delta l' \cdot \Delta L$$

(avec $\Delta l'$ = moyenne des intervalles Δl entre lisses adjacentes).

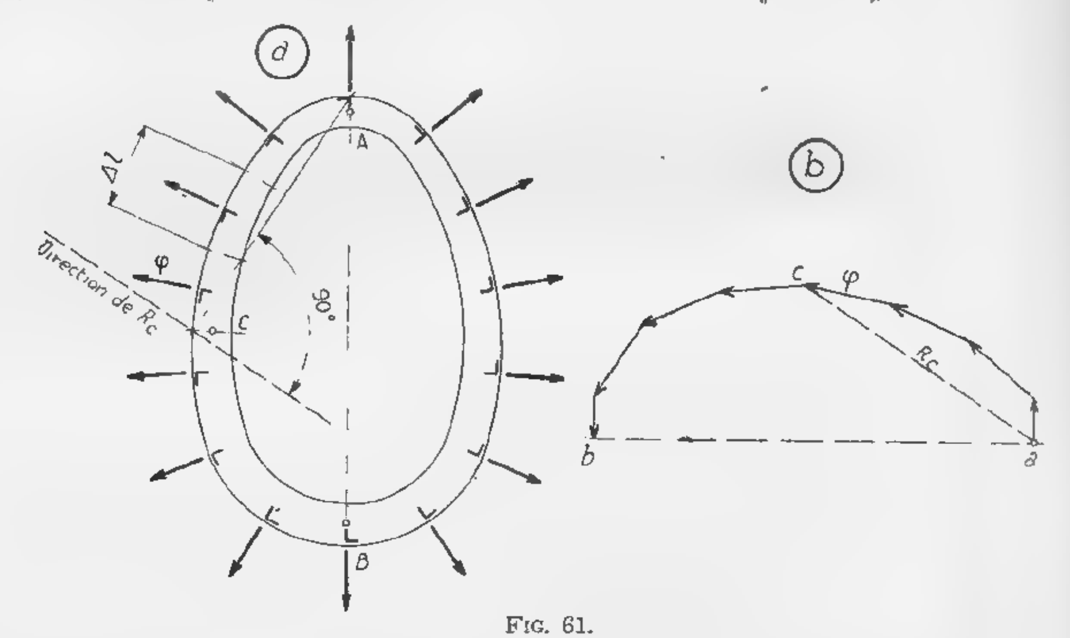


Fig. 61.

La figure 61 *b* représente le *dynamique* des forces φ agissant sur le demi-couple côté gauche (supposé coupé en A). Ce dynamique reproduit à une échelle près le contour de la section (avec une rotation de 90°) [1].

Remarquons que l'ensemble des forces φ forme un système nul (fermeture du dynamique en *a* pour la section totale).

Le couple se calcule selon la méthode habituelle, sous l'action de ces forces φ.

On constate qu'il subit des *efforts de flexion* d'autant plus importants que la forme de la section s'éloigne de la forme circulaire. Ils sont égale-

1. — La *direction* de la résultante partielle intéressant une section C est donc normale à AC. Sa ligne d'action réelle se détermine selon la méthode habituelle.

ment tendus et cisaillés. *Les cabines étanches de sections non circulaires nécessitent donc des couples serrés et robustes.* On les a pratiquement abandonnées par suite du supplément de poids qui en résulte.

9.4 REMARQUE : INFLUENCE DES DÉFORMATIONS LOCALES.

Considérons une *cabine cylindrique de rayon* R.

Si cette cabine ne comportait pas de couples (ou si ceux-ci n'étaient pas reliés rigidement aux parois), toutes les sections droites subiraient une même dilatation de rayon (fig. 62 *a*) donnée par :

$$\Delta R = \frac{n_t R}{E}\left(1 - \sigma \frac{n_l}{n_t}\right)$$

avec σ=coefficient de Poisson=0,3 pour les tôles AU4G [1].

La cabine resterait donc cylindrique.

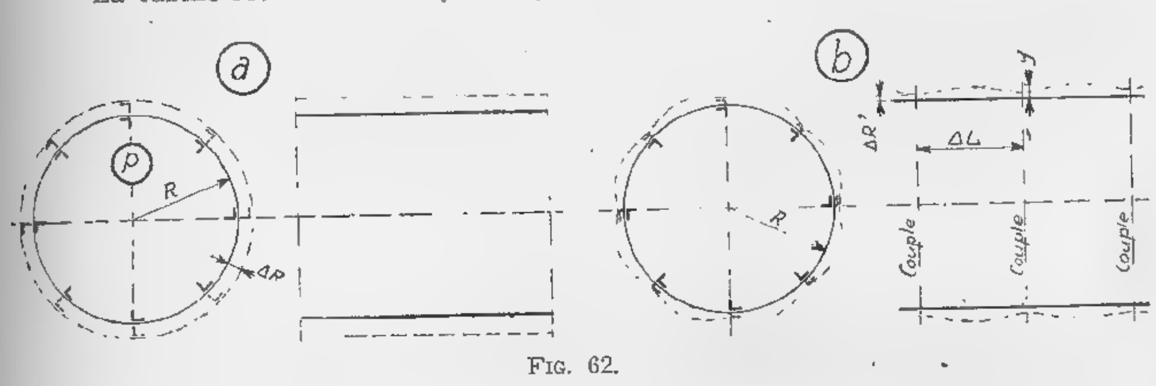


Fig. 62.

Quand il existe des couples liés rigidement aux parois, ils subissent, avec nos conventions du paragraphe **9.31**, une dilatation absolue

$$\Delta' R = \frac{n_c R}{E}.$$

Cette dilatation est, en général, inférieure à ΔR.

Il s'en suit des *déformations locales* de chaque panneau, analogues à celles schématisées par la figure 62 *b* [2].

Notons que la *flèche relative du centre d'un panneau* par rapport aux couples est *inférieure* à la différence $(\Delta R - \Delta' R)$, par suite de « l'influence réductrice » exercée par la traction de la tôle sur chaque couple (Voir chapitre XVII, § **4.**).

La flèche relative y du centre d'une lisse par rapport à ses appuis sur les couples est donc, à fortiori, inférieure à cette différence.

Notons qu'un calcul « exact » de cette flèche relative est un problème fort laborieux. Il est *très défavorable* de poser :

$$y = \Delta R - \Delta' R.$$

Les tôles de revêtement étant toujours très minces, on peut négliger leurs rigidités et donc leurs contraintes de flexion propres.

Par contre, l'allure « sinusoïdale » imposée aux lisses engendre des *contraintes complémentaires de flexion* qui peuvent ne pas être négligeables.

On peut adopter la méthode suivante, qui revient à considérer chaque lisse comme une poutre continue sur N appuis, chargée uniformément par une certaine charge donnant une flèche y entre appuis :

---

1 — L'introduction du coefficient de Poisson, provient de ce que la paroi est soumise longitudinalement à une contrainte de traction n_l, simultanément à la contrainte transversale n_t.

Nous avions négligé cette correction au chapitre VI, § **5.52**.

2. — L'aspect du revêtement est (en exagérant fortement) comparable à celui d'un édredon. En se basant sur cette analogie, on désigne parfois ces déformations locales par « *effet de piqué* ».

Une charge répartie q donne :

— une flèche $y' = \frac{q \Delta L^4}{384 \text{ E } i}$ (chap. XVIII, § 4.44 et planche 33, cas 11),

— et une contrainte maximum de traction (entre appuis) $n'_f = \frac{q \Delta L^2}{24} \frac{1}{\frac{i}{v}}$

avec $\left(\frac{i}{v}\right)$ module d'inertie de la lisse, côté revêtement (côté tendu).

A une flèche y correspond donc une contrainte

$$n_f = n'_f \frac{y}{y'}, \quad \text{soit} \quad n_f = \frac{16 \text{ E } v}{\Delta L^2} y.$$

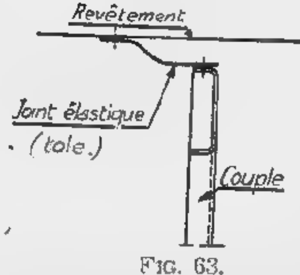


Fig. 63.

Insistons sur le fait qu'en utilisant l'expression donnée ci-dessus pour y on trouve pour n_f une valeur très désavantageuse.

Les raisonnements ci-dessus restent, qualitativement, valables pour les cabines non circulaires.

Mentionnons que, pour éviter les contraintes supplémentaires n_f, on a réalisé des cabines dans lesquelles les couples étaient liés élastiquement aux parois (fig. 63) [1].

9.5 SUPERPOSITION DES CONTRAINTES DUES A LA PRESSION INTERNE AVEC CELLES DUES AUX EFFORTS GÉNÉRAUX.

9.50 **Influence stabilisatrice de la pression intérieure.** — Nous savons que les efforts généraux appliqués au fuselage ont pour effet d'instabiliser (par compression et cisaillement) une certaine zone du revêtement mince de chaque section droite (§§ **6.21** et **8.31**).

Or, en superposant aux contraintes correspondantes, celles dues à la pression interne, on constate :

a) que la contrainte des éléments comprimés se trouve diminuée de la contrainte de traction longitudinale n_l,

b) que la contrainte de traction transversale n_t augmente la contrainte critique de plissement de chaque panneau (chap. XIX, § **2.24**).

La pression interne exerce donc une influence stabilisatrice sur les panneaux de revêtement mince de la cabine [2].

Il s'en suit que la « zone stable » sans pression se trouve augmentée par suite du « gonflement » du fuselage.

Remarquons que la délimitation exacte de cette nouvelle zone stable constituerait un problème laborieux, car il conviendrait toujours d'effectuer cette recherche par approximations, d'autant plus que les contraintes dues à la pression varient également avec l'importance de cette zone (voir ci-après). Il conviendrait également d'examiner chaque cas de charge. Il est donc pratiquement nécessaire de se fixer une *nouvelle délimitation forfaitaire des deux zones stable et instable.*

Dans les cas des *cabines de sections circulaires*, l'expérience montre, qu'avec les ordres de grandeur usuels des contraintes dues aux efforts généraux et à la pression, on peut, en général, se contenter *d'inverser les zones forfaitaires* adoptées ci-dessus au paragraphe **8.31**, c'est-à-dire de supposer

1. — Cette précaution paraît superflue étant donné la faiblesse des contraintes supplémentaires n_f. Les flèches mesurées y n'atteignent guère, en effet, que le quart de celles données par la formule défavorable ci-dessus.

2. — Cette influence tombe sous le sens commun : exemple d'une baudruche oblongue dont la rigidité en flexion s'accroît au fur et à mesure qu'on la gonfle.

que la zone stable occupe les deux tiers du pourtour de chaque section (figures 64 *a* et *b*). On peut encore, dans cette hypothèse, utiliser les formules algébriques données au paragraphe **8.3**, en ayant soin d'inverser l'origine et le sens des θ et de remplacer e'_1 par e''_1 et e'_2 par e''_2 tels que (notations § **8.31**) :

$$e''_1 = \frac{\Delta S + 2\ c'e}{\Delta l}\ ; \qquad e''_2 = e + \frac{\Delta S}{\Delta l}\ .$$

C'est cette hypothèse simple que nous admettrons dans les raisonnements ci-après.

Remarques. — *a*) La diminution des contraintes de compression des lisses, consécutive à la pression, a pour effet *d'augmenter les largeurs équivalentes* $2c'$ (avec pression) par rapport à $2c$ (sans pression) ;

b) L'influence stabilisatrice de la pression interne sur les panneaux de revêtement s'étudie d'une façon analogue à celle exposée au chapitre XIX, paragraphe **2.24**.

c) Pour chiffrer cette influence stabilisatrice de la pression interne, il y a lieu d'utiliser comme valeur de p, la pression effective réelle affectée d'un *coefficient de sécurité homogène à celui affectant les efforts généraux*. Ces efforts étant dus à des charges en vol, on peut admettre qu'ils tiennent compte d'un « coefficient de sécurité pure » égal à **1,5** à la rupture. On prendra donc une valeur de p égale à $1{,}5\ \Delta p$ pour effectuer ces calculs.

9.52 **Expression corrigée des contraintes longitudinales dues à la pression.** — Dans l'établissement des formules donnant la contrainte n_l nous avons implicitement, supposé que tout le revêtement participait à la transmission des efforts de traction longitudinaux dus à la pression interne. Or, en fait, cette hypothèse n'est valable que pour la *zone stable* définie forfaitairement ci-dessus.

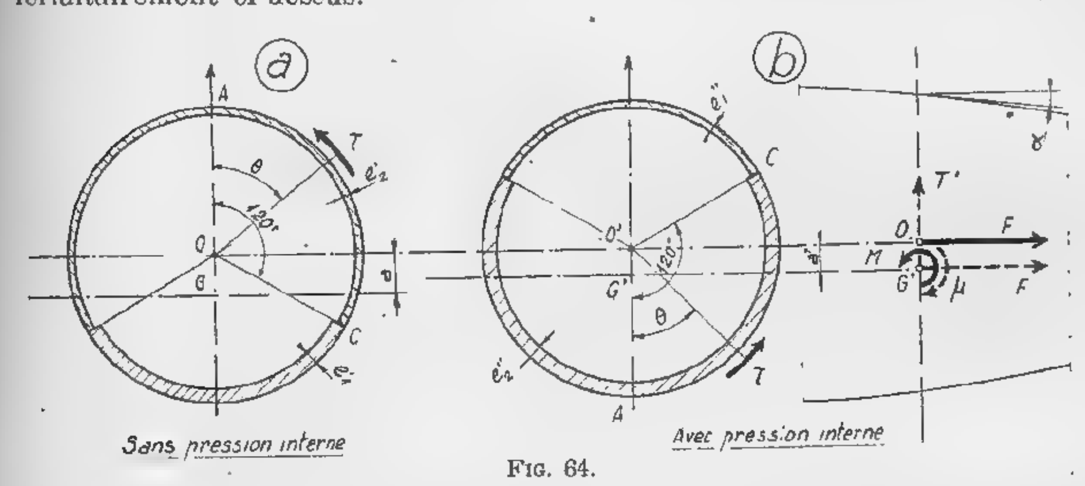


FIG. 64.

Dans la *zone instable*, seules les lisses et les largeurs équivalentes de revêtement (largeurs compte tenu de la pression), interviennent dans les sections travaillant longitudinalement.

Pour une *section circulaire*, *l'action* de la force longitudinale $F = p\pi R^2$ (fig. 64) se traduira finalement (hypothèse conforme à celle du paragraphe **9.223**) :

— Par une *contrainte de traction longitudinale uniforme*

$$n'_l = \frac{F}{S \cos \alpha} = \frac{3}{2} \frac{p\ R}{(e''_1 + 2\, e''_2) \cos \alpha} = \frac{3}{2} \frac{p\ R}{e''_2\ (k' + 2) \cos \alpha}$$

$$\left(\text{avec } k' = \frac{e''_1}{e''_2}\right)$$

— Par un *moment fléchissant correcteur*

$$\mu = Fa' = p\ \pi\ R^2\ a'$$

avec a'=décalage de l'axe neutre compte tenu de la pression (§ **8.32**).

Remarquons que le *sens du moment* μ *est opposé à celui du moment de flexion générale* M (fig. 64 *b*).

Le moment fléchissant corrigé vaut donc :

$$M' = M - \mu.$$

9.53 Contraintes combinées des parois.

9.531 *Lisses.* — Une lisse de cote z au-dessus de l'axe neutre (axe neutre corrigé) reçoit une *contrainte normale résultante* (positive en compression)

$$n_L = \frac{M'}{I'}\ z - n'_1$$

avec I'=moment d'inertie de flexion, compte tenu de l'influence stabilisatrice de la pression.

Pour une section circulaire on aura donc

$$n_L = \frac{M'}{I'}\,(R\ \cos\ \theta + a') - n'_1.$$

Il y a, éventuellement lieu d'ajouter, du côté tendu, la contrainte complémentaire n_t due aux déformations locales (§ **9.4**).

9.532 *Revêtement.* — Un point considéré du revêtement (point situé au niveau d'une lisse pour la zone instable) reçoit simultanément :

une contrainte normale longitudinale : $n_x = n_L$;
une contrainte de traction transversale : $n_y = n_t$ (voir ci-dessus) ;
une contrainte tangentielle : t (due aux efforts généraux de flexion et de torsion).

Nous avons donné au chapitre XV, paragraphe **4.32**, les *formules de combinaison* permettant de réduire ces trois contraintes partielles à une *contrainte normale équivalente* n_e à comparer avec la contrainte admissible en traction, afin de justifier la tenue des tôles de revêtement. Voir également les applications numériques effectuées aux paragraphes **2.23** et **4.33** de ce même chapitre XV [1].

9.6 APPLICATION NUMERIQUE CONCERNANT UNE SECTION CIRCULAIRE.

9.61 Données.

Section circulaire de rayon R=2,350 m. ; Revêtement e=1,25 mm ; cos α=1.
Lisses : nombre : N=80, section : ΔS=120 mm², espacement :

$$\Delta l = \frac{2\ \pi\ R}{N} = 184{,}6\ \text{mm.}$$

Moment fléchissant appliqué (au coefficient de calcul à la rupture) :

$$M = 375000\ \text{mkg.}$$

1. — Dans ces applications, nous avions supposé la contrainte de traction longitudinale, due à la pression, égale à la moitié de la contrainte de traction transversale. Nous nous étions ainsi placés dans le cas d'une enveloppe mince non raidie, c'est-à-dire d'une coque théorique.

Altitude du vol : 10.000 m (pression $p_o=0{,}270$ kg/cm²).
Pression intérieure rétablie : $p_1=0{,}770$ kg/cm² (pression à l'altitude de 2400 m.).
Pression effective : $\Delta p=0{,}770-0{,}270=0{,}5$ kg/cm².
Pression de calcul, à la rupture, au coefficient de sécurité 2 :

$$p=2\cdot 0{,}5=1 \text{ kg/cm}^2=0{,}01 \text{ kg/mm}^2.$$

9.62 **Caractéristiques de la résistance de la section.** — Nous admettrons les hypothèses exposées aux paragraphes 8.31 et 9.51 (délimitation des zônes stables).

9.621 *Sans pression interne* (§§ 8.31 et 8.32).

Nous adopterons une largeur équivalente [1] $2c=35e=43{,}75$ mm :

$$e'_1=1{,}25+\frac{120}{184{,}6}=1{,}9 \text{ mm} ; \qquad e'_2=\frac{120+43{,}75\cdot 1{,}25}{184{,}6}=0{,}946 \text{ mm} ;$$

$$k=\frac{1{,}9}{0{,}946}=2{,}008 ;$$

$$\frac{k-1}{k+2}=0{,}251 ; \ a=0{,}827\cdot 2350\cdot 0{,}251=488 \text{ mm} ;$$

$$I=0{,}946\cdot \overline{2350}^3\ [1{,}047\cdot 4{,}008+1{,}008\ (0{,}433-1{,}432\cdot 0{,}251)\ ]=524{,}3\cdot 10^8 \text{ mm}^4.$$

9.622 *Avec pression interne* (§ 9.31).

Adoptons une largeur équivalente : $2c'=44e=55$ mm [2] :

$$e''_1=\frac{120+55\cdot 1{,}25}{184{,}6}=1{,}0225 \text{ mm} ; \qquad e''_2=1{,}9 \text{ mm} ; \qquad k'=\frac{1{,}0225}{1{,}9}=0{,}538 ;$$

$$\frac{k'-1}{k'+2}=-0{,}182 ; \qquad a'=-0{,}827\cdot 2350\cdot 0{,}182=-353{,}7 \text{ mm} ;$$

$$I'=1{,}9\cdot \overline{2350}^3\ [1{,}047\cdot 2{,}538-0{,}462\ (0{,}433+1{,}432\ \ 0{,}182)]=576{,}23\cdot 10^8 \text{ mm}^4.$$

9.63 **Contraintes normales maxima de flexion, sans pression interne.**

En compression :

$$n=\frac{375\cdot 10^6}{524{,}3\cdot 10^8}\cdot(2350+488)=\mathbf{20{,}3 \text{ kg/mm}^2}.$$

En traction :

$$n=-\frac{375\cdot 10^6}{524\ 3\cdot 10^8}\ (2350-488)=-\mathbf{13{,}3 \text{ kg/mm}^2}.$$

9.64 **Contraintes dues à la pression interne.**

Traction longitudinale (§ 9.52) :

$$n'_l=-\frac{3}{2}\ \frac{0{,}01\cdot 2350}{1{,}9\cdot 2{,}538}=-7{,}3 \text{ kg/mm}^2.$$

Moment fléchissant correcteur :

$$\mu=-0{,}01\cdot 3{,}14\cdot \overline{2350}^2\cdot 0{,}3537=-6140 \text{ mkg}.$$

Traction transversale (§ 9.212) :

$$n_t=-\frac{0{,}01\cdot 2350}{1{,}25}=-18{,}8 \text{ kg/mm}^2.$$

1. — Valeur donnée par la formule simplifiée de KARMAN (ch. XIX. § 2.451) pour $n_{cr}=20{,}6$ kg/mm², valeur voisine de la contrainte max. de compression, sans pression.

2. — Valeur obtenue avec n_c max. = 13 kg/mm².

Nous négligerons les contraintes supplémentaires de flexion dues aux déformations locales des parois (§ 9.4). Nous supposerons donc les couples suffisamment déformables ou reliés élastiquement au revêtement.

9.65 Contraintes combinées des parois (avec pression interne).

9.651 *Contraintes normales maxima des lisses.*

Moment fléchissant résultant avec pression interne (§ 9.52) :

$$M' = 375000 - 6140 = 368860 \text{ mkg.}$$

Contrainte maximum de compression :

$$n_L = \frac{368860 \cdot 10^3}{576{,}23 \cdot 10^6} (2350 - 353{,}7) - 7{,}3 = 17{,}3 - 7{,}3 = \mathbf{10} \text{ kg/mm}^2.$$

Contrainte maximum de traction :

$$n_L = -\frac{368860 \cdot 10^3}{576{,}23 \cdot 10^6} (2350 - 353{,}7) - 7{,}3 = -12{,}8 - 7{,}3 = \mathbf{-20{,}1} \text{ kg/mm}^2.$$

9.652 *Contrainte normale équivalente du revêtement.*

Le calcul montre que cette contrainte est maximum au niveau de la lisse la plus comprimée (angle $\theta = \pi$, fig. 64 *b*) où l'on a :

$$n_x = n_L = +10 \quad ; \quad n_y = n_t = -18{,}8 \quad ; \quad t = 0$$

d'où (chap. XV, § 2.22) :

$$n_r = 18{,}8 + 10 = \mathbf{28{,}8} \text{ kg/mm}^2.$$

9.66 Remarques.

9.661 *Influence de la pression intérieure sur le dimensionnement général des parois.*

Faisons apparaître les *marges de sécurité* de la structure, au niveau de la section considérée, avec et sans pression intérieure. Fixons-nous, pour cela, les contraintes admissibles, à rupture, suivantes (valeurs usuelles) :

— en compression (valeur conditionnée par le flambage local et général des lisses entre couples) :

$$n_{ca} = 22 \text{ kg/mm}^2 ;$$

— en traction (valeur conditionnée par la limite de rupture du matériau, compte tenu de l'affaiblissement des sections dû aux trous de rivets) :

$$n_{ta} = 34 \text{ kg/mm}^2.$$

Nous trouvons ainsi :

sans pression une marge de sécurité (conditionnée par la compression) :

$$m = \frac{22 - 20{,}3}{20{,}3} = 8{,}35 \text{ \%} ;$$

avec pression une marge de sécurité (conditionnée par la traction) :

$$m' = \frac{34 - 28{,}8}{28{,}8} = 18 \text{ \%}.$$

On arrive ainsi au résultat, en apparence paradoxal, que l'*existence de la pression interne a eu pour effet d'accroître la marge de sécurité de la section considérée.*

Ce résultat est cependant quasi-général pour les *cabines étanches de sections circulaires ou bi-circulaires.* Il arrive fréquemment que *les parois de ces cabines soient finalement, dimensionnées par un cas de calcul en vol près du sol*[1].

---

1. — Les efforts de calcul en flexion générale du fuselage sont, en effet, généralement maxima en vol près du sol où « l'équivalent de vitesse » est maximum.

Remarquons que ce résultat se conserve également pour les *couples* circulaires (ou bi-circulaires) qui ne sont pratiquement soumis qu'à une traction du fait de la pression. Cette traction soulage donc les parties comprimées qui sont généralement celles qui échantillonnent ces éléments.

Il n'en est plus de même, par contre, pour les couples des sections de formes quelconques (§ 9.33).

9.662 *Influence de la pression intérieure sur la rigidité en flexion du fuselage.* — Avec les hypothèses admises, nous constatons que l'influence de la pression se traduit par une *augmentation* de la rigidité en flexion de la cabine (supposée de section constante), mesurée par le rapport :

$$\frac{I'-I}{I} = \frac{576,23-524,3}{576,23} \approx 10\%.$$

Ce résultat se trouve, qualitativement, constaté quand on effectue des mesures de déformations avec et sans pression sur des cabines étanches, au cours d'essais statiques [1].

9.7 CALCUL DES ENCADREMENTS D'OUVERTURES.

Toutes les ouvertures pratiquées dans les parois des fuselages étanches (hublots, portes, trappes, etc...) doivent être soigneusement bordées par des encadrements capables de transmettre, d'un bord à l'autre, les tensions dues à la pression interne [2]. A ces tensions s'ajoutent celles dues à la flexion générale que l'on doit également transmettre, par suite de la présence même de ces encadrements.

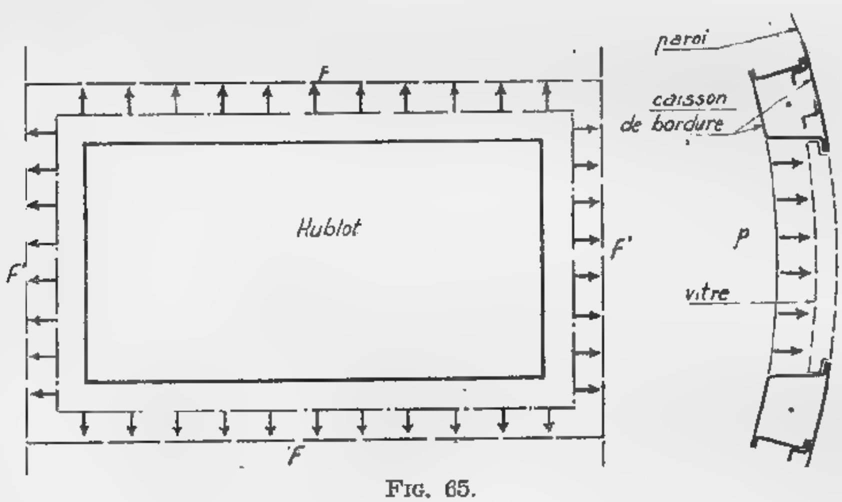


FIG. 65.

La figure 65 représente les sollicitations appliquées à un *encadrement de hublot rectangulaire*, dans une cabine de section circulaire. Cet encadrement reçoit les *forces réparties* (par unité de longueur) :

dans le sens transversal : $f = n_t \cdot e$,
dans le sens longitudinal : $f' = n_L \cdot e''$

(notations du paragraphe 9.53 avec e'' = épaisseur équivalente de la paroi dans la région considérée, § 9.51).

Remarquons, qu'à ces forces s'ajoutent éventuellement, dans les deux directions, des *forces réparties supplémentaires*

$$\varphi = (t - t_0)\ e$$

1. — *Référence :* Essais de structures de cabines sous pression, par HOWLAND et BEED (Lockheed), *Journal of the aeronautic sciences*, novembre 1940.

2. — On ne peut, en effet, généralement pas compter sur les vitres (fixées élastiquement) ou sur les portes pour assurer directement la continuité des parois.

en désignant par t la contrainte de cisaillement du revêtement et par t_0 sa contrainte critique (traction diagonale zone instable, chap. XIX, § **4.531**, plis supposés orientés à 45°).

Ces charges appliquées sont souvent considérables, aussi, pour obtenir un encadrement suffisamment résistant, on est, généralement, conduit à réaliser un « caisson » en doublant intérieurement la paroi de revêtement et en interposant quelques cloisons de « mise en charge » de ce caisson.

Le calcul d'un tel encadrement peut s'opérer rapidement (en le supposant plan) à l'aide des formules données **Planche 35** (cas 7 à 9) [1]. Si l'encadrement est d'inertie variable on utilisera la méthode générale exposée au chapitre XVIII, paragraphe **6.2**.

Les *vitres* des hublots (réalisées en matières transparentes genre Plexiglas [2]) doivent résister à la pression interne p directement appliquée. On les calcule à l'aide des formules données au chapitre XVII, paragraphe **2.** concernant les *plaques épaisses*.

---

1. — On superposera les moments dus à f et f' envisagés successivement.

2. — Ce matériau admet, à la rupture, une contrainte de flexion de l'ordre de 5 kg/mm². Son module d'élasticité E vaut, environ, 100 kg/mm². L'épaisseur des vitres est souvent conditionnée par des considérations de déformations.

PLANCHES ANNEXES

RÉPERTOIRE

RÉFÉRENCE Chap.	Parag.	DÉSIGNATION	Nos
VI	3.	Caractéristiques de résistance des principaux ORGANES SOUPLES utilisés en construction aéronautique.	13
VII	3.53	Détermination des efforts dans les barres d'une poutre de fuselage, par la méthode de CREMONA.	14
VII	4.2	Détermination graphique des efforts dans les barres d'un bâti-moteur, dans un cas de charges symétriques.	15
VII	6.12 et 6.23	Calcul des déformations élastiques d'une poutre plane triangulée (méthodes 1 et 2)	16
IX X	5.5 1.6	Principaux cas de flexion des poutres droites isostatiques.	17
IX	7.4 et 8.3	Calcul de dimensionnement rapide d'un longeron à âme mince.	18
X	6.	Calcul des déformations de flexion d'un longeron (Longeron d'aile dimensionné, Planche 18).	19
XI	3.4	Conditions de flexion de quelques profilés ouverts.	20
XII	1.7	Caractéristiques mécaniques des principaux BOIS utilisés en construction aéronautique.	21
XII	1.52	Abaques pour calcul en flexion pure, à la rupture, des longerons en bois.	22
XII	1.7	Abaques pour calcul, à la rupture, des fixations dans les poutres en bois.	23
XIV	3.23	Abaque de calcul des ressorts à boudin en fil rond.	24
XV	4.22	Abaque de combinaison des contraintes normales et tangentielles.	25
XVI	4.13	Flambage local des cornières à ailes égales.	26
XVI	4.13	Flambage local des tubes carrés.	27
XVI	4.13	Flambage local des tubes ronds.	28
XVI	4.232	Flambage général des poutres rectilignes de sections constantes (STRAND-EULER).	29
XVI	4.231	Flambage général des poutres rectilignes de sections constantes (Abaques de STRAND-EULER).	30
XVI	5.3	Flambage général des poutres longues renforcées.	31

RÉFÉRENCE Chap.	Parag.	DÉSIGNATION	N°
XVII	2 à 4	Coefficients pour le calcul des plaques planes rectangulaires chargées transversalement.	32
XVIII	4.5	Principaux cas particuliers de flexion des poutres droites hyperstatiques.	33
XVIII	4.6	Calcul d'une poutre droite continue sur trois appuis par la méthode du potentiel interne.	34
XVIII	5 et II	Cas particuliers de portiques, arcs, anneaux et cadres hyperstatiques.	35
XVIII	6.2	Calcul d'un encadrement d'ouverture circulaire dans une paroi soumise à un champ de cisaillement (encadrement renforcé par deux diagonales).	36
XIX	2.15 et 2.21	Coefficients théoriques pour le calcul au flambage des plaques planes comprimées.	37
XIX	2.33	Flambage des plaques cylindriques comprimées	38
XIX	2.474	Rivetage des raidisseurs comprimés sur les tôles de duralumin (ABAQUE de NEWELL).	39
XIX	4.41	Flambage des plaques planes soumises à un cisaillement pur.	40
XIX	3.	Coefficients théoriques pour le calcul au flambage des plaques planes fléchies.	41
XIX	5.	Flambage des plaques planes soumises à des sollicitations normales et tangentielles uniformes.	42
XXI	3.52	Calcul d'une cloison de caisson de torsion (structure d'aile monolongeron avec caisson arrière).	43
XXI	4.23	Calcul d'une section droite d'une structure d'aile monolongeron avec deux caissons de torsion.	44
XXI	6.28	Calcul d'une section droite d'un fuselage-coque à quatre longerons principaux.	45
XXII	7.1	Calcul d'une section droite d'un fuselage-coque multi-lisses A) Détermination des paramètres unitaires.	46 A
XXII	7 1	Calcul d'une section droite d'un fuselage-coque multi-lisses B) Détermination des contraintes.	46 B
XXII	7.2	Calcul d'une section ouverte d'un fuselage-coque multi-lisses (calcul en torsion-flexion).	47

N°
48 A
48 B
49

Chap. II — § 7.4

Surfaces et centres de gravité des figures planes usuelles.

PLANCHE N° 1

FIGURES	SURFACES	POSITIONS DU C. DE G.
Triangle	$S=\frac{1}{2}bh$	Intersection des médianes $d=\frac{h}{3}$
Trapèze	$S=\frac{B+b}{2}h$	$d_1=\frac{h}{3}\,\frac{B+2b}{B+b}$ $d_2=\frac{h}{3}\,\frac{2B+b}{B+b}$
Secteur circulaire	$S=\frac{\pi R^2 \alpha}{360}$ (Avec α en degrés)	$d=\frac{1}{3}\,\frac{C \cdot R^2}{S}$ $\left(\text{Avec } C=\text{corde}=2R\sin\frac{\alpha}{2}\right)$
Segment circulaire	$S=\frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180}-\sin\alpha\right)$ (Avec α en degrés)	$d=\frac{2}{3}\,\frac{R^3\sin^3\frac{\alpha}{2}}{S}$
Segment annulaire (α en degrés)	$S=\frac{\pi\alpha}{360}(R^2-r^2)$	$d=\frac{2}{3}\,\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\,\frac{360\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi\alpha}$
Epaisseur e faible par rapport à R'=rayon moyen.	$S=\frac{\pi\alpha R'e}{180}$	$d=360\,\frac{\sin\alpha/2}{\pi\alpha}$
Demi-cercle	$S=\frac{\pi R^2}{2}$	$d=\frac{4R}{3\pi}=0{,}4244\,R$
Cornière quelconque	$S=He+be'=he+Be'$	$d=\frac{1}{2}\,\frac{H^2e+be'^2}{S}$ $d=\frac{1}{2}\,\frac{B^2e'+he^2}{S}$
U symétrique	$S=2He+be'$ $=BH-b(H-e')$	$d=\frac{2H^2e+be'^2}{2S}$

Moments d'inertie, rayons de giration et modu

SURFACES	MOMENTS D'INERTIE I	DISTANCES V	MODULES D'INERTIE $\frac{I}{V}$	RAYONS DE GIRATION ρ	MOMENTS D'INERTIE POLAIRES I_G
Rectangle plein	$I_{XX'} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{xx'} = \frac{bh^3}{3}$	$\frac{h}{2}$	$\left(\frac{I}{V}\right)_{XX'} = \frac{bh^2}{6}$	$\rho_{XX'} = \frac{h}{2\sqrt{3}} = 0{,}2886\,h$ $\rho_{xx'} = \frac{h}{\sqrt{3}} = 0{,}5772\,h$	$I_G = \frac{bh}{12} (h^2+b$
Rectangle creux symétrique	$I_{XX'} = \frac{1}{12} (bh^3 - b'h'^3)$	$\frac{h}{2}$	$\left(\frac{I}{V}\right)_{XX'} = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6\,h}$		
Carré	$I_{XX'} = I_{vv'} = \frac{C^4}{12} = \text{Const.}$	$\frac{C}{2}$	$\left(\frac{I}{V}\right)_{X'X} = \frac{C^3}{6}$	$\rho = \frac{b}{2\sqrt{3}} = 0{,}2886\,b$ $=$ Constante	$I_G = \frac{C^4}{6}$
Triangle quelconque	$I_{xx'} = \frac{bh^3}{36}$ $I_{x_1x'_1} = \frac{bh^3}{4}$ $I_{x_2x'_2} = \frac{bh^3}{12}$			$\rho_{xx'} = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0{,}236\,h$ $\rho_{x_1x'_1} = \frac{h}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,h$ $\rho_{x_2x'_2} = \frac{h}{\sqrt{6}} = 0{,}408\,h$	
Parallélogramme	$I_{xx'} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{x_1x'_1} = \frac{bh^3}{3}$ $I_{yy'} = \frac{bh}{12} (b^2 + h^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha)$				
Trapèze	$I_{xx'} = \frac{h^3}{36} \left(B + b + \frac{2\,Bb}{B+b}\right)$ $I_{x_1x'_1} = \frac{h^3}{12} (B + 3b)$			$\rho_{xx'} = \frac{0{,}408\,h}{\sqrt{1 + \frac{2b}{B+b}}}$	
Rectangle incliné	$I_{uu'} = I_{YY'} \cos^2 \alpha + I_{XX'} \sin^2 \alpha$ $= \frac{bh}{12} (b^2 \cos^2 \alpha + h^2 \sin^2 \alpha)$ $= \frac{bh}{12} (h^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta)$				

Moments d'inertie des surfaces planes usuelles.

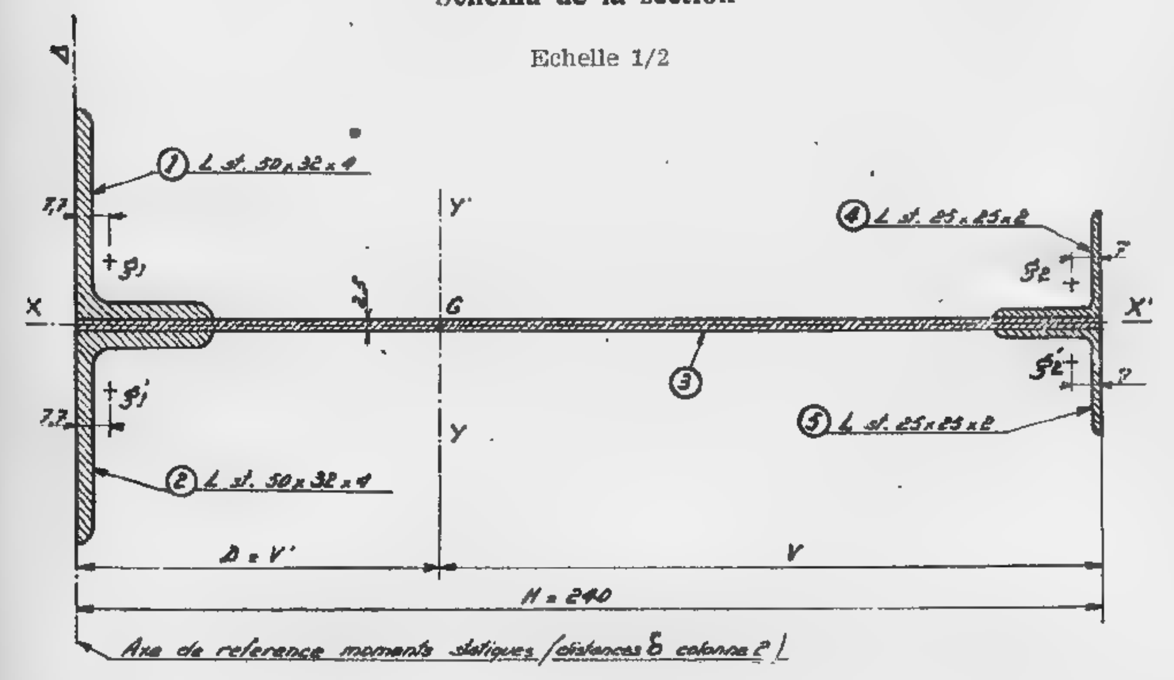
PLANCHE N° **2**

SURFACES	MOMENTS D'INERTIE I	DISTANCES V	MODULES D'INERTIE $\frac{I}{V}$	RAYONS DE GIRATION ρ	MOMENTS D'INERTIE POLAIRES I_G
Cercle	$I_{XX'}=I_{YY'}=\frac{\pi}{64}D^4$ $=\frac{\pi}{4}R^4=C^{te}$ $\approx\frac{1}{20}D^4$	$\frac{D}{2}$	$\frac{I}{V}=\frac{\pi}{32}D^3$ $\approx\frac{1}{10}D^3$	$\rho_{XX'}=\rho_{YY'}=C^{te}$ $=\frac{D}{4}=\frac{R}{2}$	$I_0=\frac{\pi}{32}D^4\approx$ $\frac{1}{10}D^4$
Couronne	$I_{XX'}=I_{YY'}=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)=C^{te}$ $\approx\frac{1}{20}(D^4-d^4)$ Pour épaisseurs e faibles: $I_{XX'}=I_{YY'}=\pi R'^3\cdot e=C^{te}$ (Erreur relative $\leqslant 0{,}25$ % pour $\frac{e}{R'}<\frac{1}{10}$)	$\frac{D}{2}$	$\frac{I}{V}=\frac{\pi}{32}\,\frac{D^4-d^4}{D}$ $\approx\frac{1}{10}\,\frac{D^4-d^4}{D}$ Pour épaisseurs e faibles $\frac{I}{V}\approx\pi R'^2 e$	$\rho_{XX'}=\rho_{YY'}=C^{te}$ $=\frac{\sqrt{D^2+d^2}}{4}$ Pour épaisseurs e faibles $\rho_{XX'}=\rho_{YY'}=\frac{R'\sqrt{2}}{2}$ $=C^{te}\approx 0{,}707\,R'$	$I_0=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$ $\approx\frac{1}{10}(D^4-d^4)$ Pour épaisseurs e faibles $I_0\approx 2\pi R'^3\cdot e$
Demi-cercle	$I_{XX'}=R^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)$ $\approx 0{,}110\,R^4$ $I_{xx'}=I_{YY'}=\frac{\pi D^4}{128}=\frac{\pi R^4}{8}$ $\approx 0{,}393\,R^4$	$V=\frac{R}{3\pi}(3\pi-4)$ $\approx 0{,}5756\,R$ $V'=\frac{4R}{3\pi}$ $\approx 0{,}4244\,R$	$\left(\frac{I}{V}\right)_{XX'}\approx 0{,}1908\,R^3$ $\left(\frac{I}{V'}\right)_{XX'}\approx 0{,}2587\,R^3$	$\rho_{XX'}\approx 0{,}264\,R$	$I_G\approx 0{,}503\,R^4$
Ellipse	$I_{XX'}=\frac{\pi}{64}ba^3\approx\frac{1}{20}ba^3$ $I_{YY'}=\frac{\pi}{64}ab^3\approx\frac{1}{20}ab^3$	$V=\frac{a}{2}$ $V=\frac{b}{2}$	$\left(\frac{I}{V}\right)_{XX'}=\frac{\pi}{32}ba^2$ $\approx\frac{1}{10}ba^2$ $\left(\frac{I}{V'}\right)_{XX'}=\frac{\pi}{32}ab^2$ $\approx\frac{1}{10}ab^2$	$\rho_{YY'}=\frac{a}{4}$ $\rho_{XX'}=\frac{b}{4}$	$I_G=\frac{\pi}{64}ab(a^2+b^2)$
Demi-couronne	$I_{XX'}=R'e\left[\frac{\pi}{8}\left(4R'^2+e^2\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{e}{3}+2R'\right)^2\right]$ Pour e faible : $I_{XX'}=R'^3e\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\right)$ $=0{,}298\,R'^3\cdot e$ (Erreur relative $\leqslant 0{,}6$ % pour $\frac{e}{R'}\leqslant\frac{1}{10}$)	$V'=\frac{2R'}{\pi}+\frac{e^2}{6\pi R'}$ Pour e faible $V'=\frac{2R'}{\pi}$ $=0{,}636\,R'$			
Segment de parabole ($S=\frac{2}{3}bh$)	$I_{XX'}=\frac{8}{175}bh^3$	$V=\frac{3}{5}h$ $V'=\frac{2}{5}h$	$\left(\frac{I}{V}\right)_{X'X}=0{,}076\,bh^2$ $\left(\frac{I}{V'}\right)_{XX'}=0{,}114\,bh^2$		
Bâton (Epais. néglig.)				$\rho_{XX'}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=0{,}289\,l$ $\rho_{yy'}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}577\,l$	

CHAP. II § 9.1	**Calcul du moment d'inertie maximum $I_{YY'}$ d'une section dissymétrique.**	PLANCHE N° **3**

Schéma de la section

Echelle 1/2



Caractéristiques des éléments standard:
- ① et ② : $s = 313{,}5 \text{ mm}^2$ $I_p = 25960 \text{ mm}^4$
- ④ et ⑤ : $s = 97 \text{ mm}^2$ $I_p = 5790 \text{ mm}^4$

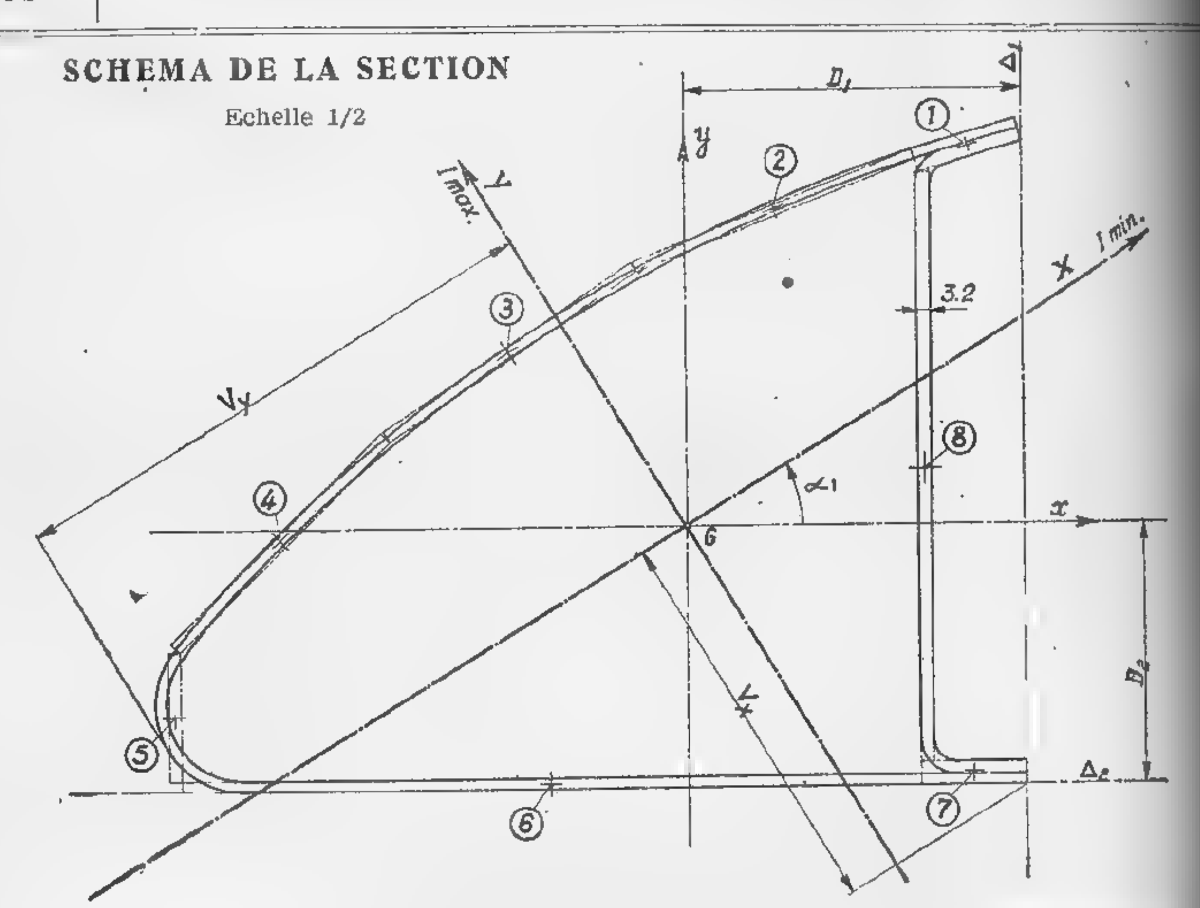
(autour d'axes parallèles à YY')

TABLEAU DE CALCULS ET DE RESULTATS

Eléments		Sections	Recherche du c. de g.		Calcul de $I_{YY'}$		
Repères	Désignation	s mm²	δ mm	$s\delta$ mm³	d mm	sd^2 mm⁴	Inerties propres I_p mm⁴
① et ②	2 L gauche	627	7,7	4828	78,2	$383{,}42 \cdot 10^4$	$2 \times 25960 = 5{,}192 \cdot 10^4$
③	Ame : 240 × 5	600	120	72000	34,1	$69{,}77 \cdot 10^4$	$\frac{2{,}5}{12}\ 240^3 = 282 \cdot 10^4$
④ et ⑤	2 L droite	194	233	45202	147,1	$419{,}79 \cdot 10^4$	$2 \cdot 5790 = 1{,}158 \cdot 10^4$
Totaux :		1421		122030		$872{,}98 \cdot 10^4$	$294{,}35 \cdot 10^4$
		1	2	3	4	5	6
Résultats :		$D = V' = \frac{\Sigma s\delta}{S}\ \frac{122030}{1421} = 85{,}9$ d'où distance d à YY' $d = D - \delta = 85{,}9 - \delta$ ou $d = \delta - D = \delta - 85{,}9$ (en valeurs absolues)			$I_{YY'} = (872{,}98 + 294{,}35) \cdot 10^4 = 1167{,}33 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = 1167{,}33 \text{ cm}^4$ $\left(\frac{I}{V}\right)_{YY'} = \frac{1167{,}33 \cdot 10^4}{154{,}1} = 75{,}75 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ $\rho_{YY'} = \sqrt{\frac{1167{,}33 \cdot 10^4}{1421}} = 90{,}7 \text{ mm}$		

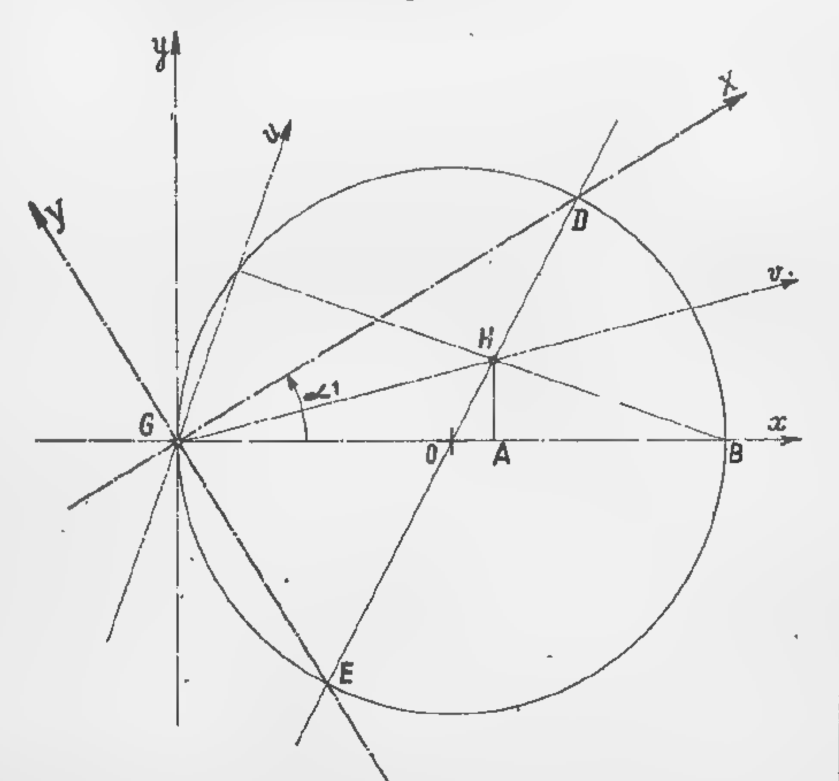
SCHEMA DE LA SECTION

Echelle 1/2



CERCLE D'INERTIE

Echelle : 1 mm représente 20 cm⁴



DONNÉES
(VOIR TABLEAU 2)

$GA = I_y = \frac{744,66}{20} = 37,2$ mm

$AB = I_x = \frac{545,44}{20} = 27,3$ mm

$AH = K_{xy} = \frac{195,47}{20} = 9,8$ mm

RESULTATS

Axes principaux d'inertie : GX et GY

Angle de décalage par rapport à Gx et Gy : $\alpha_1 = 31°20'$.

Directions conjuguées à Gx et Gy : Gu et Gv.

Moment d'inertie maximum :
$I_{max} = I_Y$ représenté par EH = 43,1 mm
d'où $I_Y = 43,1 \cdot 20 = 862$ cm⁴.

Moment d'inertie minimum :
$I_{min} = I_X$ représenté par HD = 21,4 mm
d'où $I_X = 21,4 \cdot 20 = 428$ cm⁴.

Modules d'inertie principaux minima :

Autour de GX : $\left(\frac{I}{V}\right)_X \min = \frac{428}{9,4}$
$= 45,5$ cm³ $= 45500$ mm³

Autour de GY : $\left(\frac{I}{V}\right)_Y \min = \frac{862}{13,1}$
$= 65,8$ cm³ $= 65800$ mm³

TABLEAUX DE CALCULS

TABLEAU 1 : Recherche du c. d. g. général et calcul des inerties propres des éléments

Elém. (rectangles)				Surf.	Rech. de la position du c. de g.				Calcul des inerties propres des éléments					
Repères	Dimensions		Inclin		Par rapport à Δ_1		Par rapport à Δ_2		Par rapport à leurs axes princ.		Fact. interméd.		Inerties propres	
	b mm	h mm	α degrés	s mm²	δ_1 mm	$s\delta_1$ mm³	δ_2 mm	$s\delta_2$ mm³	$\frac{bh^3}{12}$ cm⁴	$\frac{bh^3}{12}$ cm⁴	$\sin^2 \alpha$	$\cos^2 \alpha$	I_{px} cm⁴	I_{py} cm⁴
1	5,7	25	15°30′	142,5	13	1852	150	21375	0,74	0,04	0,0713	0,929	0,09	0,69
2	2,5	70	22°	175	59	10325	135,5	23710	7,15	0,01	0,141	0,860	1,01	6,15
3	2,5	70	34°	175	121	21175	103	18025	7,15	0,01	0,312	0,687	2,23	4,91
4	2,5	70	45°	175	175	30625	59	10325	7,15	0,01	0,500	0,500	3,57	3,58
5	2,5	30	90°	75	200	15000	17,5	1310	0,56	néglig	1	0	0,56	néglig
6	2,5	174	0°	435	112	48720	1,25	544	109,75	0,02	0	1	0,02	109,75
7	5,7	25	0°	142,5	12,5	1780	2,85	406	0,14	0,04	0	1	0,04	0,74
8	3,2	138	90°	441,5	23,4	10330	74,7	32980	70,08	0,04	1	0	70,08	0,04
Totaux utiles :				**1761,5**		**139807**		**108675**					**77,60**	**125,86**

Position de G :
- en profondeur (par rapport à Δ_1) : $D_1 = \frac{\Sigma s\delta_1}{S} = \frac{139807}{1761,5} = 79,4$ mm.
- en hauteur (par rapport à Δ_2) : $D_2 = \frac{\Sigma s\delta_2}{S} = \frac{108675}{1761,5} = 61,7$ mm.

d'où coordonnées x_1 et y_1 des c.d.g. des éléments (Tableau ci-dessous) $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 79,4 - \delta_1 \\ y_1 = \delta_2 - 61,7 \end{array} \right\}$ mm.

TABLEAU 2 : Calcul des moments d'inertie et produits d'inertie autour de 2 axes rectangulaires Gx et Gy

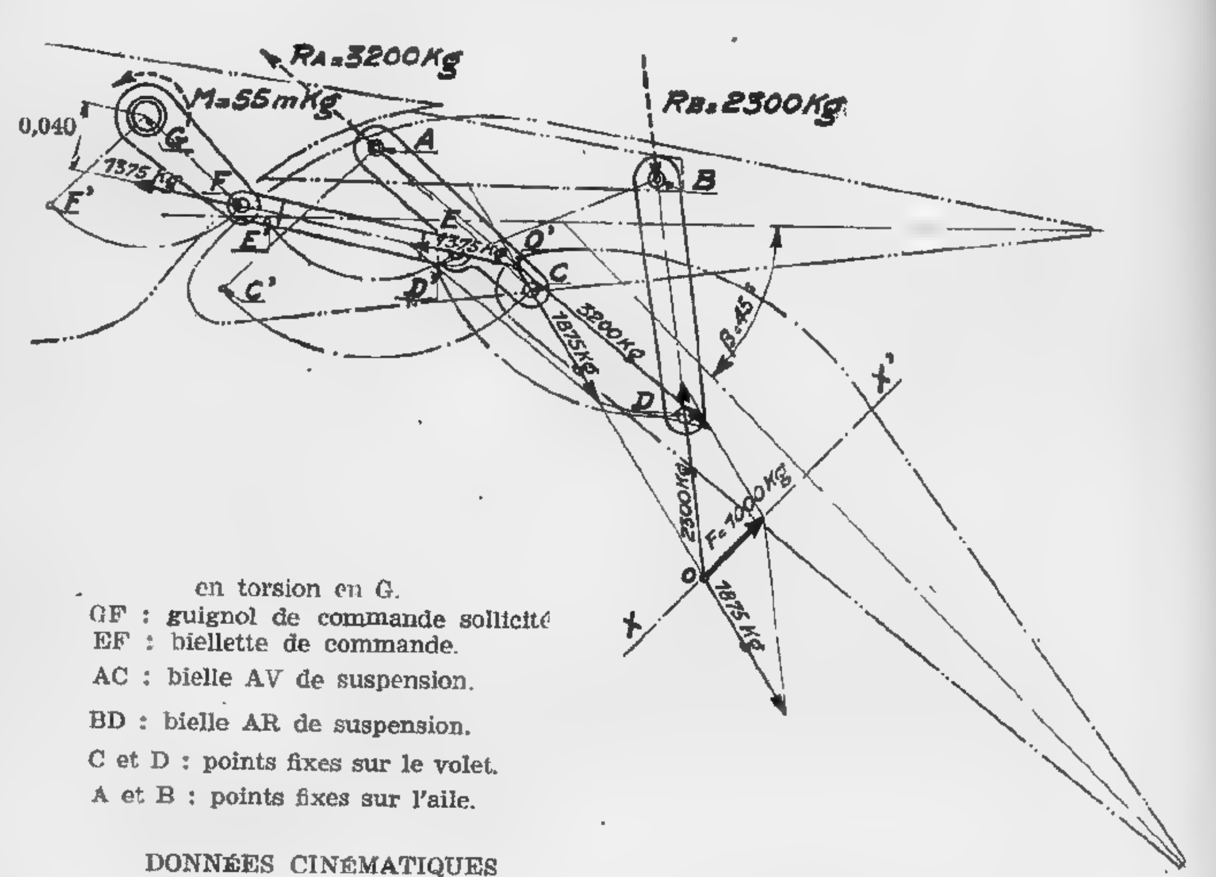
Eléments				Inertie de trans.		Calculs produits d'inerties kxy					
						Termes intermédiaires					Produits partiels
Repères	Surf. s cm²	Coordonnées des c. d. g. x_1 cm	y_1 cm	$I_{ty} = s \cdot x_1^2$ cm⁴	$I_{tx} = s \cdot y_1^2$ cm⁴	$x_1 \cdot y_1$ (1) cm²	2α degrés	$\sin 2\alpha$	$\frac{h^2 \sin 2\alpha}{2}$ (2) cm²	(1) + (2) cm²	kxy cm⁴
1	1,425	6,64	8,83	62,8	111,8	58,63	34°	0,515	0,13	58,76	83,73
2	1,75	2,04	7,38	7,3	95,0	15,06	44°	0,695	1,42	16,48	28,84
3	1,75	−4,16	4,13	30,4	30,0	−17,18	68°	0,927	1,89	−15,29	−26,76
4	1,75	−9,56	−0,27	160,0	0,14	2,58	90°	1	2,04	4,62	8,08
5	0,75	−12,06	−4,42	109,3	14,7	53,30	180°	0	0	53,30	39,97
6	4,35	−3,26	−6,045	46,2	159,2	19,71	0°	0	0	19,71	85,74
7	1,425	6,71	−5,885	64,2	49,5	−39,49	0°	0	0	−39,49	−56,27
8	4,415	5,6	1,30	138,6	7,5	7,28	180°	0	0	7,28	32,44
Totaux utiles :				**618,8**	**467,84**						**195,47**

Résultats :
- Moment d'inertie autour de Gx : $I_x = \Sigma I_{px} + \Sigma I_{tx} = 77,60 + 467,84 = 545,44$ cm⁴
- Moment d'inertie autour de Gy : $I_y = \Sigma I_{py} + \Sigma I_{ty} = 125,86 + 618,80 = 744,66$ cm⁴
- Produit d'inertie autour de $Gx\ Gy$: $K_{xy} = \Sigma k_{xy} = 195,47$ cm⁴

Equilibre d'une articulation de volet de courbure.

SCHÉMA DE L'ARTICULATION

Echelle 1/5.



GF : guignol de commande sollicité en torsion en G.
EF : biellette de commande.
AC : bielle AV de suspension.
BD : bielle AR de suspension.
C et D : points fixes sur le volet.
A et B : points fixes sur l'aile.

DONNÉES CINÉMATIQUES

FORCE APPLIQUÉE

(au braquage $\beta = 45°$)

Action du volet sur l'articulation considérée (suivant ligne d'action XX') :

$$F = 1000 \text{ kg.}$$

DÉCOMPOSITIONS SUCCESSIVES

(Echelle des forces : 1 mm=100 kg)

La bielle AR donne une *réaction dirigée* suivant son axe BD. Le point C constitue un *point fixe* pour une position donnée du volet, d'où : décomposition de F au point O suivant OB et OC.

On trouve : { suivant OB : 2300 kg d'où R_B égale et opposée.
{ suivant OC : 1875 kg qui agit en C.

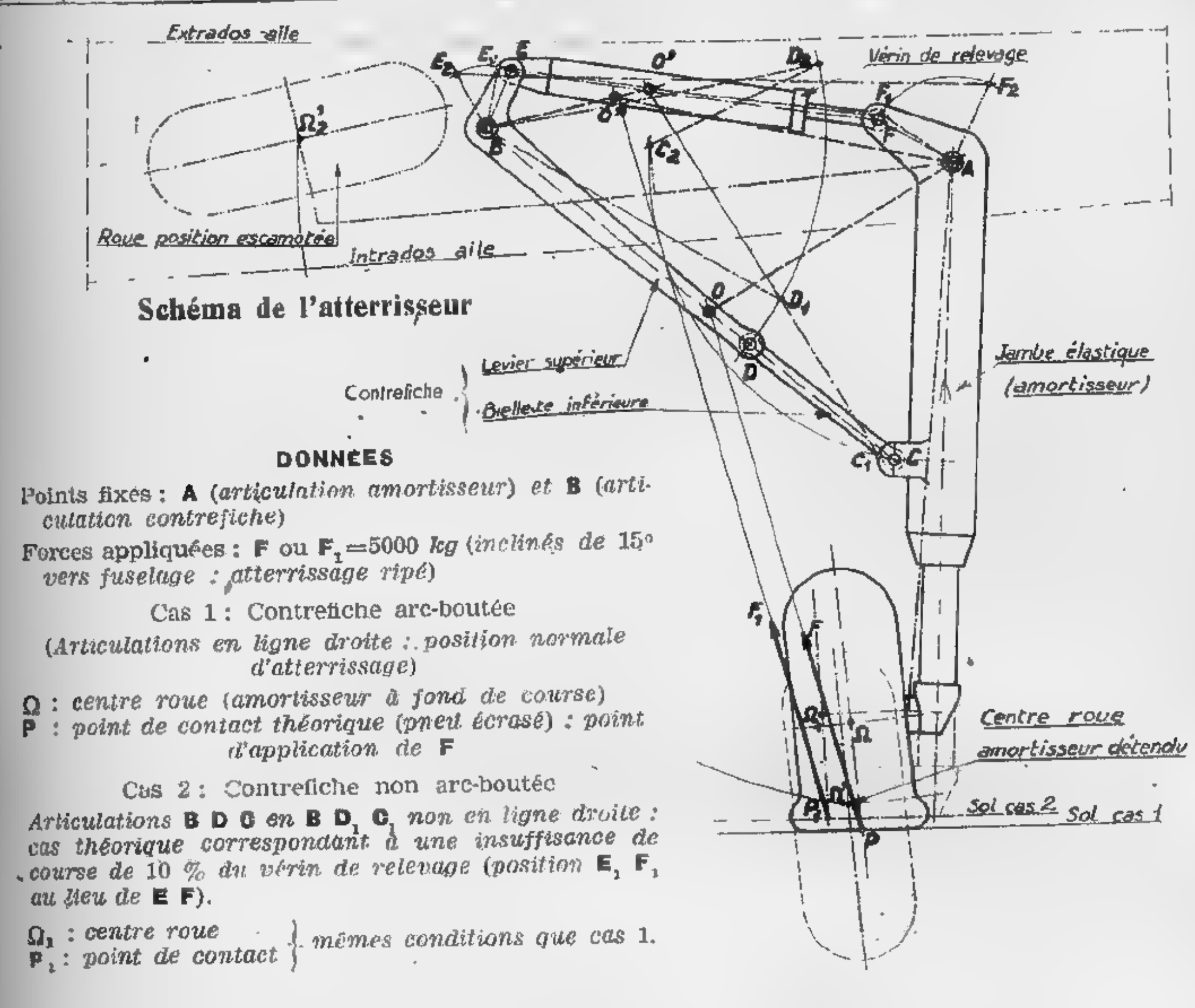
Vis-à-vis de l'effort en C, la biellette EF constitue une *réaction dirigée* et le point A un *point fixe* d'où décomposition des 1875 kg en O' suivant O'A et O'F.

On trouve : { suivant O'A : 3200 kg d'où R_A égale et opposée.
{ suivant O'F (biellette) : 1375 kg.

Réaction de moment de la commande (en G) :

$$M = 1375 \cdot 0{,}040 = 55 \text{ mkg (suivant flèche).}$$

Equilibre d'un atterrisseur rentrant (Type D. 520 s.)



DONNÉES

Points fixes : **A** (*articulation amortisseur*) et **B** (*articulation contrefiche*)

Forces appliquées : **F** ou F_1=5000 *kg* (*inclinés de 15° vers fuselage : atterrissage ripé*)

Cas 1 : Contrefiche arc-boutée

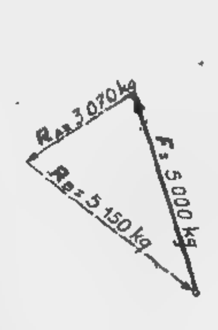
(*Articulations en ligne droite : position normale d'atterrissage*)

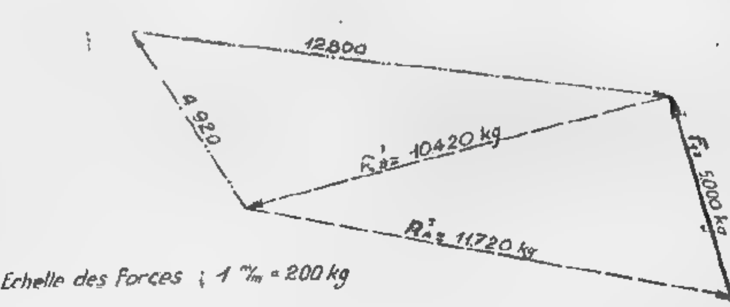
Ω : *centre roue (amortisseur à fond de course)*
P : *point de contact théorique (pneu écrasé) : point d'application de* **F**

Cas 2 : Contrefiche non arc-boutée

Articulations **B D C** *en* **B** D_1 C_1 *non en ligne droite : cas théorique correspondant à une insuffisance de course de 10 % du vérin de relevage (position* E_1 F_1 *au lieu de* **E F**).

Ω_1 : *centre roue*, P_1 : *point de contact* — *mêmes conditions que cas 1.*





Echelle des Forces : 1 m/m = 200 kg

PRINCIPES D'ÉQUILIBRAGES ET RESULTATS

CAS 1

L'ensemble de la contrefiche BDC fournit à la jambe-amortisseur une *réaction dirigée* suivant son axe BC. La jambe possède de plus un *point fixe* A.

D'où décomposition de F parallèlement à :

OA (R_A=3070 kg),
OB (R_B=5150 kg).

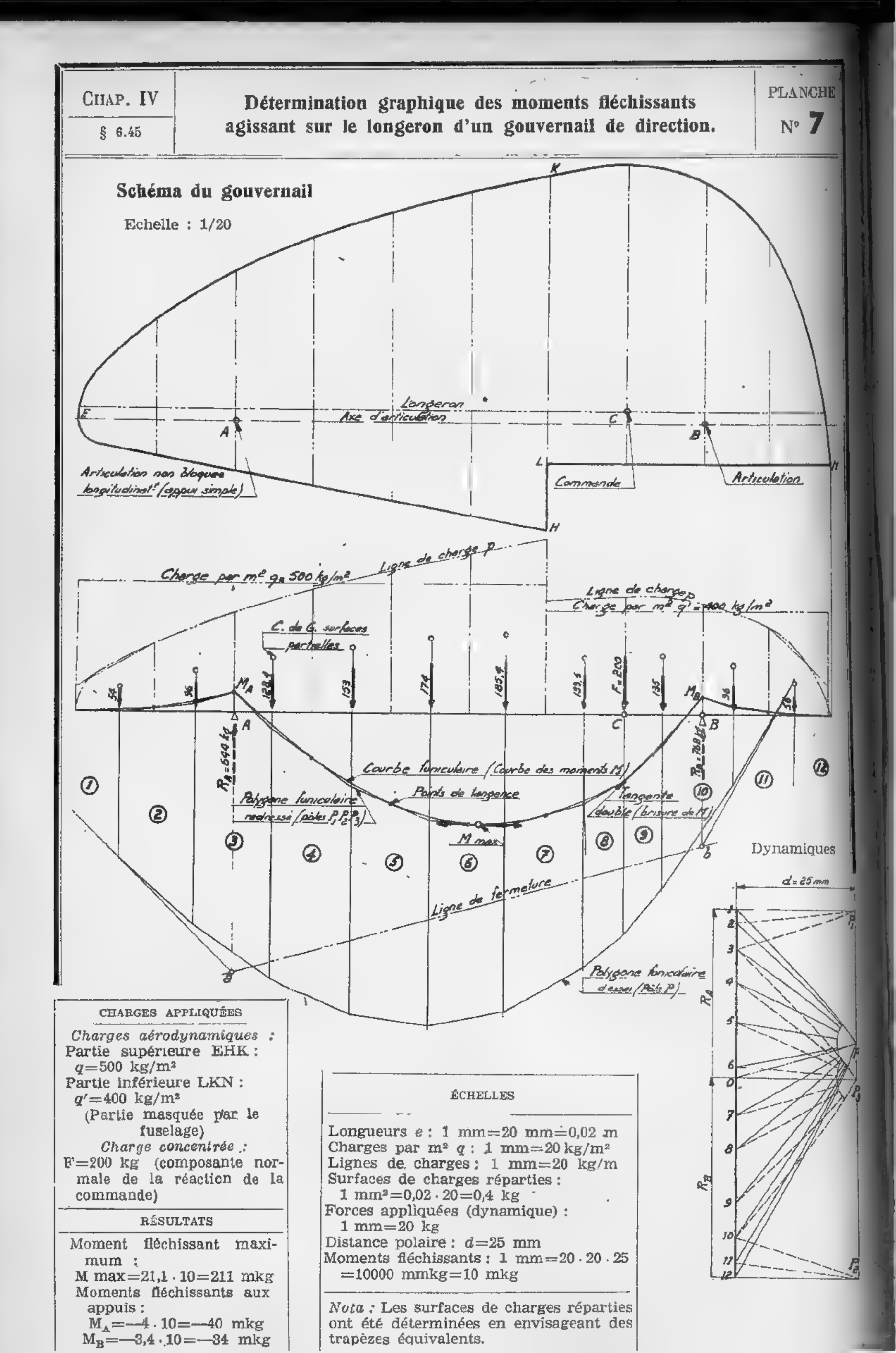
Effort nul dans le vérin EF.

CAS 2

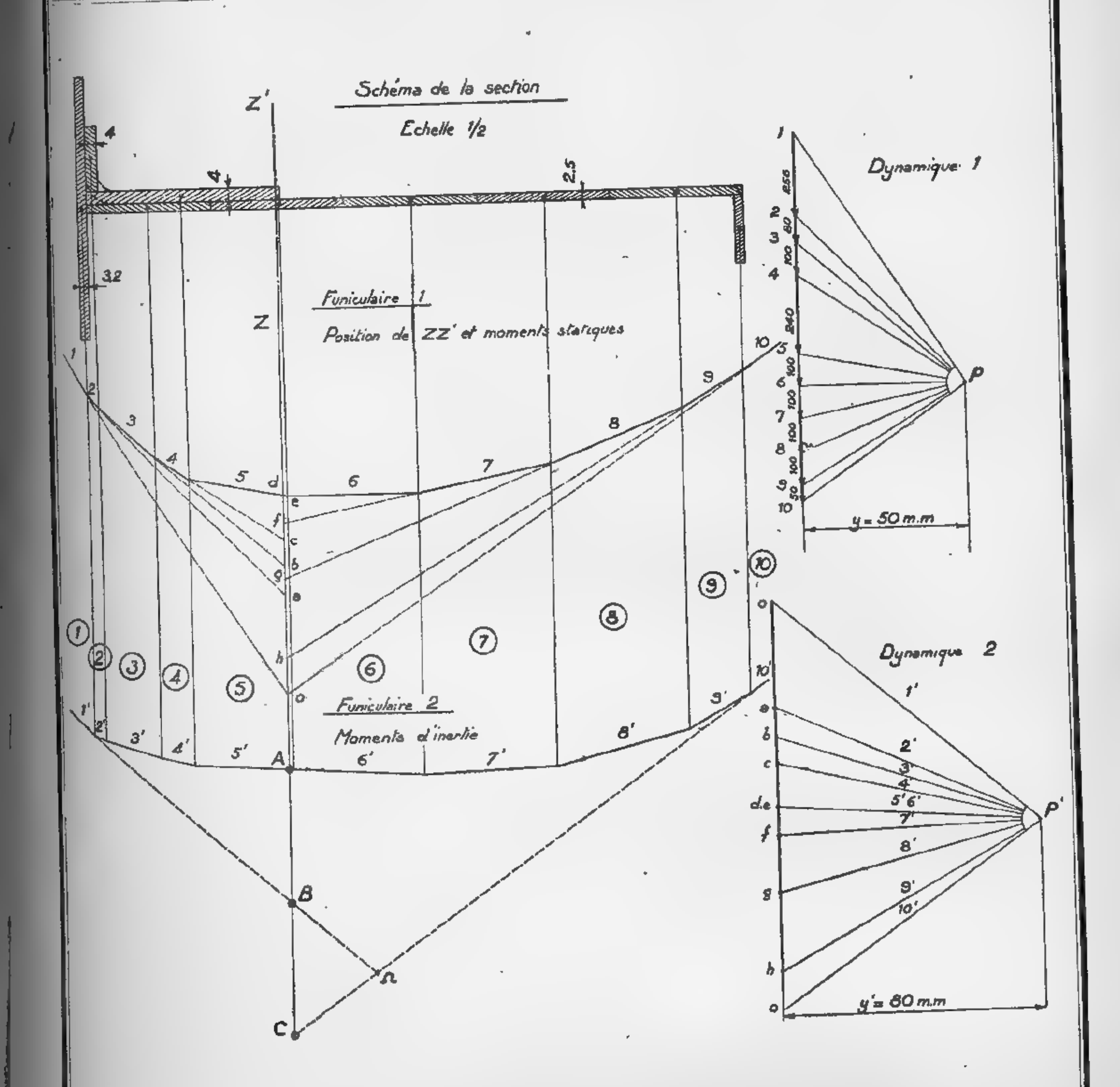
Le levier de contrefiche E_1BD_1 reçoit en D_1 une « *action dirigée* » suivant biellette C_1D_1 et en E_1 une « *action dirigée* » suivant vérin E_1F_1 (éléments entre articulations). La réaction en B passe donc par O′ (point de rencontre de ces deux directions). Le point de rencontre O″ de F_1 avec BO′ donne la direction O″A de la réaction en A. D'où :

R'_A=11720 kg et R'_B=10420 kg.

R'_B est due à : 4920 kg suivant biellette C_1D_1 et 12800 kg suivant vérin E_1F_1.

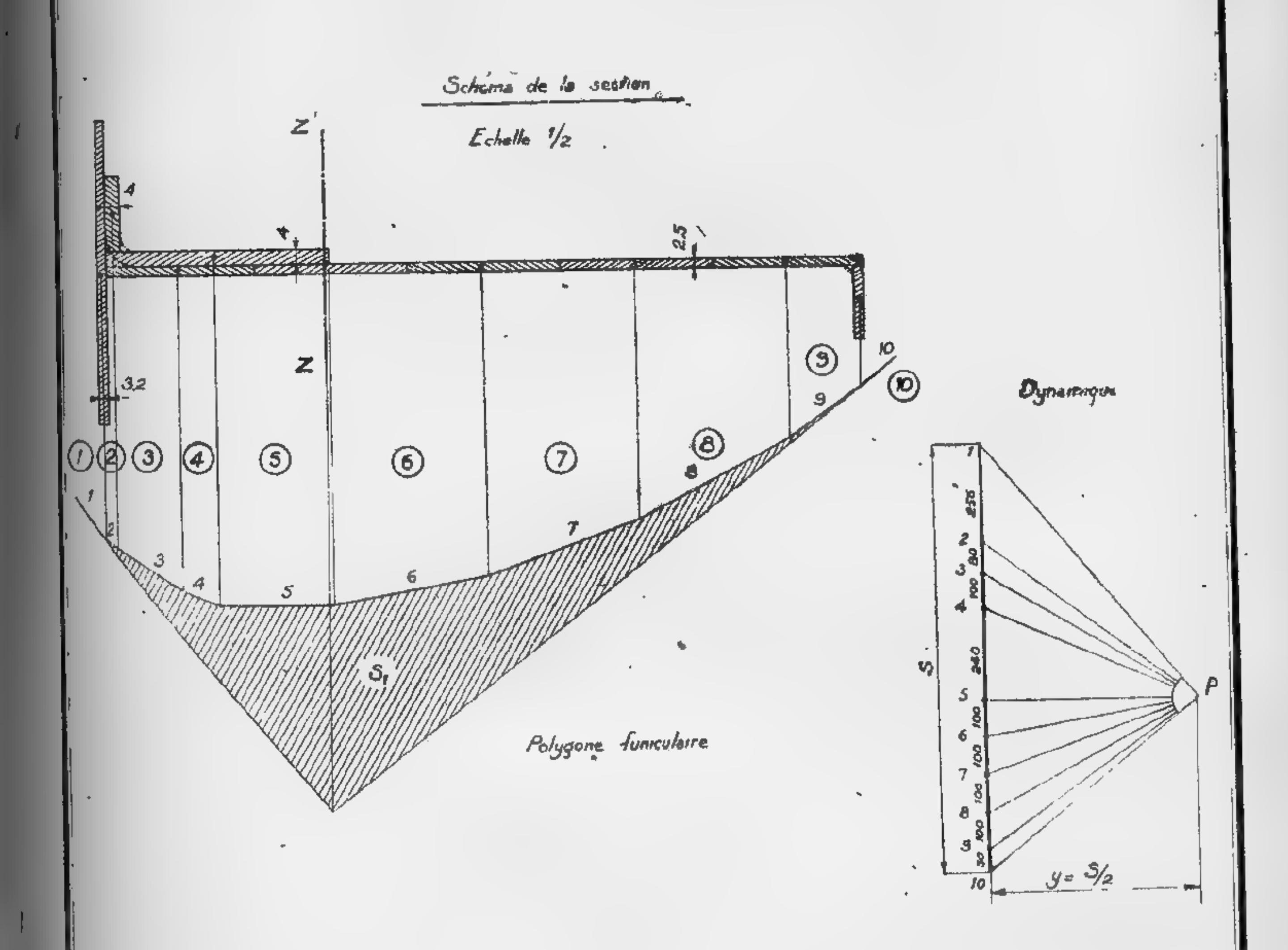

CHAP. IV
§ 6.45
Détermination graphique des moments fléchissants agissant sur le longeron d'un gouvernail de direction.
PLANCHE
N° 7
Schéma du gouvernail
Echelle : 1/20
K
Longeron
Axe d'articulation
E
A
C
B
L
N
H
Articulation non bloquée longitudinalt (appui simple)
Commande
Articulation
Charge par m² q = 500 kg/m²
Ligne de charge p
Ligne de charge p
Charge par m² q' = 400 kg/m²
C. de G. surfaces partielles
M_A
M_B
F = 200
$R_A = 644$ kg
$R_B = 788$ kg
Courbe funiculaire (Courbe des moments M)
Points de tangence
Polygone funiculaire redressé (pôles $P_1 P_2 P_3$)
Tangente double (brisure de M)
M max
Ligne de fermeture
Polygone funiculaire d'essai (Pôle P)
Dynamiques
d = 25 mm
CHARGES APPLIQUÉES
Charges aérodynamiques :
Partie supérieure EHK :
q=500 kg/m²
Partie inférieure LKN :
q'=400 kg/m²
(Partie masquée par le fuselage)
Charge concentrée :
F=200 kg (composante normale de la réaction de la commande)
RÉSULTATS
Moment fléchissant maximum :
M max=21,1 · 10=211 mkg
Moments fléchissants aux appuis :
M_A=—4 · 10=—40 mkg
M_B=—3,4 · 10=—34 mkg
ÉCHELLES
Longueurs e : 1 mm=20 mm=0,02 m
Charges par m² q : 1 mm=20 kg/m²
Lignes de charges : 1 mm=20 kg/m
Surfaces de charges réparties :
1 mm²=0,02 · 20=0,4 kg
Forces appliquées (dynamique) :
1 mm=20 kg
Distance polaire : d=25 mm
Moments fléchissants : 1 mm=20 · 20 · 25 =10000 mmkg=10 mkg
Nota : Les surfaces de charges réparties ont été déterminées en envisageant des trapèzes équivalents.

CHAP. IV § 7.12	**Détermination graphique des moments d'inertie :** **METHODE 1 : Double dynamique et funiculaire.**	PLANCHE N° **8**



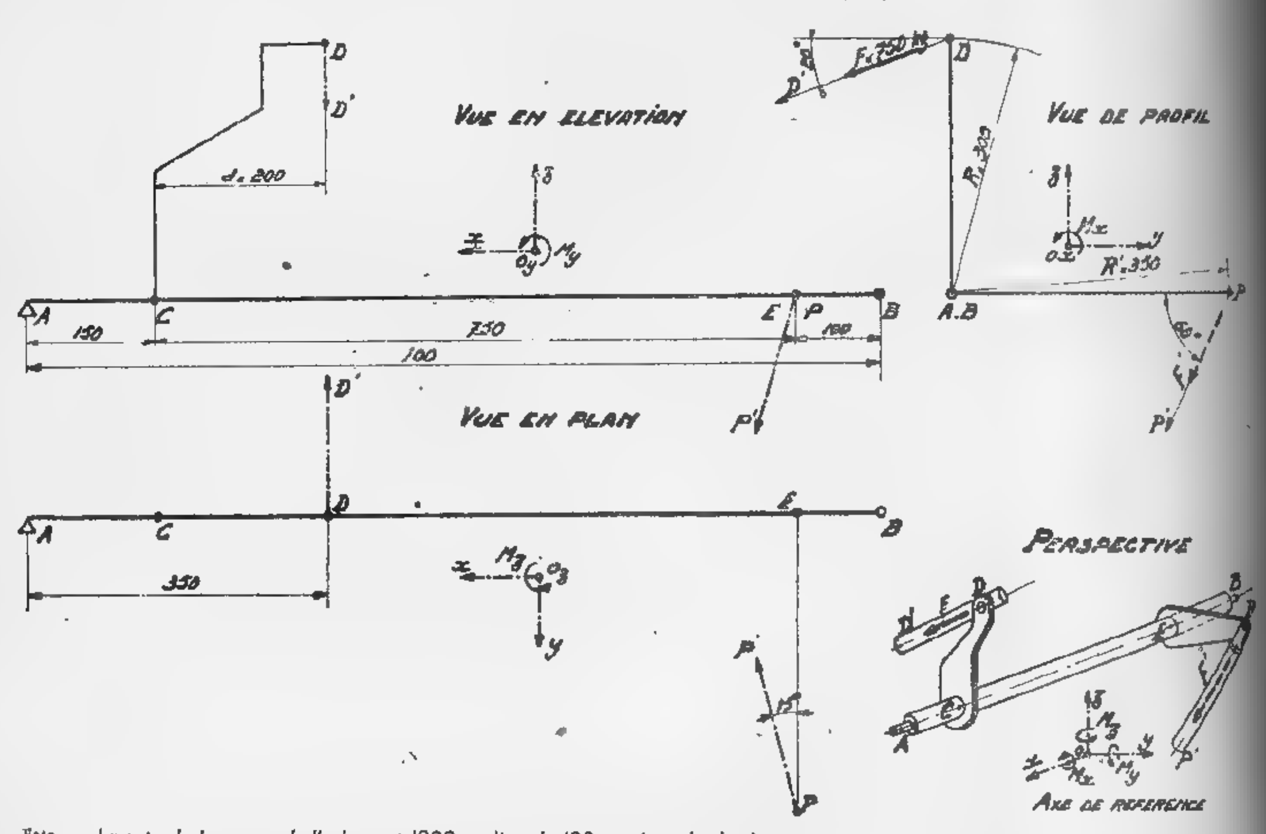
ÉCHELLES	RÉSULTATS
Longueurs : 1 mm=2 mm Surfaces : 1 mm=20 mm² Distances polaires : y=25 mm, y'=40 mm Moments d'inertie : $1\ \text{mm}=2^2 \cdot 20 \cdot 25 \cdot 40=8 \cdot 10^4\ \text{mm}^4$ $=8\ \text{cm}^4$	Vecteurs AB+AC=20,2+40,2 =60,4 mm d'où : $I_{ZZ'}=60{,}4 \cdot 8=483{,}2\ \text{cm}^4$ *Nota :* Ajouter inerties propres des éléments (voir § 7.3).

Chap. IV § 7.23	**Détermination graphique des moments d'inertie :** **MÉTHODE 2 : Surface du polygone funiculaire.**	PLANCHE N° **9**



ÉCHELLES	RÉSULTATS
Longueurs : 1 mm=2 mm Surfaces : 1 mm=20 mm² Distance polaire : $y = \dfrac{\text{surface de la section}}{2}$ (à l'échelle des surfaces).	Surface S_1 (polygone funiculaire) : $S_1 = 1072 \text{ mm}^2$ Surface de la section (surface réelle) : $S = 1126 \text{ mm}^2$ Moment d'inertie : $I_{zz'} = 1072 \cdot 1126 \cdot 2 \cdot 2$ $= 483{,}2 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ *Nota :* Ajouter inerties propres des éléments (voir § 7.3).

Schéma d'ensemble (Echelle 1/10)



Note. — La cote de longueur de l'arbre est 1000 au lieu de 100 porté sur le dessin.

DONNÉES

A : *Appui simple* (roulement à rotule non bloqué suivant AB)

B : *Point fixe* (roulement à rotule bloqué suivant AB)

Force appliquée : F=750 kg (traction bielle DD′)

QUESTIONS

1. *Equilibrer le système* : Réaction bielle PP′ (inclinée dans les 3 vues) et réactions en A et B.
2. Déterminer les *efforts internes appliqués aux* sections droites de l'arbre AB :

Efforts tranchants T_Y, T_Z et T_r ; Moments fléchissants : M_Z, M_Y et M_r ; Moment de torsion : M_X (Voir axes de référence)

ÉQUILIBRE DU SYSTEME

Projections de F :
$$F_X = 0$$
$$F_Y = -750 \cos 20° = -705 \text{ kg}$$
$$F_Z = -750 \sin 20° = -256{,}5 \text{ kg}$$

Réaction bielle PP′ :

Equilibre de moment M_X (vue de profil): $F_Y R = F'_Z R'$

d'où : Projection $F'_Z = F'_Y \frac{R}{R'} = -705 \frac{300}{350} = -604{,}5$ kg

Projection F'_Y (vue de profil) :
$$F'_Y = F'_Z \text{ cotg } 60° = -\frac{604{,}5}{\sqrt{3}} = -349 \text{ kg}$$

Projection F'_X (vue en plan) :
$$F'_X = -F'_Y \text{ tg } 15° = 348 \cdot 0{,}269 = 93{,}5 \text{ kg}$$

Réaction totale (suivt PP′) =
$$\sqrt{93{,}5^2 + 349^2 + 604{,}5^2} = 704 \text{kg}$$

Sollicitations en C

Forces:
$$F_{C_X} = 0$$
$$F_{C_Y} = F_Y = -705 \text{ kg}$$
$$F_{C_Z} = F_Z = -256{,}5 \text{ kg}$$

Moments:
$$M_{C_X} = -F_Y R = 705 \cdot 0{,}3 = 211{,}5 \text{ mkg}$$
$$M_{C_Y} = F_Z d = 256{,}5 \cdot 0{,}2 = -51{,}3 \text{ mkg}$$
$$M_{C_Z} = -F_Y d = 705 \cdot 0{,}2 = 141 \text{ mkg}$$

Sollicitations en E

Forces:
$$F_{E_X} = F'_X = 93{,}5 \text{ kg}$$
$$F_{E_Y} = F'_Y = -349 \text{ kg}$$
$$F_{E_Z} = F'_Z = -604{,}5 \text{ kg}$$

Moments:
$$M_{E_X} = F'_Z R' = -604{,}5 \cdot 0{,}35 = -211{,}5 \text{ mkg}$$
$$M_{E_Y} = 0$$
$$M_{E_Z} = F'_X R' = -93{,}5 \cdot 0{,}35 = -32{,}72 \text{ mkg}$$

RÉACTIONS AUX PALIERS A ET B

Réactions verticales

$$R_{A_Z} + R_{B_Z} = -\Sigma F_Z = 256{,}5 + 604{,}5 = 861$$ (projections)

$$R_B \cdot 1 = F_Z \cdot 0{,}35 - F'_Z \cdot 0{,}9 = 633{,}8$$ (momt p. r. à A)

d'où: $R_{B_Z} = 633{,}8$ et $R_{A_Z} = 861 - 633{,}8 = 227{,}2$

Réactions horizontales

$$R_{A_Y} + R_{B_Y} = -\Sigma F_Y = 705 + 349 = 1054$$ (projections)

$$R_{A_Y} \cdot = -F_Y \cdot 0{,}35 - F'_Z \cdot 0{,}9 = 560{,}8$$ (momt p. r. à A)

d'ou: $R_{B_Y} = 560{,}8$ et $R_{A_Y} = 1054 - 560{,}8 = 493{,}2$

Réactions résultantes : $R_A = \sqrt{227{,}2^2 + 493{,}2^2} = 543$ kg

$$R_B = \sqrt{633{,}8^2 + 560{,}8^2} = 846{,}3 \text{ kg}$$

un arbre de renvoi de commande de vol.

PLANCHE
N°. **10**

CALCUL DES EFFORTS INTERNES DIAGRAMMES

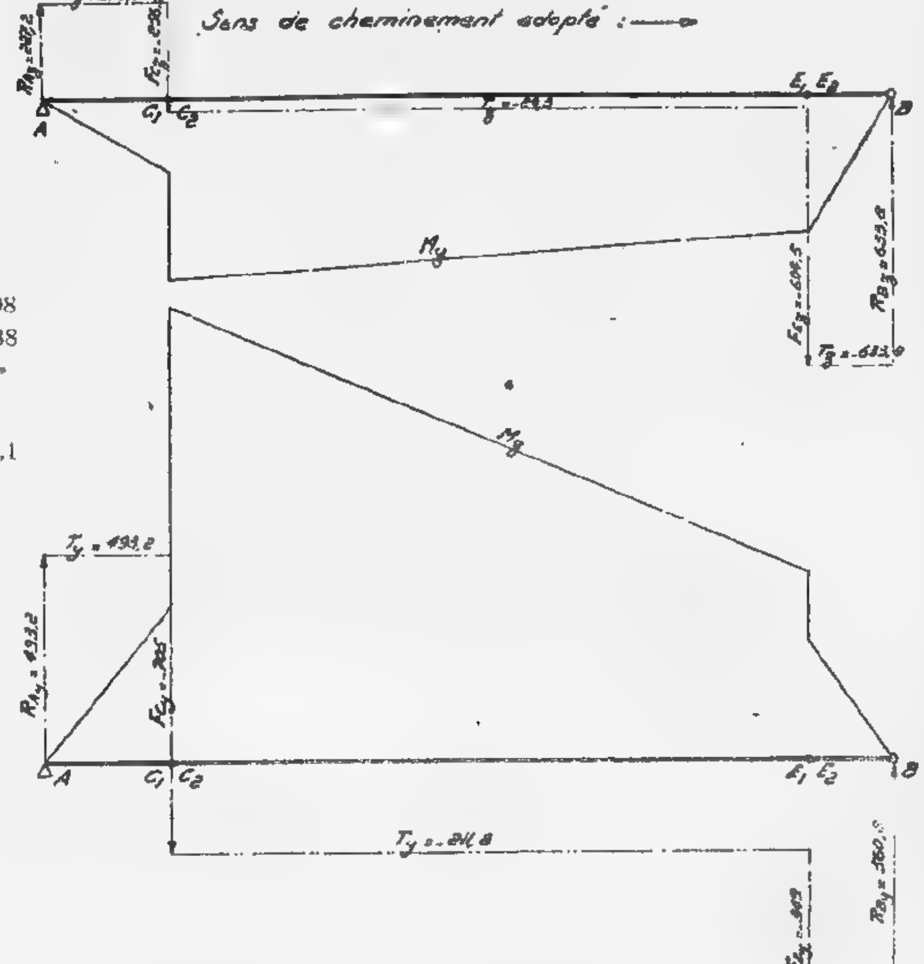
ÉCHELLES { Longueurs : 1/10.
Forces : 1 mm=20 kg.
Moments : 1 mm=4 mkg.

1. *Efforts verticaux*
(plan $x\,0\,z$)
Efforts tranchants T_z
(Voir diagramme)
Moments fléchissants M_Y
(en mkg)
Voir nota (1)

en C_1 : $M_Y = -227{,}2 \cdot 0{,}15 = -34{,}08$
en C_2 : $M_Y = -34{,}8 - 51{,}3 = -85{,}38$
en E_1 : $M_Y = -227{,}2 \cdot 0{,}9 - 51{,}3 + 256{,}5 \cdot 0{,}75 = -63{,}38$
en E_2 : $M_Y = -R_{B_Z} \cdot 0{,}1 = -633{,}8 \cdot 0{,}1 = -63{,}38$ (vérif. équilibre)

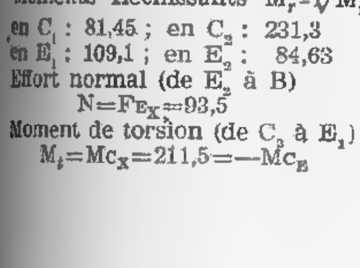
2. *Efforts horizontaux*
(plan $y\,0\,z$)
Efforts tranchants T_Y
(Voir diagramme)
Moments fléchissants M_Z

en C_1 : $M_Z = 493{,}2 \cdot 0{,}15 = 74$
en C_2 : $M_Z = 74 + 141 = 215$
en E_2 : $M_Z = R_{B_Y} \cdot 0{,}1 = 560{,}8 \cdot 0{,}1 = 56{,}08$

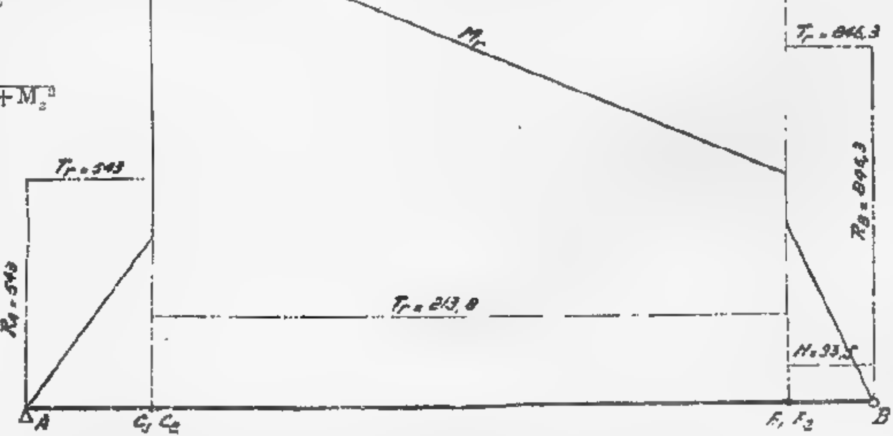


3. *Efforts tranchants, moments fléchissants résultants T_r et M_r (valeurs absolues)*

Effort normal N et moment de torsion $M_t = M_x$



Efforts tranchants $T_r = \sqrt{T_z^2 + T_y^2}$
Moments fléchissants $M_r = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$
en C_1 : 81,45 ; en C_2 : 231,3
en E_1 : 109,1 ; en E_2 : 84,63
Effort normal (de E_2 à B)
$N = F_{E_X} = 93{,}5$
Moment de torsion (de C_2 à E_1)
$M_t = M_{C_X} = 211{,}5 = -M_{C_E}$



NOTA :
1. Les sections C_1 et E_1 sont respectivement situées immédiatement à gauche de C et E.
Les sections C_2 et E_2 sont respectivement situées immédiatement à droite de C et E.
2. Voir convention de signes des moments sur vue en perspective.

Appellation usuelle	Ancienne désignation S.T.Ae (tableau 1918)	Désignation normalisée (juin 1942)	Genre de traitemt	Caractéristiques mécaniques — Traction lente — R	Traction lente — L_E	Traction lente — A %	DURETÉ — H	RÉSILce — K_M	FATIGUE — f	Exemples d'emploi
Extra-doux de cémentation au carbone	11	**XC 12**	Rec. T_E	**38** **70**	 50	 10	111 205	 10		Pièces cément. emboutis profonds pièces soudées
Acier doux au carbone	12	**XC 18**	Rec.	**42**	28	26	123	14	22	Pièces soudées peu importantes
Mi-dur au carbone	14	**XC 35**	Rec. T_E-Rev.	**54** **80**	30 58	20 12	157 230	10 10	26 42	Pièces peu importantes boulonnerie
Dur au carbone	16	**XC 65**	Rec. T_H-Rev. T_H-Rev.	**76** **90** **140**	45 70	10 8	221 261	5 5		Haubans, cordes ressorts ordin. Ressorts
Extra-dur au carbone	16	**XC 80**	T_H-Rev. Rec écroui	**120** **170**	100 165	3 6	345			Haubans, cordes ressorts de qualité
Nickel-chrome molybdène de cémentation	31bis	**16NCD13**	Rec. T_H-Rev. T_H-Rev. T_H-Rev.	**60** **85** **100** **110**	35 70 85 90	16 14 12 8	175 248 292 315	 18 13 8	 45	à résistance Pièces cément. élevée, axes, engrenages
Chrome-manganèse de cémentation		**20CM5**	T_H-Rev. T_H-Rev.	**95** **115**	80 90	12 6	270 340	12 6		Pièces cément.
Nickel-chrome mi-dur	32	**30NC11**	Rec. T_H-Rev. T_H-Rev. T_H-Rev.	**60** **85** **100** **160**	35 70 90 125	16 13 10 6	175 248 285 445	 12 10 4	 42 45 46	Ferrures arbres, axes, engrenages
Nickel-chrome dur auto-trempant	34	**40NC17**	T_A - Rev $T_H$ouT_A-Rev $T_H$ouT_A-Rev $T_H$ouT_A-Rev	**75** **110** **165** **170**	60 90 135 150	16 7 5 6	210 315 460 470	 8 4,5 5,5	 46 45 45	Ferrures importantes
Nickel-chrome molybdène auto-trempant	34bis	**40CND12** **40CND18**	T_A - Rev $T_H$ouT_A-Rev $T_H$ouT_A-Rev T_H ou T_A	**75** **110** **170** **200**	60 90 140 160	16 7 5 6	230 330 500 575	 9 4 4	 50 58	Ferrures importantes
Chrome-nickel molybdène auto-trempant	Genre 32bis	**32CND12**	T_A - Rev T_A - Rev	**115** **165**	100 130	8 5	340 455	5 3		Ferrures

Appellation usuelle	Ancienne désignation S.T.Aé (tableau 1918)	Désignation normalisée (juin 1942)	Genre de traitement	Caractéristiques mécaniques						Exemples d'emploi
				Traction lente			DURETÉ	RÉSILce	FATIGUE	
				R	L_E	A%	H	K_M	f	
Chrome molybdène doux * (soudable)	53 bis	20CD4	Rec. T_A T_H - Rev T_H - Rev	55 68 [illegible] 100	30 48 70 85	18 14 12 10	185 220 260 310	 15 12		Construction soudée : batis-moteurs trains, etc.
Chrome molybdène mi-dur		35 CD 4	Rec. T_H - Rev	52 110	32 95	 10	175 320	12 14		Axes, ferrures
Mangano-siliceux	41	45 S 8	T_E - Rev	140 180	120 160	6 3	410 525	4 2		Ressorts de qualité, barres de torsion
Inoxydable 18/8		Z 3 CN 18	T_E 1/4 écroui 1/2 écroui 3/4 écroui écroui très écroui	55 75 95 110 125 140	23 50 70 90 110 130	40 25 20 14 9 4	125	20		Pièces inox. à très haute résilience, collecteurs d'échappement, pare-flammes
Inoxydable à 13 % de chrome (nuance mi dure)		Z 30 C 13	recuit TA ou TH-Rev TA ou TH-Rev	55 95 140	30 75 115	25 8 3		4		Cordes pour charnières

LEGENDE

Traitements thermiques

Rec=recuit ; T_E=trempe à l'eau ; T_H=trempe à l'huile ; T_A=trempe à l'air ; Rev=revenu (après trempe).

Caractéristiques mécaniques

R=Résistance minimum à la rupture en traction lente en kg/mm²—contrainte normale admissible à rupture=n_a

L_E=Limite élastique conventionnelle en kg/mm²—contrainte normale de limite élastique=n_e

A%=Allongement relatif à la rupture en traction lente

H=Indice de dureté Brinell

K_M=Indice de résilience Mesnager

f=Limite conventionnelle de fatigue en flexion rotative (en kg/mm²).

Désignation d'un acier

Un acier se désigne en utilisant son symbole normalisé, ce qui précise sa qualité (composition chimique) et en faisant suivre ce symbole de la résistance R qui correspond à son état d'emploi (traitement thermique).

Exemple : Acier 20CD4R=85 kg/mm²

Caractéristiques mécaniques des principaux ALLIAGES LEGERS et ULTRA-LEGERS utilisés en construction aéronautique.

Appellation usuelle	Genre de l'alliage	Désignation normalisée: Qualité	Désignation normalisée: Etat habituel	Traitement	Caractéristiques mécaniques — Traction lente: R	L_E	A %	Densité	Modules d'élasticité: E	G	Exemples d'emploi
ALLIAGES LEGERS A BASE D'ALUMINIUM											
Aluminium	forge	Ao	X 70	rec.	9	4	38	2,7	6750	2600	Emboutis profonds, tuyauteries d'aménagements
			X 71	écroui 1/4 dur	12	8	25				
			X 72	écroui 1/2 dur	[illegible]	11	12				
			X 73	écroui 3/4 dur	16	15	8				
			X 74	écroui dur	18	17	6				
	fonderie	Ao	Y 19	coul. sabl.	7	3,5	7				
Duralumin	forge	AU 4 G	X 78	T_E 495° vieilli	40	26	16	2,8	7000	2700	Structures, revêtements, pièces matricées
Védal	forge (lam.)				très sensiblement égales à AU4G						Pièces résistant à corros. marine
Duralumin à haute résistance	forge	AU4G1	X 78		45	32	12	2,8	7000	2700	
Zicral	tôles plaquées profilés filés	AZ8GU		T_E 465° Rev. 135°	52 57	44 50	8 6	2,8	6500 7000	2500 2700	Profilés, tôles à haute résistance
Alliages à 5 % de magnésium	forge	A G 5	X 70	laminé	[illegible]	14	20				Pièces de résistance moyenne devant résister à la corrosion
	fonderie	A G 5	Y 19	coul. sabl.							
Alliage à 7 % de magnésium	forge	A G 7	X 70	laminé	32	18	22				
	fonderie	A G 7	Y 19	coul. sabl.	15	8					
Alliage au cuivre titane	fonderie	U 5 GT	Y 18	coul. sabl. T_E vieilli	32	20	7	2,75			Pièces mécan. importantes
Alpax ordinaire	fonderie	AS 13	Y 19	coul. sabl.	18	9	3-8	2,6			Pièces de fonderie compliquées
Alpax amélioré γ	fonderie	AS 13 G	Y 19	coul. sabl.	25	15	1-3				
ALLIAGES LEGERS A BASE DE MAGNESIUM											
Magnésium pur	forge	G 9	X 70	rec.	15	6	5	1,7			Emboutis cales
	fonderie	G 9	Y 19	coul. sabl.	9	6	6				
Alliage T2	forge	G M 2	X 70	rec.	22	10	6	1,75	4200		Emboutis capotages aménagements
Alliage M1	forge	GA 6 Z	X 70	rec.	28	18	11	1,8	4500		
Alliage F1	fonderie	GA6Z3	Y 19	coul. sabl.	16	7	3	1,8	4300		Carters, roues, volants, supports
Alliage FT	fonderie	GA 9	Y 19	coul. sabl.	24	6	8	1,8	4300		

Remarques

Indices de traitement thermiques et caractéristiques mécaniques : R, L_E et A%, voir Pl. 11

E : module d'élasticité longitudinal ; G : module d'élasticité transversal

Désignation d'un alliage léger : symbole de qualité suivi du symbole d'état. Ex : AU4G.X78

Note importante : En ce qui concerne les caractéristiques des alliages de fonderie, se reporter au chap. V, parag. 5.9.

Caractéristiques de résistance des principaux ORGANES SOUPLES utilisés en construction aéronautique.

CABLES D'ACIER A HAUTE RÉSISTANCE

(Caractéristiques conformes à Norme Air 9005)

Câbles souples

Diam. nom. mm	Diam. d'un fil mm	Poids par mètre g	Charge min. à la rupt. kg	Composition
1	0,11	4,5	80	6 torons de 1+6 fils Ame principale : un 7e toron ident.
1,6	0,18	11	200	
2	0,22	18	315	
2,8	0,18	31,5	560	6 tor. de 1+6+12 f. Ame principale : un 7e toron ident.
3,35	0,22	50	800	
4,25	0,20	75	1250	6 torons de 1+6+12+18 fils Ame princip. cablée en 6 tor. de 1+6 fils
5,3	0,25	118	2060	
6,7	0,32	190	3150	

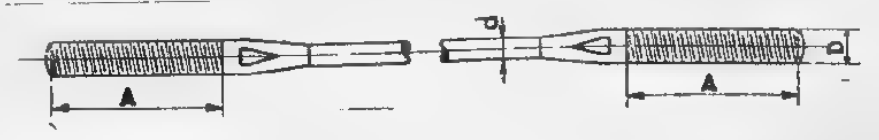
Câbles rigides

Diam. nom. mm	Diam. d'un fil mm	Poids par mètre g	Charge min. à la rupt. kg	Composition
1,5	0,28	11,2	212	1 toron de 1+6+12 fils
1,7	0,32	14	265	
2,1	0 40	22,4	425	
2,6	0,50	35,5	670	
3,2	0,63	56	1060	
4,1	0,80	90	1700	
4,5	0,63	105	2000	1 toron de 1+6+12+18 fils
5,1	0,71	132	2500	
5,7	0,80	170	3140	
6,5	0,90	210	4000	
7,2	1,00	215	5000	

Cordes à piano

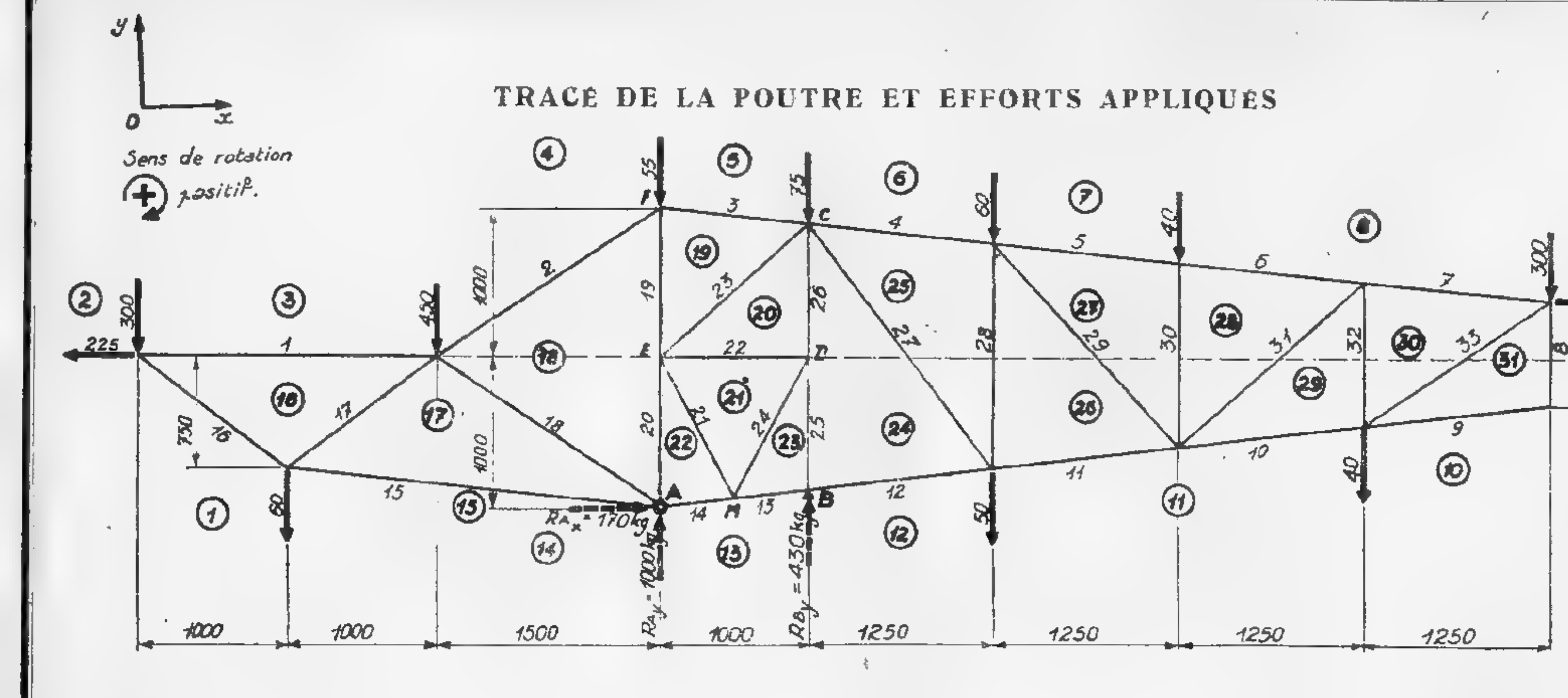
Diamètre mm	Charge min. à la rupture kg	Poids par mètre g	Diamètre mm	Charge min. à la rupture kg	Poids par mètre g	Diamètre mm	Charge min. à la rupture kg	Poids par mètre g
0,3	14	1,2	1,2	203	8,8	3,5	1630	75
0,5	35	1,5	1,5	318	13,8	4,0	2010	98
0,6	51	2,2	2,0	549	24,5	5,0	2940	153
0,8	90	3 9	2,5	857	38,3	6,0	3810	220
1,0	141	6,1	3,0	1200	55,0	7,0	5000	300

Haubans ronds



D mm	pas 0,01mm	A mm	d mm	Charge de rupt. kg	Poids 1er m g	Poids mètre suppl. g
3	60	35	1,8	400	27	24
4	75	40	2,0	500	34	29
5	90	45	2,5	750	53	44
5	90	45	3,0	1100	71	62
6	100	50	3,5	1500.	97	84
6	100	50	4,0	2000	121	108
7	100	55	4,5	2500	155	125
8	125	55	5,0	3100	191	165
8	125	55	5,5	3800	225	199
9	125	55	6	4500	234	273
11	150	65	7	6100.	370	318
12	175	70	8	8000	478	414
14	200	75	10	12500	700	637
16	200	85	12	18000	1053	912

TRACÉ DE LA POUTRE ET EFFORTS APPLIQUÉS



Données :

En **B** : appui simple (réaction dirigée verticalement).

En **A** : point fixe (articulation).

Forces appliquées : voir schéma ci-dessus.

Calcul des réactions :

Equations de projections :

$\Sigma F_x + \Sigma R_x = 0$ donne : $\Sigma R_x = 170$ kg →

$\Sigma F_y + \Sigma R_y = 0$ donne : $\Sigma R_y = 1430$ kg ↑

Equation de moment : (par rapport à A)

$\Sigma M_A = 430$ mkg d'où $R_{By} = \frac{430}{1} = 430$ kg ↑

On a donc :

$R_{Ax} = \Sigma R_x = 170$ kg →

$R_{Ay} = \Sigma R_y - R_{By} = 1430 - 430 = 1000$ kg ↑

...rres d'une poutre de fuselage, par la méthode de CRÉMONA.

PLANCHE

N° 14

TABLEAU DES EFFORTS DANS LES BARRES

(Efforts en kg)

BARRES	EFFORTS	BARRES	EFFORTS
1	— 625	18	+ 62
2	— 1260	19	+ 850
3	— 1055	20	+ 770
4	— 890	21	+ 50
5	— 690	22	+ 25
6	— 690	23	— 65
7	— 435	24	— 55
8	0	25	+ 430
9	0	26	+ 380
10	+ 380	27	— 355
11	+ 840	28	+ 260
12	+ 1055	29	— 290
13	+ 1055	30	+ 40
14	+ 1005	31	+ 340
15	+ 780	32	— 250
16	+ 500	33	+ 460
17	— 465		

Conventions de signes : + = compression, — = traction.

TRACÉ DE CREMONA

(Echelle des forces 1 mm = 10 kg)

14 15 1 2 17 18 3 16 4 5 6 7 13 8 22 23 21 20 19 25 27 30 28 26 24 9 31 10 29 11 12

Forces appliquées : Forces verticales F_A, F_B et F_C aux nœuds A, B et C.

et forces identiques aux nœuds symétriques

Décompositions successives			
Nœud A	$F_A = 1$ en A ⋙→ { 2 suivant AB ⋙→ B ; 3 suivant AC ⋙→ C } (Décomposition dans le plan vertical ABC)	**Nœud C**	$(3' + 7 + F_c) = 9$ ⋙→ { 10 suivant CN (d) ; 11 suivant CE ⋙→ E ; 12 suivant CD ⋙→ D } (e) (d) 10 s'équilibre par effort symétrique sur autre face. (e) Voir intersection plans sur figure.
Nœud B	$F_B + (2') = 4$ ⋙→ { 5 suivant B*a* (a) ; 6 suivant BM (b) } 5 ⋙→ { 7 suivant BC ; 8 suivant BD } (c) (a) B*a* = intersection du plan formé par 4 et BM avec BC-BD. (b) 6 s'équilibre par effort symétrique sur autre face. (c) décomposition dans le plan BC-BD.	**Nœud D**	$(8' + 12') = 13$ équilibré par réaction en D
		Nœud E	11′ équilibré par réaction en E
Nota	*Vraies grandeurs :* obtenues par rabattements. Exemple : vraie grandeur 11 (nœud C) = C.11a. Nous n'avons figuré sur l'épure que les barres travaillantes. Il existerait en réalité d'autres barres pour transmettre les efforts dissymétriques (diagonales AN, NB, ND et symétriques par exemple).		

barres d'un bâti-moteur, dans un cas de charges symétriques.

PLANCHE N° **15**

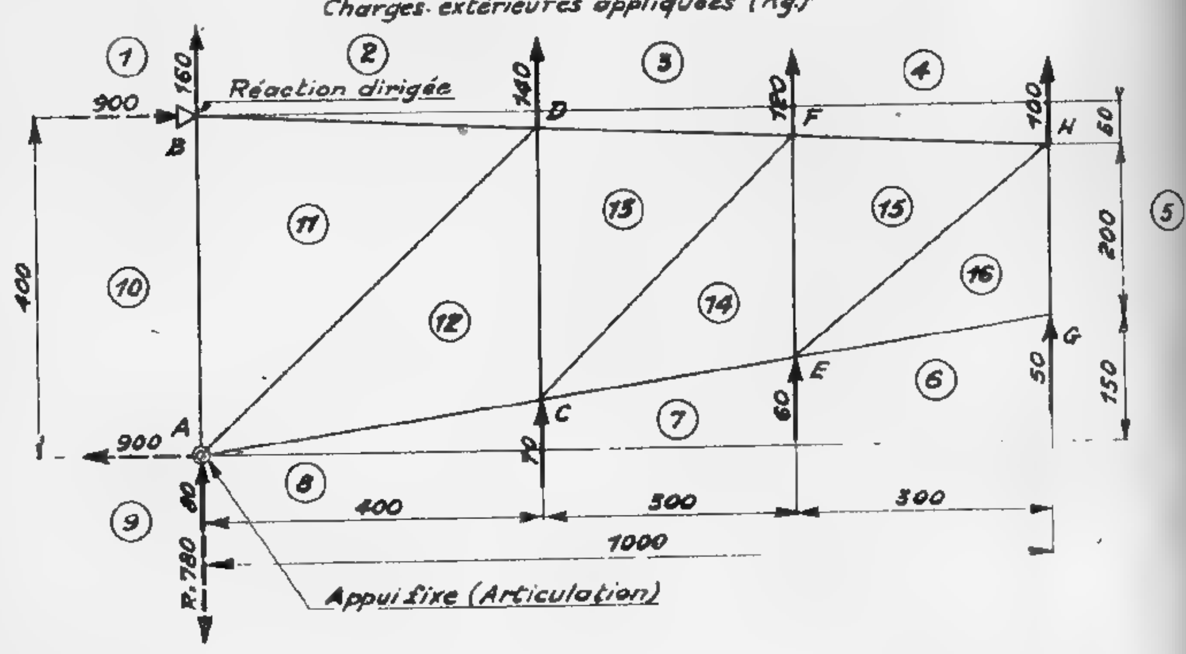
Projection verticale

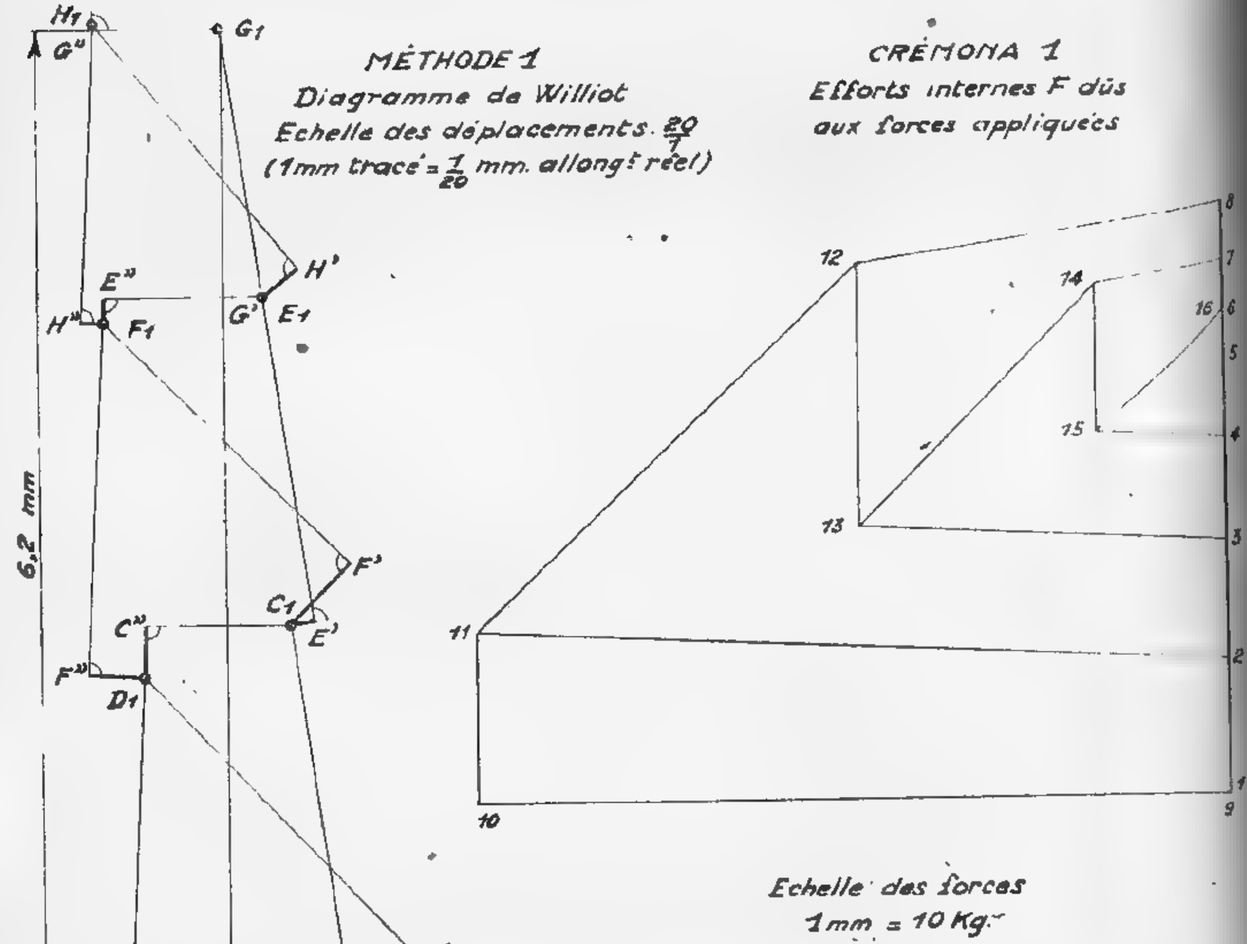
Projection horizontale (1/2 vue)

Axe de symétrie

Arc de cercle de centre C

Horizontale


SCHÉMA DE LA POUTRE - Echelle 1/10
Charges extérieures appliquées (Kg.)
Réaction dirigée
Appui fixe (Articulation)
900
160
140
120
100
400
300
1000
R.780
A
B
C
D
E
F
G
H


MÉTHODE 1
Diagramme de Williot
Echelle des déplacements 20/1
(1mm tracé = 1/20 mm. allongt réel)
6,2 mm
0,5
CRÉMONA 1
Efforts internes F dûs aux forces appliquées
Echelle des forces
1mm = 10 Kg.

s d'une poutre plane triangulée (méthodes 1 et 2).

PLANCHE

N° **16**

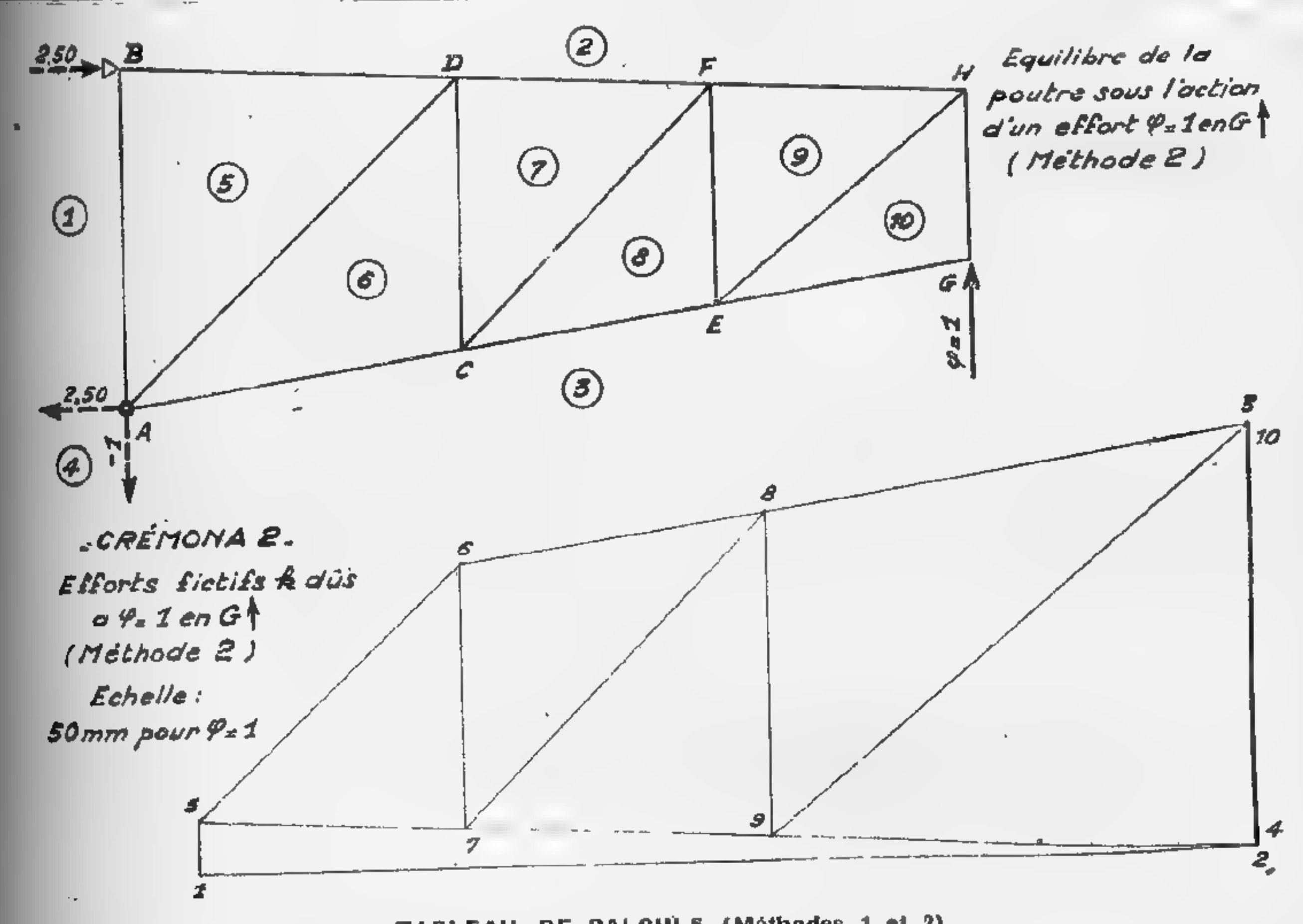


TABLEAU DE CALCULS (Méthodes 1 et 2)

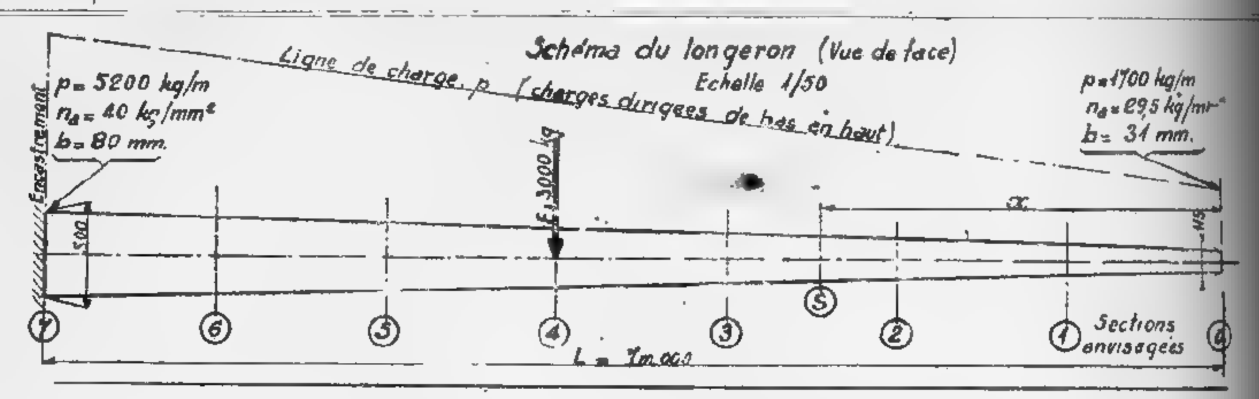
Repères barres	Caractéristiques: Désignation	Section S mm²	Longr L mm	Param. $C=10^4\frac{L}{SE}$	Crémona 1: Repères barrés	Efforts F kg	Méth. 1: Allongts $l=10^{-4}\cdot C\cdot F$ mm	Méthode 2 — Crémona 2: Repère	k	$10^{-4}\cdot F\cdot C\cdot k$ mm
AB	Tubes carrés 20×20×0,64 Duralumin	46,4	400	12,31	10-11	— 210	— 0,259	1-5	— 0,125	0,0323
CD		46,4	318	9,79	12-13	+ 310	+ 0,304	6-7	+ 0,626	0,1900
EF		46,4	259	7,97	14-15	+ 175	+ 0,139	8-9	+ 0,770	0,1073
GH		46,4	200	6,76	16-5	+ 50	+ 0,031	10-2	+ 1,00	0,0308
BD	Tubes carrés 20×20×0,8 Duralumin	57,6	401	9,94	2-11	+ 900	+ 0,895	2-5	+ 2 501	2,2398
DF		57,6	300	7,44	3-13	+ 450	+ 0,335	2-7	+ 1,875	0,6277
FH		57,6	300	7,44	4-15	+ 172	+ 0,128	2-9	+ 1,150	0,1428
AC		57,6	405	10,04	8-12	— 455	— 0,457	3-6	— 1,895	0,8656
CE		57,6	303	7,51	7-14	— 175	— 0,131	3-8	— 1,165	0,1487
EG		57,6	303	7,51	6-16	0	0	3-10	0	0
AD	Tubes carrés 20×20×0,64 Duralumin	46,4	552	16,99	11-12	— 625	— 1,060	5-6	— 0,862	0,9050
CF		46,4	426	13,11	13-14	— 395	— 0,519	7-8	— 1,029	0,5396
EH		46,4	385	11,85	15-16	— 225	— 0,267	9-10	— 1,490	0,3884
										6,2180

Conventions de signes: Efforts F et k : + = compression. — = traction. Allongements l : + = raccourct — = allongt.

Flèche verticale ↑ en G = Σ = **6,218** mm

CAS DE CHARGE	Réactions	Effort tranchant	MOMENT FLECHISSANT Equation / Valeur maximum	DEFORMEE Equation / Flèche max. EI = Cte
Poutre encastrée à une extrémité Charge concentrée à l'autre extrémité libre	$R_B=-P$	$T=P$ = Const.	$M=Px$ (linéaire)	$y = \frac{P}{6EI}(x^3-3l^2x+2l^3)$
	$-M_B=-Pl$		$M_B=Pl$	$y_A = \frac{Pl^3}{3EI}$ (à l'extrémité libre)
Poutre encastrée à une extrémité Charge uniformément répartie p = charge par unité de longueur : $P=pl$	$R_B=-pl$	$T=px$	$M_B=p\frac{x^2}{2}$ (parabole)	$y=\frac{p}{24EI}(x^4-4l^3x+3l^4)$
	$-M_B=-\frac{pl^2}{2}$	$T_P=pl$	$M_B=p\frac{l^2}{2}$	$y_A = \frac{pl^4}{8EI}$ (à l'extrémité)
Poutre encastrée à une extrémité Charge répartie de variation linéaire $p=a+\frac{b-a}{l}$ $p=a+kx$ avec $k=\frac{b-a}{l}$	$R_B=-\frac{a+b}{2}l$	$T=ax+\frac{k}{2}x^2$ (parabole)	$M=\frac{a}{2}x^2+\frac{k}{6}x^3$ (parabole cubique)	$y=\frac{a}{2EI}\left(\frac{x^4}{12}-\frac{l^3x}{3}+\frac{l^4}{4}\right)+\frac{k}{6EI}\left(\frac{x^5}{20}-\frac{l^4x}{4}+\frac{l^5}{5}\right)$
	$-M_B=\frac{2a+b}{6}l^2$	$T_B=\frac{a+b}{2}l$	$M_B=\frac{2a+b}{6}l^2$	$y_A=\frac{11a+4b}{120EI}l^4$ (à l'extrémité)
Poutre sur deux appuis Charge concentrée au milieu	$R_A=-\frac{P}{2}$	de A à C : $T=-\frac{P}{2}$	de A à C : $M=-\frac{Px}{2}$ de C à B : $M=-\frac{P}{2}(l-x)$	$y=\frac{Px}{48EI}(3l^2-4x^2)$ (de A à C et symétrique de C à B)
	$R_B=-\frac{P}{2}$	de C à B : $T=\frac{P}{2}$	$M_C=-\frac{P}{4}l$	$y_C=\frac{Pl^3}{48EI}$
			C=milieu de AB (sous charge P)	
Poutre sur deux appuis Charge concentrée en un point quelconque	$R_A=-\frac{Pb}{l}$	$T=-\frac{Pb}{l}$	de A à C : $M=-\frac{Pb}{l}x$ de C à B : $M=-\frac{Pa}{l}(l-x)$	de A à C : $y=\frac{Pbx}{6lEI}(l^2-b^2-x^2)$ de C à B : $y=\frac{Pa(l-x)}{6lEI}(2lx-a^2-x^2)$
	$R_B=-\frac{Pa}{l}$	$T=\frac{Pa}{l}$	$M_C=-\frac{Pab}{l}$	$y_{max}=\frac{Pbx_1^3}{3lEI}$ pour $x=x_1=\sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$

CAS DE CHARGE	Réactions	Effort tranchant	MOMENT FLECHISSANT Equation Valeur maximum	DEFORMEE Equation Flèche max. $EI = C^{te}$
Poutre sur deux appuis Charge uniformément répartie	$R_A = \frac{pl}{2}$ $R_B = -\frac{pl}{2}$	$T = -\frac{pl}{2} + px$	$M = -p\frac{x}{2}(l - x)$ $M_C = -p\frac{l^2}{8}$	$y = \frac{px}{24\,EI}(x^3 - 2l\,x^2 + l^3)$ $y_0 = \frac{5pl^4}{384\,EI}$
			C=milieu de AB	
Poutre sur deux appuis Charge répartie $p = C^{te}$ sur une fraction CD	$R_A = -p \times \frac{b(2c+b)}{2l}$ $R_B = -p \times \frac{b(2a+b)}{2l}$	$T = R_A$ $T' = R_A + p(x-a)$ $T'' = -R_B$	de A à C : $M = R_A x$ de C à D : $M = R_A x + p\frac{(x-a)^2}{2}$ de D à B : $M = R_B\,(l - x)$ $M_{max} = R_A\left(a - \frac{R_A}{2p}\right)$ pour $x = a + b\,\frac{2c+b}{2l}$	
Poutre sur deux appuis Charge répartie de variation linéaire $p = a + \frac{b-a}{l}x = a + kx$ avec $k = \frac{b-a}{l}$	$R_A = -\frac{l}{6}(2a+b)$ $R_B = -\frac{l}{6}(a+2b)$	$T = R_A + ax + \frac{kx^2}{2}$	$M = R_A x + \frac{x^2}{2}\left(a + \frac{kx}{3}\right)$ M max pour $x = x_1$ $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + \frac{l}{3}(2a+b)\,k}}{k}$	$y = \frac{ax}{24\,EI}(x^3 - 2l\,x^2 + l^3) + \frac{kx}{360\,EI}(3x^4 - 10l^2x^2 + 7l^4)$
Poutre sur deux appuis Charge concentrée sur un porte-à-faux	$R_A = \frac{Pa}{b}$ $R_B = -\frac{Pl}{b}$	$T = R_A$ $T' = -P$	de A à B : $M = \frac{Pa}{b}x$ de B à C : $M = P\,(l - x)$ M_{max} en B : $M_B = Pa$	de A à B : $y = \frac{Pax}{6b\,EI}(x^2 - b^2)$ de B à C : $y = -\frac{P}{6\,EI}\left[(x-b)^3 - a(x-b)^2 - 2ax\,(x-b)\right]$ Flèche en C $y_0 = \frac{Pa^2l}{3\,EI}$
Poutre sur deux appuis Moment μ appliqué entre appuis	$R_A = -\frac{\mu}{l}$ $R_B = \frac{\mu}{l}$	$T = \frac{\mu}{l} = C^{te}$	de A à C : $M = -\mu\frac{x}{l}$ de C à B : $M = \frac{\mu}{l}(l - x)$ en C : $-\mu\frac{a}{l}$ si $a > b$ ou $+\mu\frac{b}{l}$ si $a < b$	de A à C : $y = -\frac{\mu x}{6l\,EI}(x^2 + 3b^2 - l^2)$ de C à B : $y = -\frac{\mu}{6l\,EI}\left[x^3 - 3lx^2 + (2l^2 + 3a^2)x - 3a^2l\right]$



Données

Forme extérieure. Charges appliquées et contraintes admissibles (à la rupture). Voir schéma ci-dessus et parag. 7.4. Matière : Duralumin AU4G.
Sections envisagées : voir schéma ci-dessus. Origine des abscisses x : extrémité (section 0)

Relations préliminaires

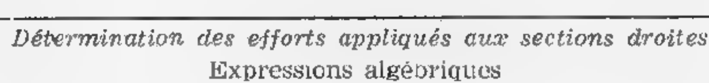
Dans une section d'abscisse x mètres :

Hauteur extérieure : $H = 115 + \frac{500-115}{7}x = 115 + 55\,x$ (en mm)

Largeur utile : $b = 31 + \frac{80-31}{7}x = 31 + 7\,x$ (en mm)

Ordonnée de charges réparties (kg/m) : $p = 1700 + \frac{5200-1700}{7}\,x = 1700 + 500\,x$

Contrainte de flexion admissible (kg/mm²) : $n_a = 29{,}5 + \frac{40-29{,}5}{7}\,x = 29{,}5 + 1{,}5x$



Détermination des efforts appliqués aux sections droites

Expressions algébriques

Efforts dus aux charges réparties p

$T_1 = \int_0^x p\,dx = \int_0^x (1700 + 500x)\,dx = 1700x + 250x^2$ (en kg)

$M_1 = \int_0^x T_1\,dx = \int_0^x (1700x - 250x^2)\,dx = 850x^2 + 83{,}33x^3$ (en kg)

Efforts dus à la charge concentrée F

de $x=0$ à $x=4$: $T_2 = 0$; $M_2 = 0$

de $x=4$ à $x=7$: $T_2 = -3000$ kg ;

$M_2 = -3000\,(x-4)$ mkg

Valeurs numériques au niveau des sections envisagées : Voir tableaux ci-contre col. 6, 7, 17, 18
Efforts résultants : $T = T_1 + T_2$; $M = M_1 + M_2$ Voir tableaux : colonnes 8 et 19.

Détermination de l'épaisseur e des semelles. (Voir parag. 7.22)

$e = \frac{H-h}{2}$ avec $h^3 = H\left(H^2 - \frac{6\,M}{b\,n_a}\right)$: colonnes 9 à 13 du tableau 1.

Nota. — On néglige, pour ce calcul, la participation de l'âme en flexion et les parties a et b des semelles affaiblies par les trous de perçage des rivetages longitudinaux. On adopte une épaisseur e variant linéairement et limitée inférieurement à 8 mm (construction). Voir diagramme et colonne 14.

Détermination de l'épaisseur de l'âme. (Voir parag. 7.3)

Calcul de l'effort tranchant réduit $T' = T - k\,\frac{M}{H'}$ (colonne 22, tableau 2)

avec $H' = H - e$ (colonne 20) et k = coefficient de convergence des semelles $= \frac{500-115}{7000} = 0{,}055$

épaisseur théorique : $a = \frac{T'}{H' t_a}$ avec $t_a = 10$ kg/mm² (Valeur forfaitaire) (colonne 23)

épaisseur adoptée : tôle standard d'épaisseur supérieure (Voir diagramme et colonne 24)

Détermination du rivetage âme-semelles. (Voir parag. 8.3)

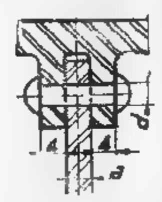
d = diamètre des rivets (colonne 25) S = section rivets $= \frac{\pi\,d^2}{4}$

Condition de cisaillement des rivets : Rivets AU4G ; $t_a = 24$ kg/mm²

double cisaillement d'où : $P_a' = \frac{T'}{48\,SH'}$ (en mm) (colonne 26)

Condition de matage sur l'âme : $p_a = 60$ kg/mm² d'où : $P''_a = 60\,\frac{a\,dH'}{T'}$ (colonne 27)

Pas maximum admissible P_a : colonne 28.



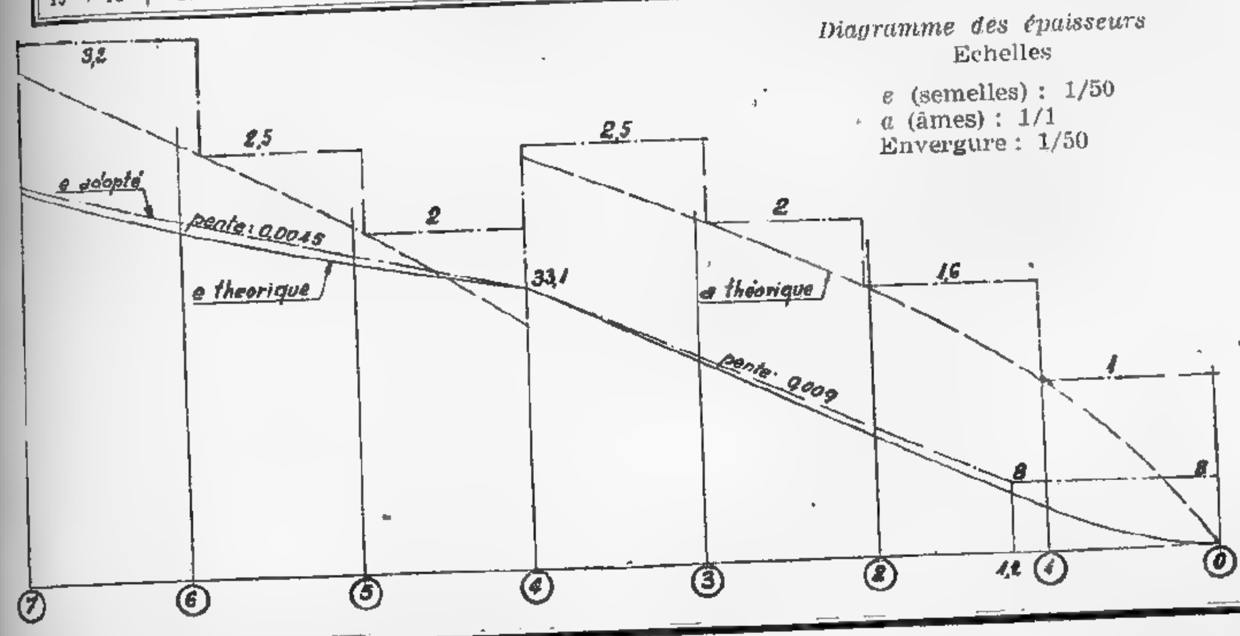
TABLEAUX DE CALCULS

Tableau 1 : *Détermination de l'épaisseur e des semelles.*

Sections		Données			Moments fléchissants			Termes intermédiaires				épais. e	
Rep^{es}	x	H	b	n_a	M_1	M_2	M	$\frac{6M}{bn_a}$	$H^2-\frac{6M}{bn_a}$	$h^3 \cdot 10^{-3}$	h	théor.	adopt.
	m	mm	mm	kg/mm²	mkg	mkg	mkg	mm²	mm²	mm⁴	mm	mm	mm
1	1	170	38	31	933	0	933	4752	24148	4105,2	160,2	4,9	8
2	2	225	45	32,5	4067	0	4067	16685	33940	7636,5	196,9	14,05	15,2
3	3	280	52	34	9900	0	9900	33600	44800	12544	232,3	23,85	24,2
4	4	335	59	35,5	18933	0	18933	54235	57990	19426,6	268,8	33,1	33,1
5	5	390	66	37	31667	—3000	28667	70435	81665	31849,3	317,0	36,5	37,6
6	6	445	73	38,5	48600	—6000	42600	90945	107080	47650,6	362,5	41,25	42,1
7	7	500	80	40	70233	—9000	61233	114812	135188	67594	407,3	46 35	46,6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Tableau 2 : *Détermination de l'épaisseur de l'âme et du rivetage âme-semelles.*

Sections		Eff. tranchants bruts			Eff. tranch. réduits			Epais. d'âme		Rivetage âme-semelles			
Rep^{es}	x	T_1	T_2	T	H'	$k\frac{M}{H'}$	T'	a théor.	a adopt.	d	P'_a cisail^t	P''_a mat.	P_e max.
	m	kg	kg	kg	mm	kg	kg	mm	mm	mm	mm	mm	mm
1	1	1950	0	1950	162	317	1633	1,01	1	4	61	23,8	23,8
2	2	4400	0	4400	209,8	1060	3340	1,51	1,6	4	38	24,0	24,0
3	3	7350	0	7350	255,9	2120	5230	2,04	2,5	4	29,6	29,3	29,3
4	4	10800	0 —3000	10800 7800	301,9	3450	7350 4350	2,44 1,44	2,5 2	4 4	24,8 42	24,6 33,3	24,6 33,3
5	5	14750	—3000	11750	352,4	4470	7280	2,06	2,5	4	29,2	29	29
6	6	19200	—3000	16200	402,9	5810	10390	2 57	3,2	5	36,6	37,2	36,5
7	7	24150	—3000	21150	453,4	7430	13720	3,03	3,2	5	31	31,7	31
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28



Données

Dimensions extérieures du longeron et épaisseurs e des semelles déduites de la Planche 18.
(Voir colonnes 3 à 5 du tableau ci-contre)
Moment d'inertie de flexion d'une section droite du longeron, avec les mêmes approximations que sur la planche 18.
(âme et parties a et b des semelles négligées.)

$$I = \frac{b}{12}\left[H^3-(H-2e)^3\right]$$

(Voir colonne 6 tableau ci-contre)

Moments fléchissants appliqués au coefficient de calcul à rupture : voir colonne 8 tableau planche 18.

Questions

Pour un coefficient de calcul égal aux 2/3 du coefficient de rupture (d'où M=2/3 M (rupture). Voir colonne 7 tableau ci-contre.)

a) Tracer la fibre moyenne déformée du longeron ;
b) Evaluer l'angle de rotation de la section (2) (x=2m) ;
c) Evaluer directement la flèche verticale à l'extrémité.

Nota : On supposera pour ces calculs, la section d'encastrement indéformable
Module d'élasticité E=7000 kg/mm² (Duralumin AU4G)

---

a) Tracé de la fibre moyenne déformée

Voir épure ci-contre, effectuée en utilisant la méthode de la courbe $\frac{M}{EI}$ (Chap. X, § 3.32). Voir valeurs de $\frac{M}{I}$ colonne 8 et échelles ci-contre.

---

b) Angle de rotation de la section (2) (Voir chap. X, § 2.)

Aire délimitée par la courbe $\frac{M}{I}$ entre encastrement et (2)

$$S = 436{,}5+470+527+601+680 = 2714{,}5 \text{ mm}^2$$

Echelle des rotations : $1 \text{ mm}^2 = \frac{1}{E}$ (échelles surfaces courbes $\frac{M}{I}$) $= \frac{0{,}25}{7000} = 3{,}57 \times 10^{-5}$ radian

d'où : $\alpha_2 = 2714{,}5 \times 3{,}57 \times 10^{-5} \times 57{,}3 = 5{,}55$ degrés $= 5°33'$

---

c) Flèche à l'extrémité du longeron (Voir chap. X § 4.3.)

Moments fictifs m dus à $\varphi = 1$ en bout : $m = 100\,x$ (en mm) (colonne 9)

Produits $\frac{Mm}{I}$: colonne 10 et courbe ci-contre (à l'échelle 1 mm=20 kg/mm²)

1°) *Planimétrage* de la courbe $\frac{Mm}{I}$: $S_1 = 3220$ mm²

Echelle : $1 \text{ mm}^2 = \frac{1}{E}$ (échelle $\frac{Mm}{I}$) · (échelle longueurs) $= \frac{20 \times 50}{7000} = 0{,}143$ mm.

d'où $y_0 = 3220 \times 0{,}143 =$ **461 mm.**

2°) *Addition* des produits partiels moyens (colonne 11)

$$y_0 = \sum \frac{Mm}{EI}\Delta x = \frac{1000}{7000}\sum\frac{Mm}{I} = 0{,}1428 \times 3228{,}3 = \mathbf{461{,}2\ mm.}$$

3°) *Valeur lue sur le tracé* de la fibre déformée : 73,6 mm ; soit $y_0 = 73{,}6 \times 6{,}25 =$ **460 mm.**

(longeron d'aile dimensionné Planche 18).

PLANCHE
N° **19**

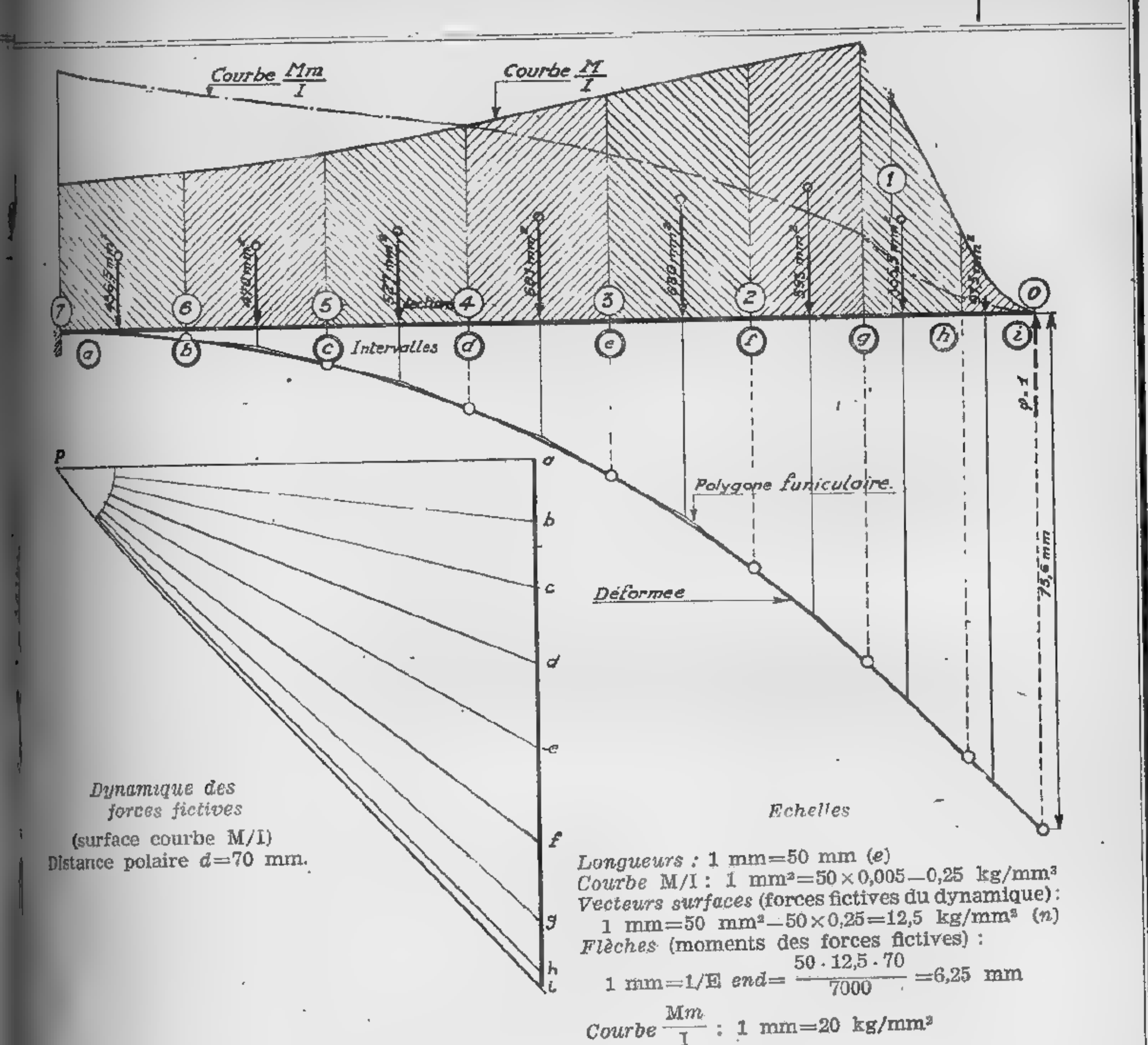
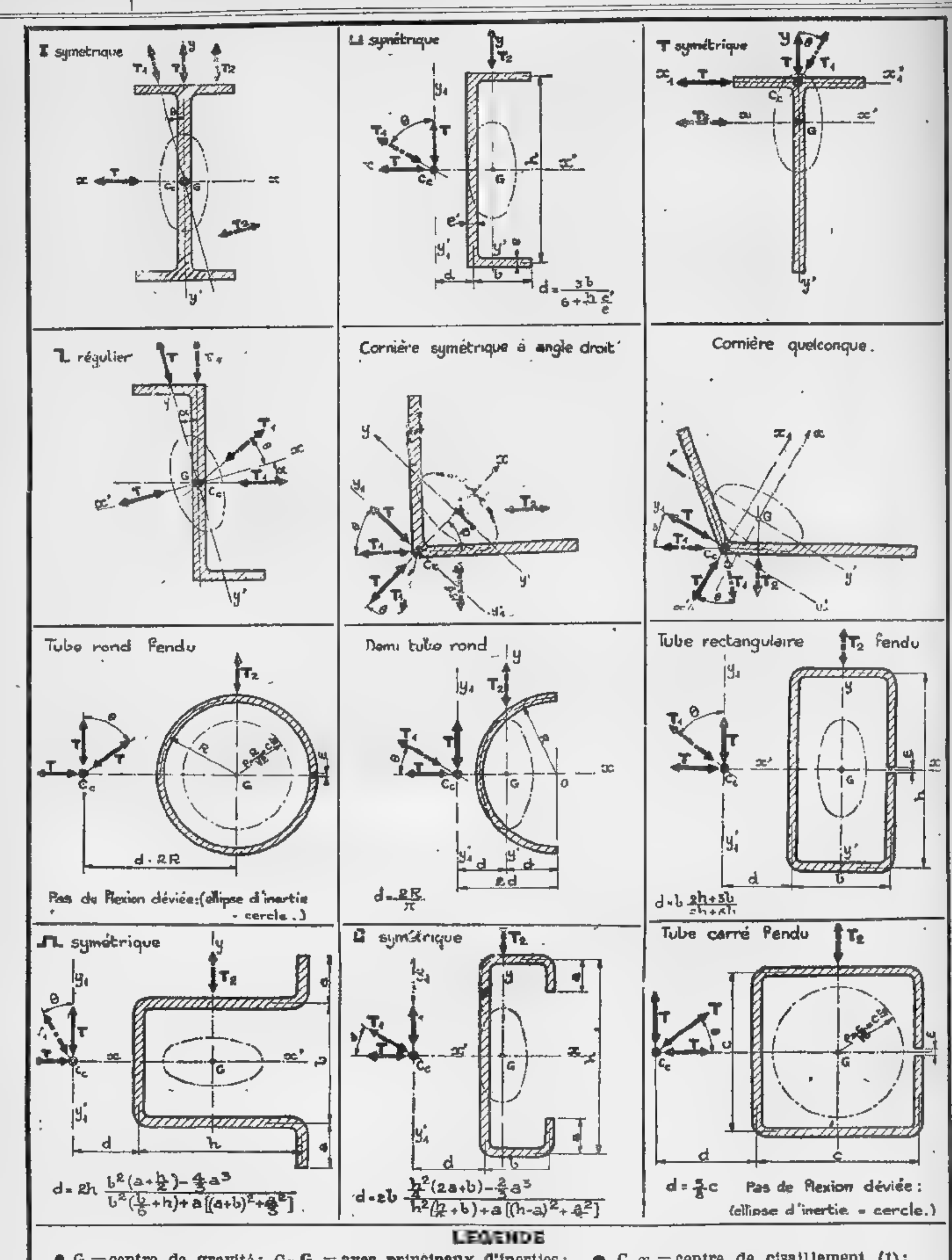


TABLEAU DE CALCULS

Sections		Caractéristiques				M	M/I	m	Mm/I	Mm/I
Repère	x	H	b	e	I	(2/3rupt.)				moyens
	m	mm	mm	mm	cm⁴	mkg	kg/cm³	mm	kg/mm²	kg/mm²
0	0	115	31	8	142 06	0	0	0	0	78,05
1	1	170	38	8	398,5	622	156,1	1000	156,1	258,25
2	2	225	45	15,2	1508,2	2718	180,2	2000	360,4	420,95
3	3	280	52	24,2	4112,2	6600	160,5	3000	481,5	523,55
4	4	335	59	33,1	8923	12620	141,4	4000	565,6	591,80
5	5	390	66	37,6	15467	19120	123,6	5000	618,0	646,50
6	6	445	73	42,1	25250	28400	112,5	6000	675,0	709,20
7	7	500	80	46 6	38415	40800	106,2	7000	743,4	
										3228,30
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

CHAP. XI	**Conditions de flexion de quelques profilés ouverts.**	PLANCHE
§ 3.4		N° **20**



LEGENDE

● G = centre de gravité; G_x G_y = axes principaux d'inerties; ● $C_c x_1$ = centre de cisaillement (1);
$C_c x_1$ ou $C_c y_1$ = Axe principal de cisaillement.

T = Lignes d'application d'efforts appliqués (ou réactions) donnant lieu à un état de flexion plane.

T_1 = Lignes d'application » » » » » » » » » de flexion déviée (2).

T_2 = Lignes d'application » » » » » » » » de flexion avec torsion (3).

NOTA :
(1) Les positions du centre de cisaillement indiquées supposent toujours les épaisseurs très faibles.
(2) Les angles θ d'inclinaison des forces T_1 désignent des angles quelconques différents de 0° et de 90°.
(3) Toutes les charges autres que T ou T_1 donnent lieu à des états de flexion avec torsion. Les forces T_2

CHAP. XII § 1.	**Caractéristiques mécaniques des principaux BOIS utilisés en construction aéronautique.**	PLANCHE N° **21**

BOIS EN PLATEAUX

Désignation			Densité	Retract. transv^le	Contraintes admis. à rupture					Module d'élast. E	Indications d'emploi
					Compression		Traction		Cisaillem^t		
Catégorie	Appellation usuelle	Proven.	(1)	(2) %	II (3)	⊥ (4)	II (3)	⊥ (4)	(5)	(6)	
					kg/mm²						
Résineux	spruce	Amér.	0,46	7,4	3,5	0,65	8	0,13	0,33	1000	Mâts, semelles de longerons ou de caissons, baguettes de nervures
	sapin blanc	Suisse	0,45	6,0	3,5	0,65	8	0,13	0,35	1000	
	pin sylvestre	France	0,53	7,4	4,2	0,80	9	0,14	0,40	1000	
Feuillus tendres	peuplier	France	0,44	7,1	3,1	0,40	7	0,15	0,34	800	Chapeaux de nervures, cales, tasseaux, lisses
	aune	France	0,45	7,0	3,4	0,45			0,35	900	
Feuillus durs	bouleau	Norvège	0,70	8,5	4,1	1,10		0,25	0,50	1100	Cales, quilles d'angle, hélices, plaques d'appuis, semelles comprim
	noyer	France	0,65	7,1	3,9	1,20		0,27	0,50	1000	
	frêne	France	0,72	6,8	4,4	1,40	10	0,30	0,65	1200	
	hêtre	France	0,70	10,6	4,2	1,30	11	0,35	0,70	1100	
Feuillus très durs	hickory	Norvège	0,81		6,1	2,20			1,02	1300	Plaques d'appui, patins.

Remarques

(1) Les densités et les caractéristiques mécaniques correspondent à une humidité de 15 %.
(2) Rétractibilité (dans le sens tangentiel aux couches annuelles) entre bois vert et étuvé.
(3) II : Sollicitation dans le sens des fibres.
(4) ⊥ : Sollicitations perpendiculaires aux fibres (valeurs minima radiale ou tangentielle).
(5) Cisaillements tangentiels (valeurs minima) à considérer en glissement de flexion.
(6) Modules d'élasticité longitudinaux E mesurés en flexion statique.

CONTREPLAQUÉS

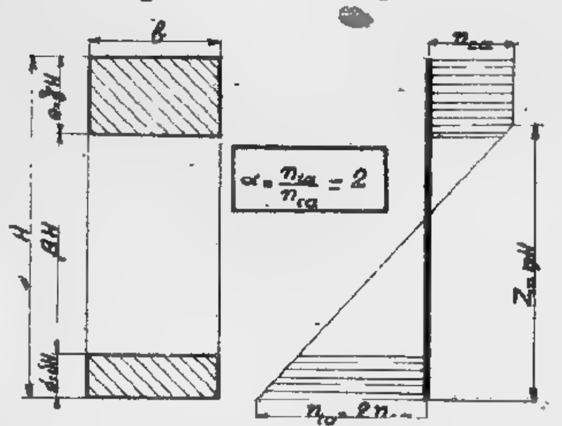
Désignation	Densité	Traction (kg/mm²)						Cisaillement (kg/mm²)				Indications d'emploi
		Contr. de rupt.			Module d'élasticité			Cont. de rupt		Mod. d'élas.		
		II (1)	⊥ (2)	X (3)	II (1)	⊥ (2)	X (3)	II et ⊥	X	II ⊥ (4)	X (4)	
okoumé	0,48	4,5	2,7	2,1	880	82	170	1,2	2,3	70	200	Revêtements, âmes de longerons et de nervures
bouleau	0,67	9 3	5,4	3,8	1600	140	270	2,2	4,5	[illegible]	270	
peuplier	0,46	5,1	3,0	2,2	1010	77		1,3	2,4	60	190	

Remarques

(1) II Effort dirigé suivant le sens des fibres extérieures.
(2) ⊥ Effort dirigé perpendiculairement au sens des fibres extérieures.
(3) X Effort dirigé à 45° par rapport aux fibres extérieures.
(4) Valeurs déduites de la publication Américaine A N C 5.

Données

Schéma du longeron — Répartition des contraintes de flexion pure (à la rupture)



Notations

$\gamma = \frac{e}{H}$ = épaisseur relative semelle comprimée.

$\delta = \frac{e'}{H}$ = épaisseur relative semelle tendue.

$\mu = \frac{e}{e'} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\text{épaisseur semelle comprimée}}{\text{épaisseur semelle tendue}}$

$\Delta = \frac{e+e'}{H} = \delta + \gamma = \frac{\text{hauteur remplie}}{\text{hauteur totale}}$ = coefficient de remplissage.

$\beta = \frac{H-e-e'}{H} = 1 - \Delta = \frac{\text{hauteur vide}}{\text{hauteur totale}}$ = coefficient d'évidement.

$\eta = \frac{Z}{H}$ = hauteur relative du point de brisure des tensions.

$\varphi = \frac{M_a}{bH^2 n_{ca}}$ = paramètre de charge admissible.

M_a = Moment fléchissant admissible à la limite de rupture.

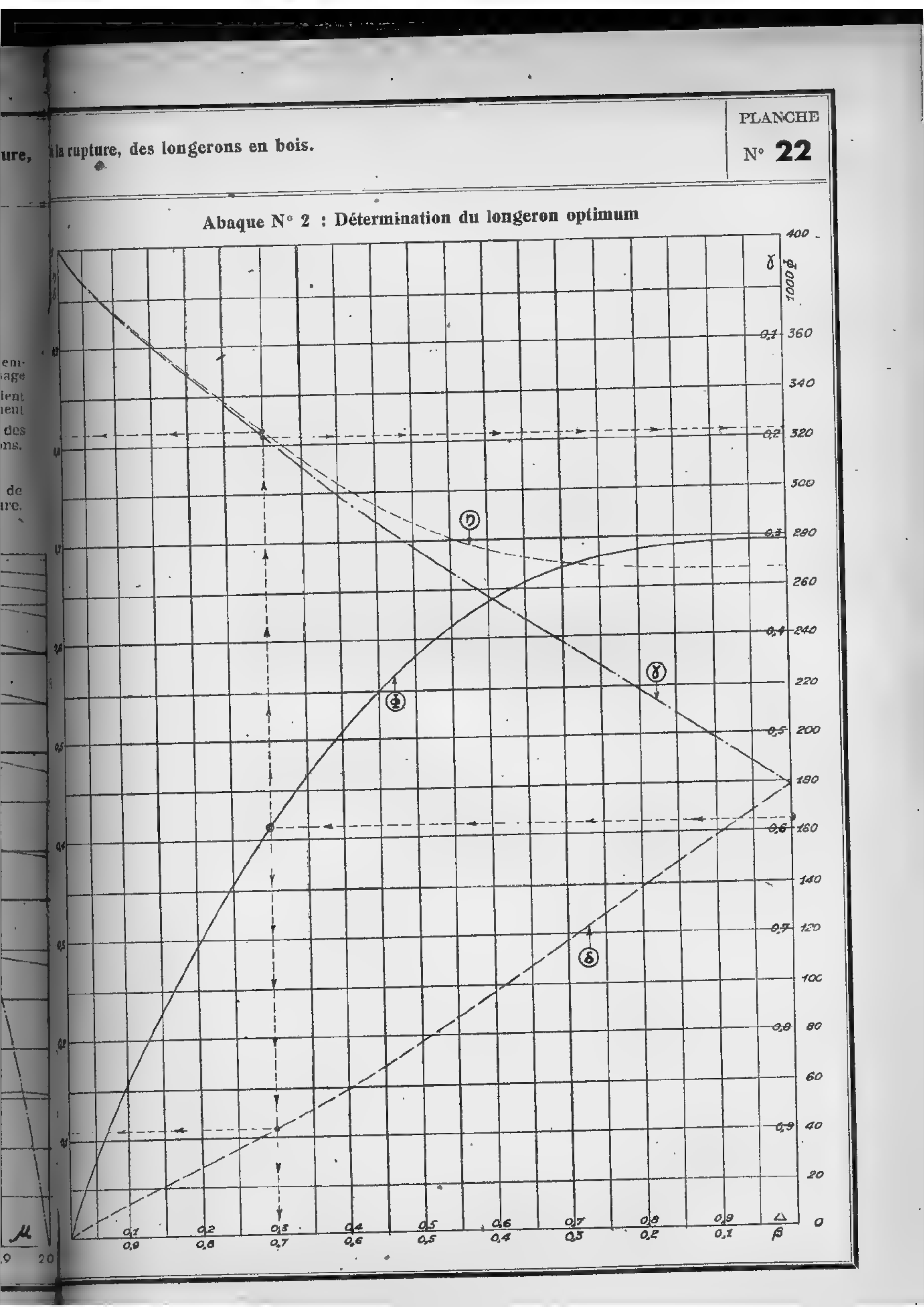
Abaque N° 1 : Vérification des sections.

$\varphi \cdot 1000$

280, 260, 240, 220, 200, 180, 160, 140, 120, 100, 80, 60, 40, 20, 0

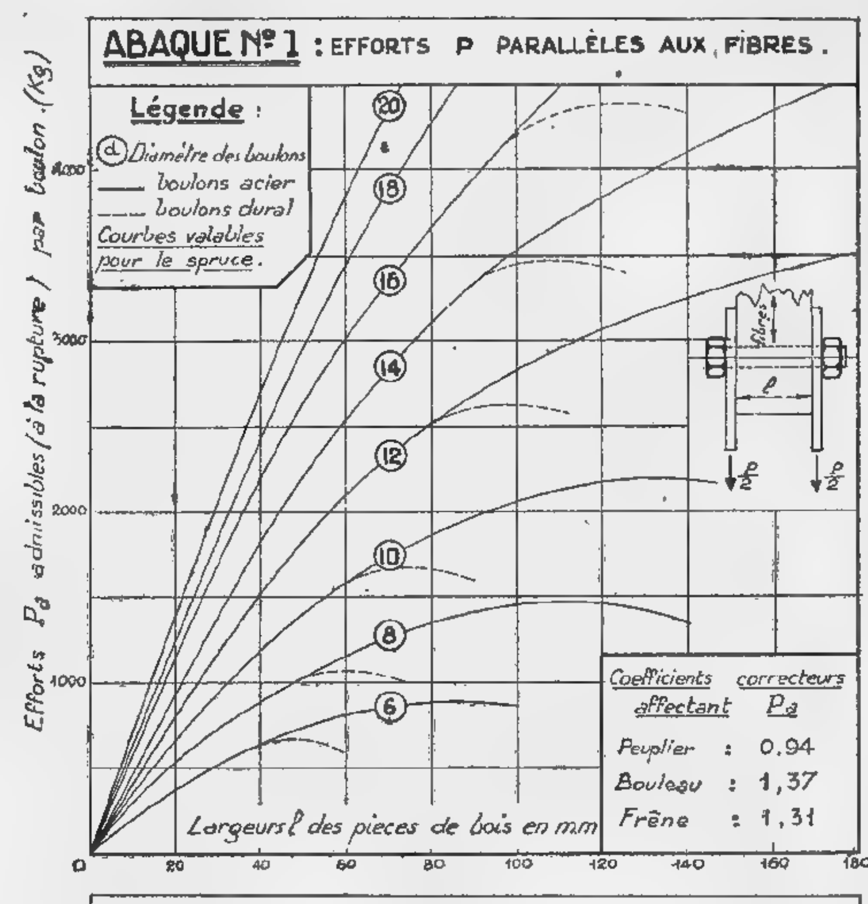
$\Delta = 0{,}9$ — $\Delta = 0{,}8$ — $\Delta = 0{,}7$ — $\Delta = 0{,}6$ — $\Delta = 0{,}5$ — $\Delta = 0{,}4$ — $\Delta = 0{,}3$ — $\Delta = 0{,}2$ — $\Delta = 0{,}1$

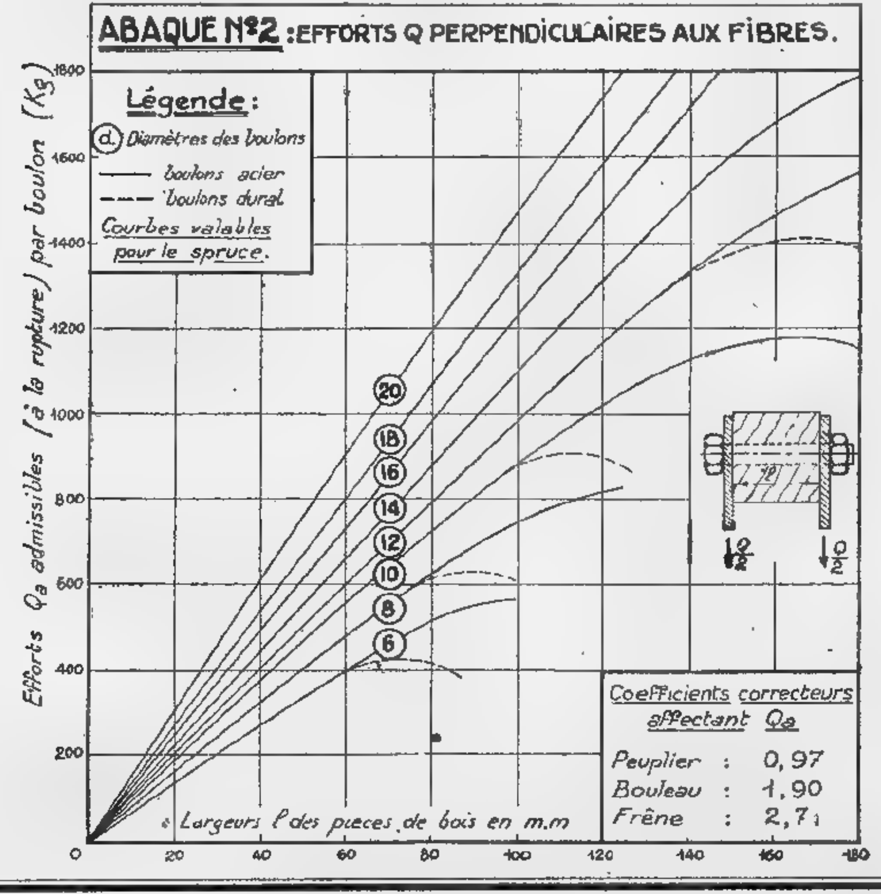
0,5 — 0,6 — 0,7 — 0,8 — 0,9 — 1 — 1,1 — 1,2 — 1,3 — 1,4 — 1,5 — 1,6 — 1,7 — 1,8 — 1,9 — μ



…ure, à la rupture, des longerons en bois.
PLANCHE
N° 22
Abaque N° 2 : Détermination du longeron optimum
γ
1000 ρ
400
0,1 360
340
0,2 320
300
0,3 280
260
0,4 240
220
0,5 200
180
0,6 160
140
0,7 120
100
0,8 80
60
0,9 40
20
0
η
γ
Φ
δ
0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 Δ
0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 β

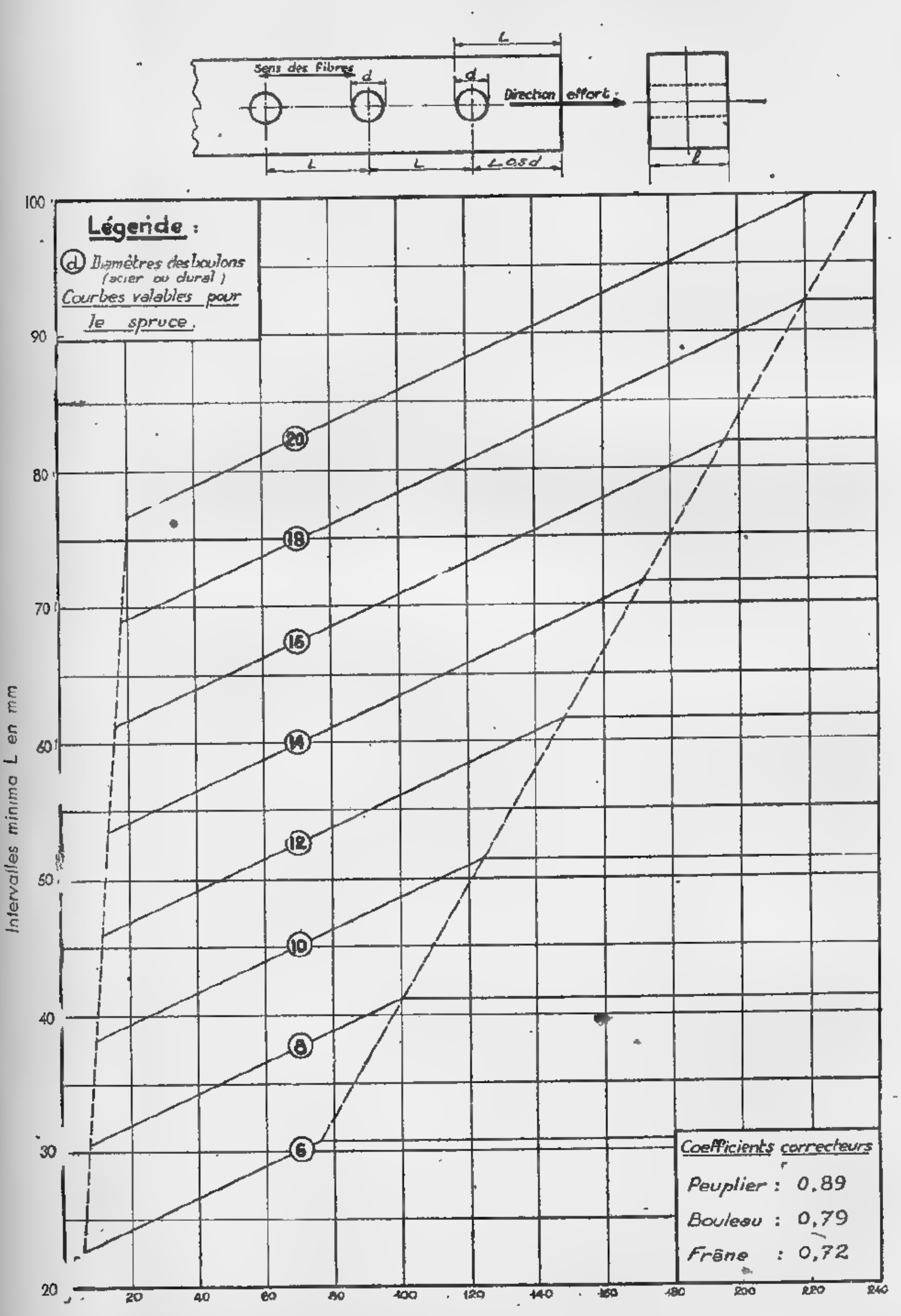
RÉSISTANCE AU MATAGE DES BOULONS DANS LE BOIS





Abaque N° 3 :

INTERVALLES LONGITUDINAUX MINIMA ADMISSIBLES ENTRE LES BOULONS DE FIXATION DES FERRURES SUR DES PIÈCES EN BOIS.



CHAP. XIV	Abaque de calcul des ressorts à boudin en fil rond.	PLANCHE
§ 3.23		N° 24

Conditions d'établissement de l'abaque

Fatigue max de torsion : t = 60 kg/mm²

Module d'élasticité transversal : G = 8000 kg/mm²

Formules correspondantes :

$$P = 11{,}781 \frac{d^3}{R}$$

$$f = 0{,}09425 \frac{R^2}{d}$$

EFFORTS MAXIMA P en kg.

RAYONS MOYENS R en mm.

— Légende —

Diamètres d du fil (en mm) : droites inclinées portant des repères encerclés.

Flèches max par spire f (en mm) : autres droites inclinées.

CHAP. XV § 4.22	**Abaque de combinaison des contraintes normales et tangentielles.**	PLANCHE N° **25**

CONTRAINTES NORMALES n (traction, compression, flexion) en kg/mm²

150 145 140 135 130 125 120 115 110 105 100 95 90 85 80 75 70 65 60 55 50 45 40 35 30 25 20 15 10 5

(10) (20) (30) (40) (50) (60) (70) (80) (90) (100) (110) (120) (130) (140) (150) (160) (170)

0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50

CONTRAINTES TANGENTIELLES t (cisaillement, torsion) en kg/mm²

Flambage local des cornières à ailes égales

$$\beta = \frac{A}{a}$$

— Mode d'emploi —

Aligner les points représentant les valeurs de β et de n_{ca} du cas considéré.

a) Si la droite d'alignement ne recoupe pas la courbe n_{ca} à droite du point n_{ca} considéré, lire n_{co} (échelle de droite) sur le prolongement de cette droite. (Exemple : Au4G, $\beta = 10$, $n_{ca} = 40$, $n_{co} = 27.7$.)

b) Si la droite d'alignement recoupe la courbe n_{ca} à droite du point n_{ca} considéré, lire n_{co} sur la tangente à la courbe n_{ca} issue de β. (Exemple : Au4G, $\beta = 20$, $n_{ca} = 40$, $n_{co} = 10$.)

Courbe n_{ca} (Contraintes admissibles en compression pure en kg/mm²)

— Remarques —

1) Si une aile est maintenue rigidement prendre : $\beta = 0{,}77 \frac{A}{a}$

2) Pour un métal quelconque de module d'élasticité E' prendre une valeur fictive β' sur l'échelle des β Au4G

$$\beta' = \beta \sqrt{\frac{7000}{E'}}$$

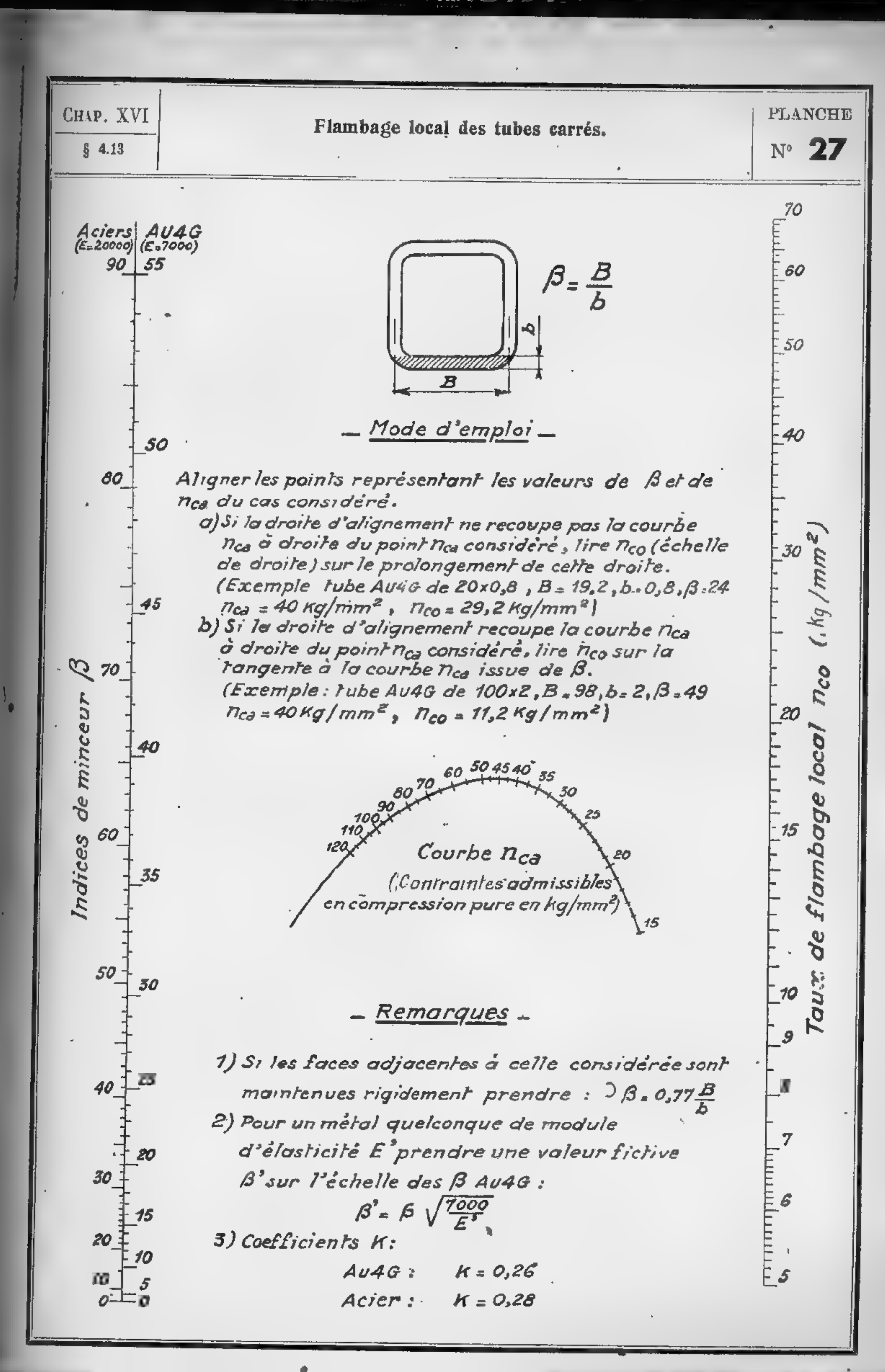
3) Cœfficients K :

Au4G : K = 1,75

Acier : K = 1,875

Indices de minceur β — Aciers (E=20000) — Au4G (E=7000)

Taux de flambage local n_{co} (kg/mm²)

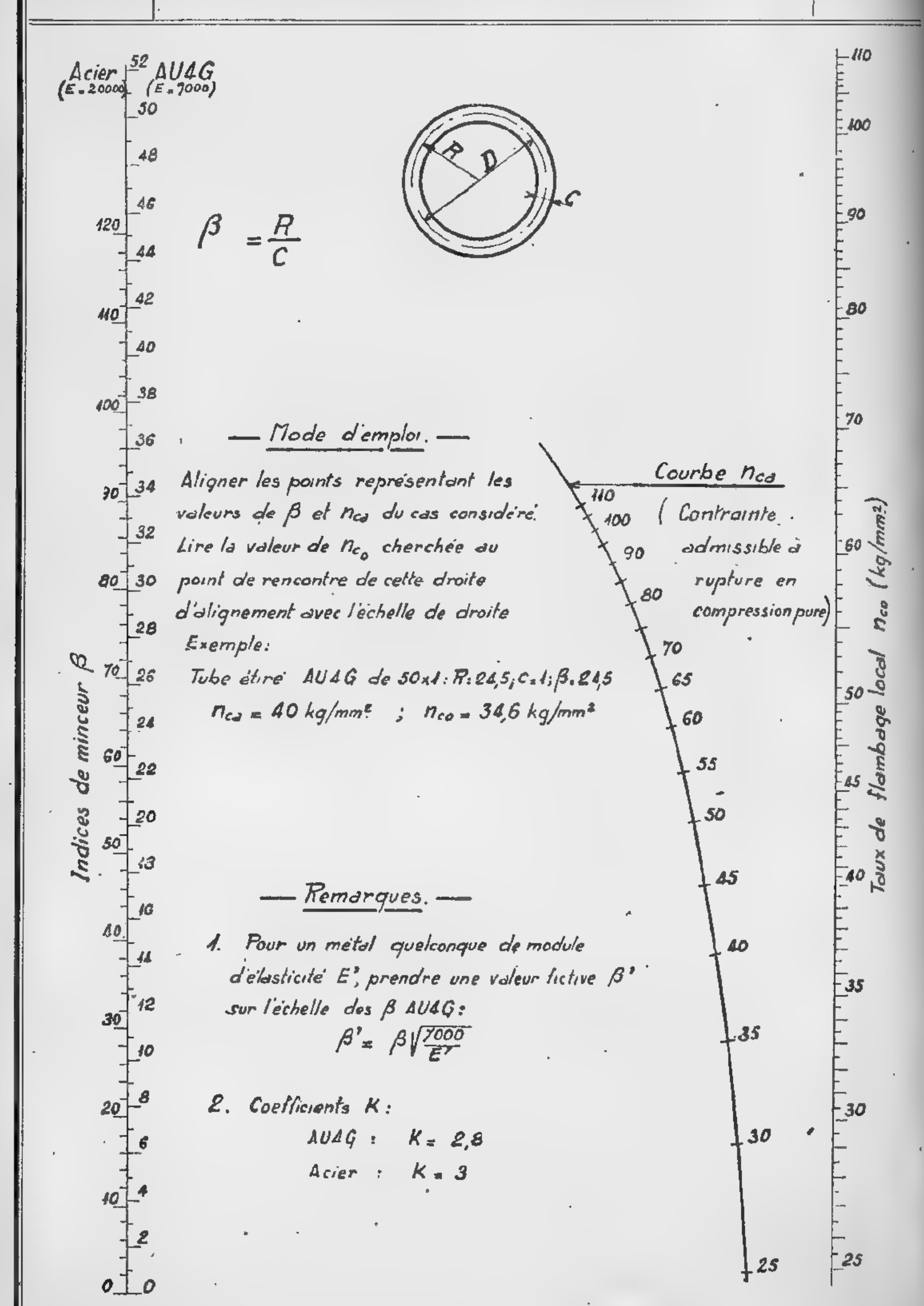

CHAP. XVI
§ 4.13
Flambage local des tubes carrés.
PLANCHE
N° 27
Aciers (E=20000)
AU4G (E=7000)
Indices de minceur β
Taux de flambage local nco (kg/mm²)
β = B/b
B
b
— Mode d'emploi —
Aligner les points représentant les valeurs de β et de nca du cas considéré.
a) Si la droite d'alignement ne recoupe pas la courbe nca à droite du point nca considéré, lire nco (échelle de droite) sur le prolongement de cette droite.
(Exemple tube AU4G de 20×0,8, B = 19,2, b = 0,8, β = 24
nca = 40 kg/mm², nco = 29,2 kg/mm²)
b) Si la droite d'alignement recoupe la courbe nca à droite du point nca considéré, lire nco sur la tangente à la courbe nca issue de β.
(Exemple : tube AU4G de 100×2, B = 98, b = 2, β = 49
nca = 40 kg/mm², nco = 11,2 kg/mm²)
Courbe nca
(Contraintes admissibles en compression pure en kg/mm²)
— Remarques —
1) Si les faces adjacentes à celle considérée sont maintenues rigidement prendre : β = 0,77 B/b
2) Pour un métal quelconque de module d'élasticité E' prendre une valeur fictive β' sur l'échelle des β AU4G :
β' = β √(7000/E')
3) Coefficients K :
AU4G : K = 0,26
Acier : K = 0,28

CHAP. XVI

§ 4.13

Flambage local des tubes ronds.

PLANCHE N° **28**



Flambage général des poutres rectilignes de sections constantes (STRAND-EULER)

— Légende —

λ = élancement équivalent de la poutre = $\alpha \frac{L'}{\rho}$

L' = longueur réelle de la poutre

ρ = rayon de giration minimum de la section droite

$\rho = \sqrt{\frac{I^{mm}}{S}}$

α = coefficient d'encastrement (ch. XVI § 2.4)

n_{co} = Taux de flambage local (ch. XVI § 4.1)

$n_{c\lambda}$ = Contrainte critique de flambage général (valeur cherchée)

— Mode d'emploi —

Voir abaques planches 26 et 27.
et chapitre XVI parag. 4.232

— Remarques —

1. Pour un matériau quelconque de module d'élasticité E', prendre une valeur fictive λ' sur l'échelle des λ AU4G:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{7000}{E'}}$$

2. Si les sections ne sont pas sujettes au flambage local (sections massives) prendre $n_{co} = n_{ca}$

3. Dans le cas des profilés ouverts, vérifier en supplément leur tenue au flambage de torsion (chap. XVI § 7)



POUTRES EN ACIER

(E = 20.000 kg/mm²)

Légende

(Commune aux deux abaques)

n_{co} = Contrainte critique de flambage local (1) (ch. XVI. § 4.1).
$n_{c\lambda}$ = Contrainte critique de flambage général (valeur cherchée).

λ = Elancement équivalent de la poutre.

$$\lambda^2 = \frac{\alpha^2 L^2 S}{I}$$

L = Longueur réelle de la poutre.
α = Coefficient d'encastrement (chap. XVI, § 2.4).
S = Section droite de la poutre.
I = Moment d'inertie minimum de la section droite.

(1) *Nota :* pour les sections massives (non sujettes au flambage local) remplacer n_{co} par n_{ca}=contrainte admissible à rupture en compression simple.

Contraintes critiques n_{co} et $n_{c\lambda}$ (kg/mm²)

$\lambda^2 . 10^{-4} = \frac{\alpha^2 L^2 S}{I} . 10^{-4}$

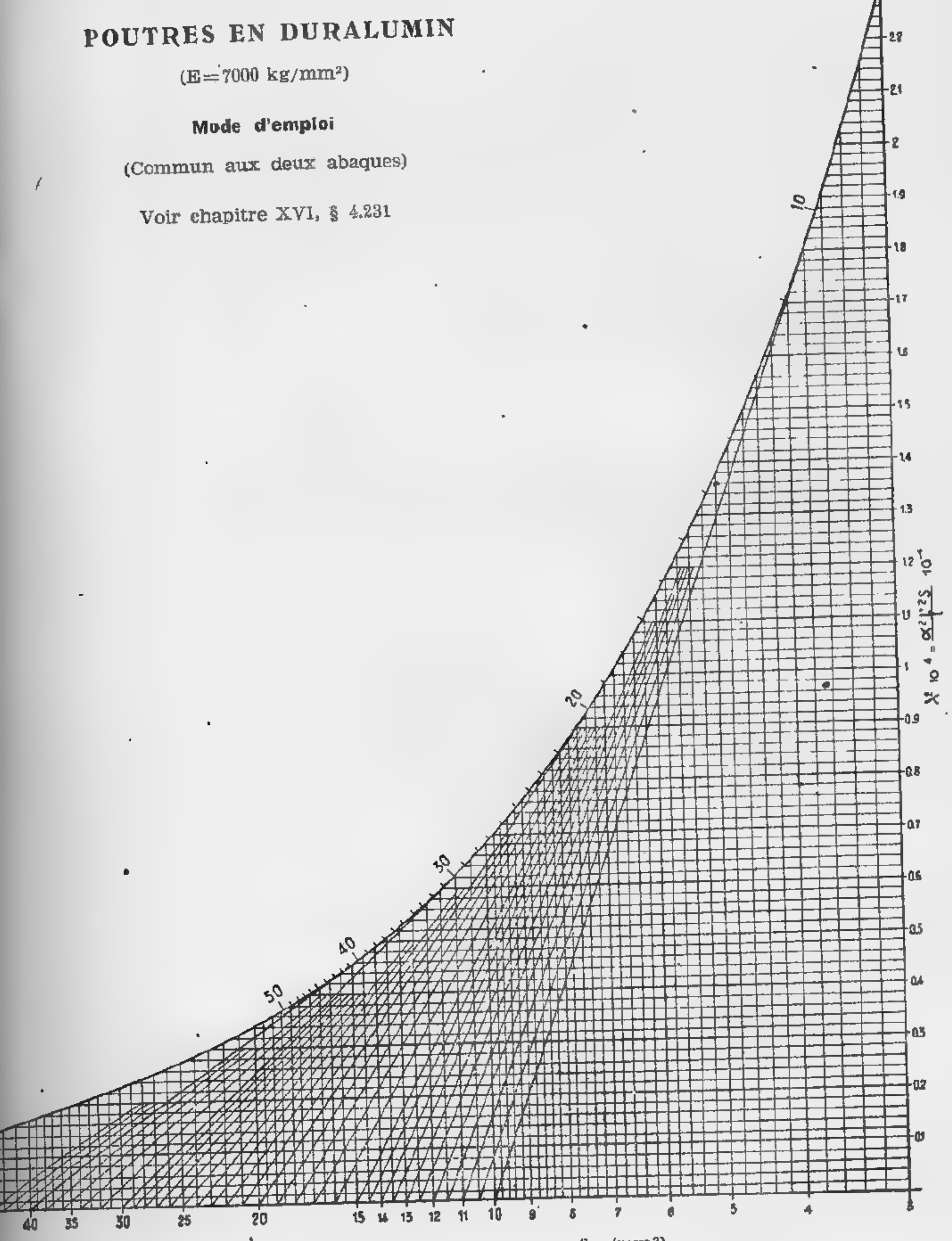
POUTRES EN DURALUMIN

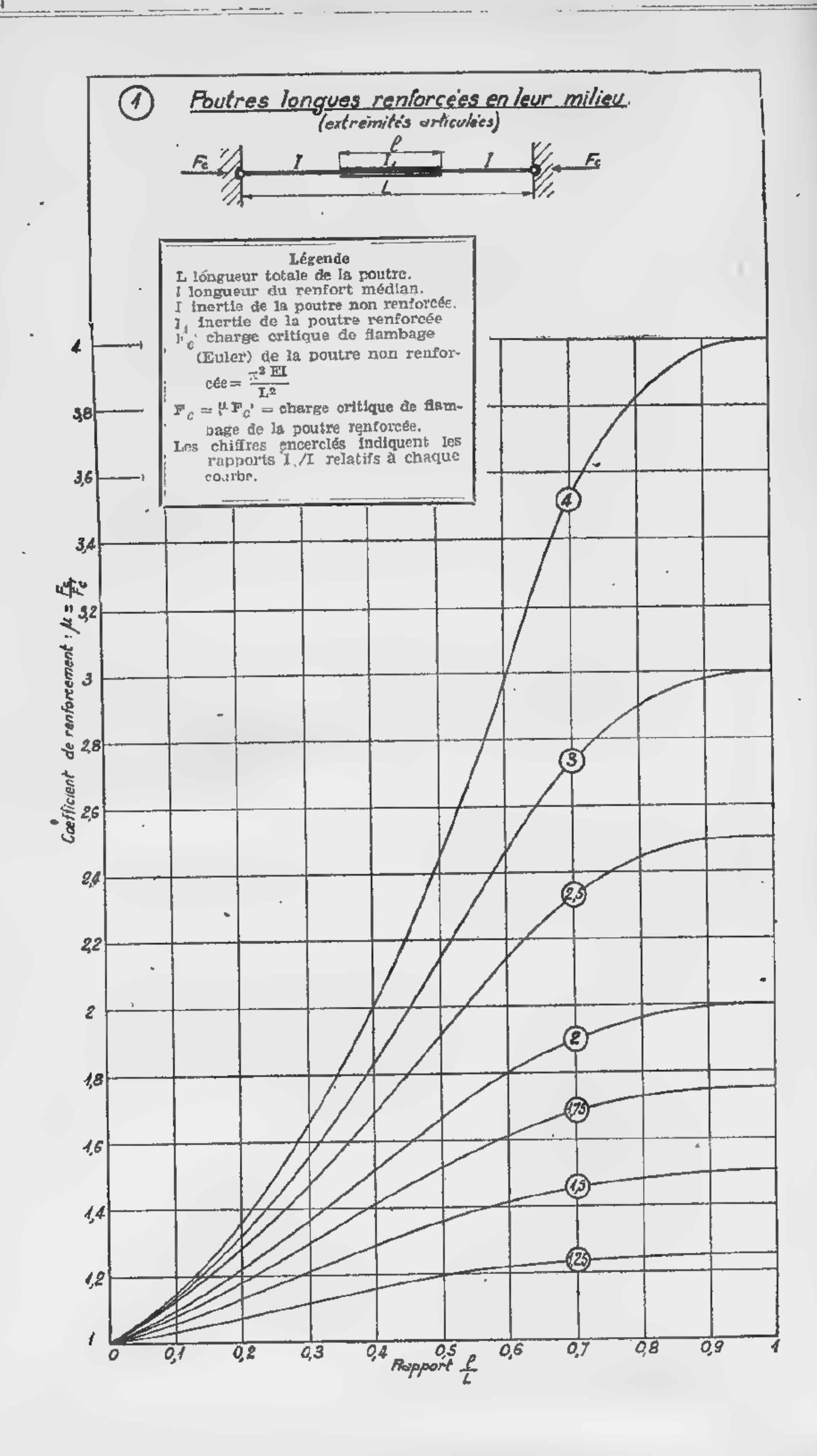
(E = 7000 kg/mm²)

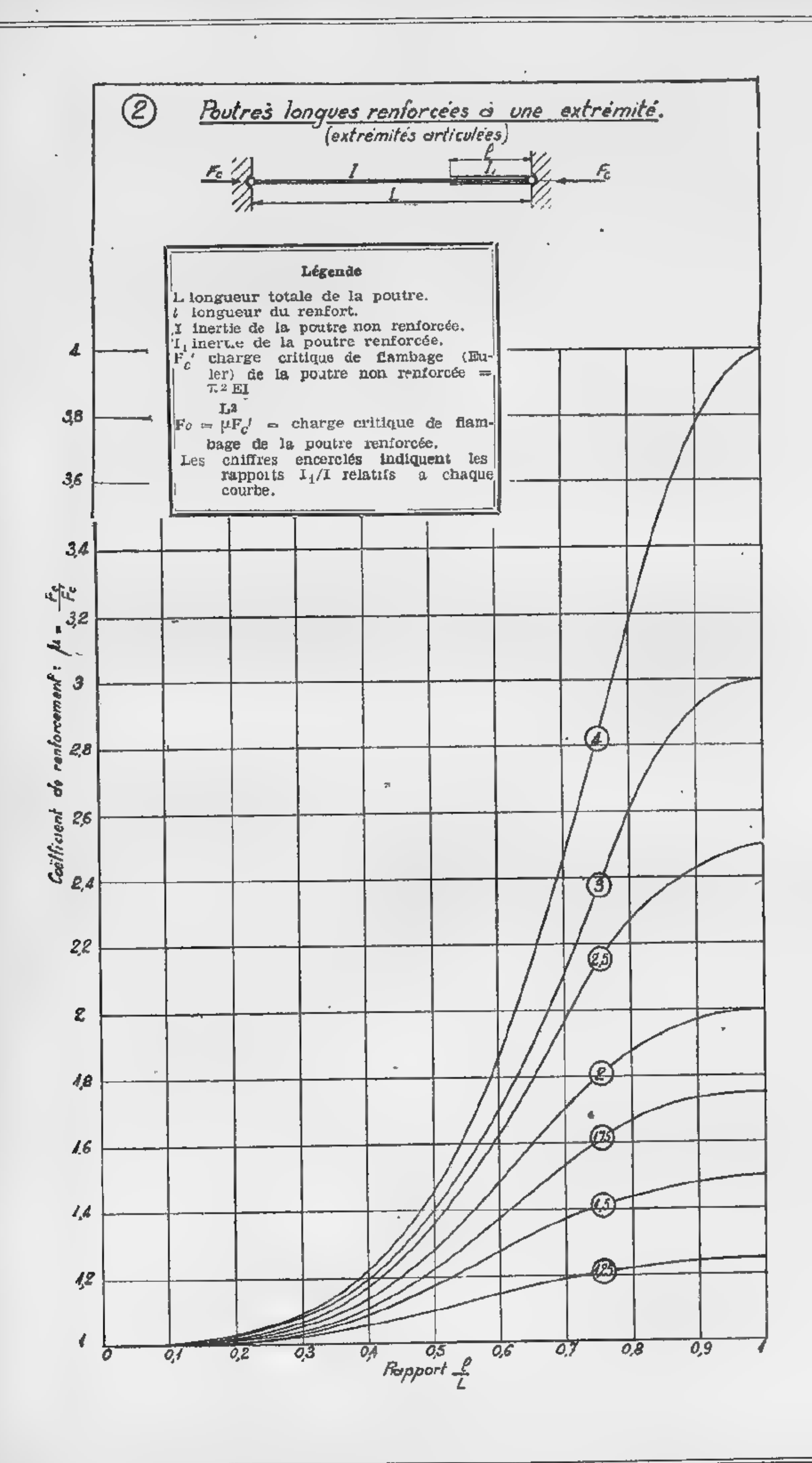
Mode d'emploi

(Commun aux deux abaques)

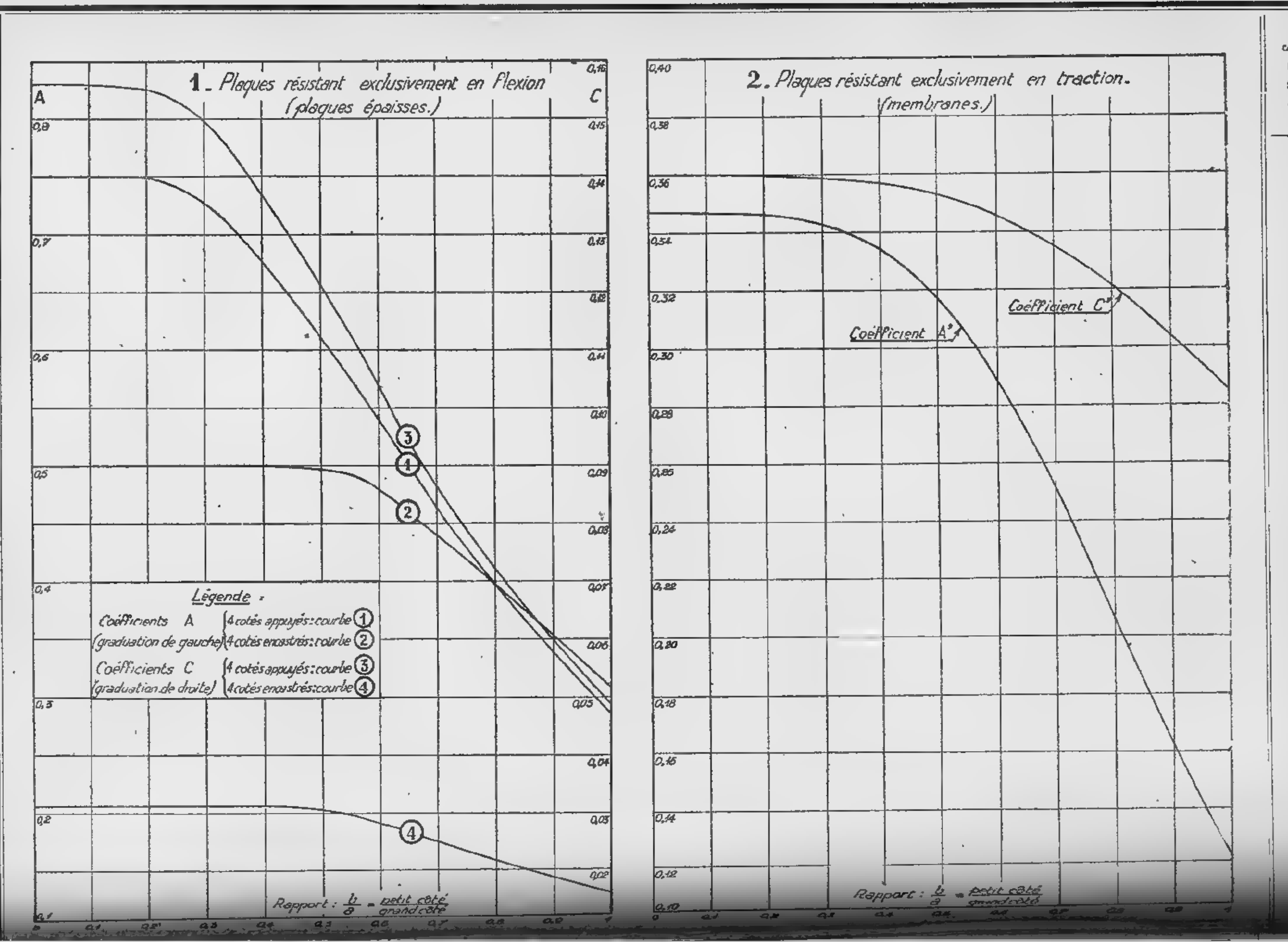
Voir chapitre XVI, § 4.231




1
Poutres longues renforcées en leur milieu.
(extrémités articulées)
F_c
I
l
I_1
I
F_c
L
Légende
L longueur totale de la poutre.
l longueur du renfort médian.
I inertie de la poutre non renforcée.
I_1 inertie de la poutre renforcée
F_c' charge critique de flambage (Euler) de la poutre non renforcée $= \frac{\pi^2 EI}{L^2}$
$F_c = \mu F_c'$ = charge critique de flambage de la poutre renforcée.
Les chiffres encerclés indiquent les rapports I_1/I relatifs à chaque courbe.
Cœfficient de renforcement : $\mu = \frac{F_c}{F_c'}$
4
3,8
3,6
3,4
3,2
3
2,8
2,6
2,4
2,2
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
Rapport $\frac{l}{L}$
4
3
2,5
2
1,75
1,5
1,25



② Poutres longues renforcées à une extrémité.
(extrémités articulées)
Fc
I
l
I1
L
Fc
Légende
L longueur totale de la poutre.
l longueur du renfort.
I inertie de la poutre non renforcée.
I1 inertie de la poutre renforcée.
Fc' charge critique de flambage (Euler) de la poutre non renforcée = π² EI / L²
Fc = μFc' = charge critique de flambage de la poutre renforcée.
Les chiffres encerclés indiquent les rapports I1/I relatifs à chaque courbe.
Coefficient de renforcement : μ = Fc/Fc'
Rapport l/L
4
3
2,5
2
1,75
1,5
1,25


1. Plaques résistant exclusivement en flexion
(plaques épaisses.)
A
C
Légende :
Coefficients A (graduation de gauche) 4 côtés appuyés : courbe 1
4 côtés encastrés : courbe 2
Coefficients C (graduation de droite) 4 côtés appuyés : courbe 3
4 côtés encastrés : courbe 4
Rapport : $\frac{b}{a}$ = $\frac{\text{petit côté}}{\text{grand côté}}$
2. Plaques résistant exclusivement en traction.
(membranes.)
Coefficient C'
Coefficient A'
Rapport : $\frac{b}{a}$ = $\frac{\text{petit côté}}{\text{grand côté}}$

lanes

…ectangulaires chargées transversalement.

PLANCHE N° 32

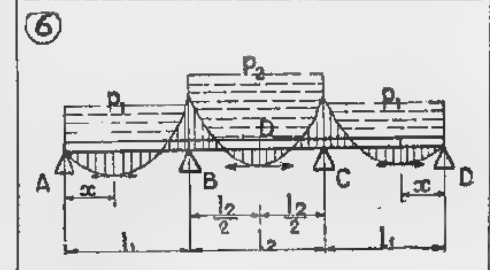
3 - Plaques de grand allongement résistant simultanément en flexion et en traction.

Paramètres μ ou μ'

Paramètres α et 100φ ou β et 1000φ

β

α

Cas de charge	Réactions	Moments fléchissants
(1)	$R_A = -\frac{1}{l_1}(Pb + M_B)$ $R_B = -\frac{Pa}{l_1} + M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ $R_C = -\frac{M_B}{l_2}$	$M_B = -\frac{Pa}{(l_1+l_2)\,2l_1}(l_1^2 - a^2)$ $M_D = -R_A a$
(2)	$R_A = \frac{1}{l_1}(P_1 b_1 + M_B)$ $R_B = -\frac{P_1 a_1}{l_1} - \frac{P_2 b_2}{l_2} + M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ $R_C = -\frac{1}{l_2}(P_2 a_2 + M_B)$	$M_D = -R_A a_1$ $M_B = \frac{\frac{P_1 a_1}{l_1}(l_1^2 - a_1^2) + \frac{P_2 b_2}{l_2}(l_2^2 - b_2^2)}{2(l_1 + l_2)}$ $M_E = -R_B b_2$
(3)	$R_A = -\frac{p_1 l_1}{2} - \frac{M_B}{l_1}$ $R_B = -\frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_2 l_2}{2} + M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ $R_C = -\frac{p_2 l_2}{2} - \frac{M_B}{l_2}$	$M_B = -\frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{8(l_1 + l_2)}$
(4) a, b, c = ordonnées p en A, B et C	$R_A = -\frac{M_B}{l_1} - \frac{l_1[l_1(2a+c) + 3al_2]}{6(l_1+l_2)}$ $R_B = M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right)$ $-\frac{1}{6}[l_1(a+2c) + l_2(2a+c)]$ $R_C = -\frac{M_B}{l_2} - \frac{l_2[l_2(a+2c) + 3cl_1]}{6(l_1+l_2)}$	$M_B = -\frac{l_1^3(7a+8b) + l_2^3(7c+8b)}{120(l_1+l_2)}$
(5)	$R_A = \frac{1}{l_1}(\mu - M_B)$ $R_B = M_B\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) - \frac{\mu}{l_1}$ $R_C = -\frac{M_B}{l_2}$	$M_B = -\mu\frac{l_1^2 - 3a^2}{l_1(l_1+l_2)}$ $M_D = \frac{a}{l_1}(M_B - \mu)$ $M'_D = M_D + \mu$
(6) 	$R_A = R_D = \frac{p_1 l_1}{2} - \frac{M_B}{l_1}$ $R_B = R_C = -\frac{p_1 l_1}{2} - \frac{p_2 l_2}{2} + \frac{M_B}{l_1}$	$M_B - M_C = -\frac{p_1 l_1^3 + p_2 l_2^3}{4(2l_1 + 3l_2)}$ $M_D = M_B + \frac{p_2 l_2^2}{8}$ M max travées AB et CD $-\frac{R_A^2}{2p_1} = \frac{R_D^2}{2p_1}$ à l'abscisse $x = \frac{l_1}{2} + \frac{M_B}{p_1 l_1}$

CONVENTIONS GENERALES : Sens de cheminement → ; forces et réactions positives ↓

exion des poutres droites hyperstatiques.

PLANCHE N° 33

Cas de charge	Réactions	Moments fléchissants
(7) P, C, A, B, a, b, l	$R_A = -\frac{Pb^2}{2l^3}(3l-b)$ $R_B = -\frac{Pa}{2l^3}(3l^2-a^2)$	$M_A = 0$ $M_B = -\frac{Pab}{2l}\left(1+\frac{a}{l}\right)$ $M_C = \frac{Pab^2}{2l^3}(3l-b)$
(8) p, A, B, x, l	$R_A = -\frac{3}{8}pl$ $R_B = -\frac{8}{5}pl$	$M_B = -\frac{pl^2}{8}$ $M_{max} = \frac{l}{2p}R_A^2$ à l'abscisse $x = \frac{3}{8}l$
(9) a et b = ordonnées de p en A et B, $K = \frac{b-a}{l}$; p, a, b, A, B, x, l	$R = -\frac{1}{40}(11a+4b)$ $R_B = -\frac{1}{40}(9a+16b)$	$M_B = -\frac{l^2}{120}(70+8b)$ $M_{max} = \left(\frac{a+Kx}{3}\right)\frac{x^2}{2} - R_A x$ avec $x = \frac{-a+\sqrt{a^2-2KR_A}}{K}$
(10) P, C, A, B, a, b, l	$R_A = -\frac{Pb^2}{l^3}(2a+l)$ $R_B = -\frac{Pa^2}{l^3}(2b+l)$	$M_A = -\frac{Pba^2}{l^2}$ $M_B = -\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_C = \frac{Pab}{l}\left(1-\frac{2a^2}{l^2}\right)$
(11) p, C, A, B, $\frac{l}{2}$, l	$R'_A = R_B = \frac{Pl}{2}$ Flèche en C : $y_C = \frac{pl^4}{384\,EI}$	$M_A = M_B = -\frac{pl^2}{12}$ $M_C = -\frac{M_A}{2} = \frac{pl^2}{24}$
(12) a et b = ordonnées de p en A et B, $K = \frac{b-a}{l}$; p, a, b, A, B, x, l	$R_A = -\frac{l}{20}(7a+3b)$ $R_B = -\frac{l}{20}(7b+3a)$	$M_A = -\frac{l^2}{60}(3a+2b)$ $M_B = -\frac{l^2}{60}(2a+3b)$ $M_{max} = \left(a+\frac{Kx}{3}\right)\frac{x^2}{2} - R_A x + M_A$ pour $x = \frac{-a+\sqrt{a^2-2KR_A}}{K}$

Moments fléchissants positifs : sens des aiguilles d'une montre.

DONNÉES

Longeron de gouvernail de direction étudié *planche* 7, avec une articulation supplémentaire D (non bloquée longitudinalement).

Charges appliquées : voir planche 7. — *Variation de* I (moment d'inertie de flexion) : voir diagramme 2 ci-contre et Ch. XVIII, § 4.6.

Matière : Duralumin AU4G ; $E=7000$ kg/mm².

Efforts dans le système rendu isostatique (poutre sur deux appuis A et B) : efforts tranchants t moment fléchissants m déterminés d'après planche 7 : voir diagramme 1 ci-contre.

PARAMÈTRES DE L'INCONNUE

Inconnue X : réaction de l'appui D, dirigée arbitrairement de haut en bas (sens positif des charges appliquées).

« Effort tranchant » dû à $X=1$: travée AD : $\alpha' = -\frac{0,8}{1,8} = -0,444$;

travée DB : $\alpha' = \frac{1}{1,8} = 0,556$ (tabl. col. 1).

« Moment » α dû à $X=1$: voir tableau (colonne 6) et diagramme 1.

INTÉGRATIONS UTILES AUX CALCULS

(Ch. XVIII, § 4,226) — Limites utiles : de A à B (sections a à h)

Méthode 1 : Tracé et planimétrage des courbes : Voir tableau colonnes 8 et 9 et diagramme (2) avec résultats.

Méthode 2 : Somme de produits partiels par intervalles Δx (valeurs moyennes)
Voir colonnes 11 et 12 du tableau.

Nous retiendrons les résultats de la méthode 1, plus précise.

CALCUL DE X

CAS I : *Appuis indénivelables.*

$$X_1 = -\frac{\sum \frac{m\alpha}{I}\Delta x}{\sum \frac{\alpha^2}{I}\Delta x} = -\frac{324200}{561} = -578 \text{ kg}$$

CAS II : *Appuis dénivelables* (selon figure 3).

Dénivellation relative appui D :

$$y = 24 - \frac{60 \cdot 0,8}{1,8} = -2,66 \text{ mm}$$

$$X_2 = \frac{Ey - \sum \frac{m\alpha}{I}\Delta x}{\sum \frac{\alpha^2}{I}\Delta x} = \frac{-2.66 \cdot 7000 - 324250}{561} = -611 \text{ kg}$$

CALCUL DES EFFORTS RÉELS

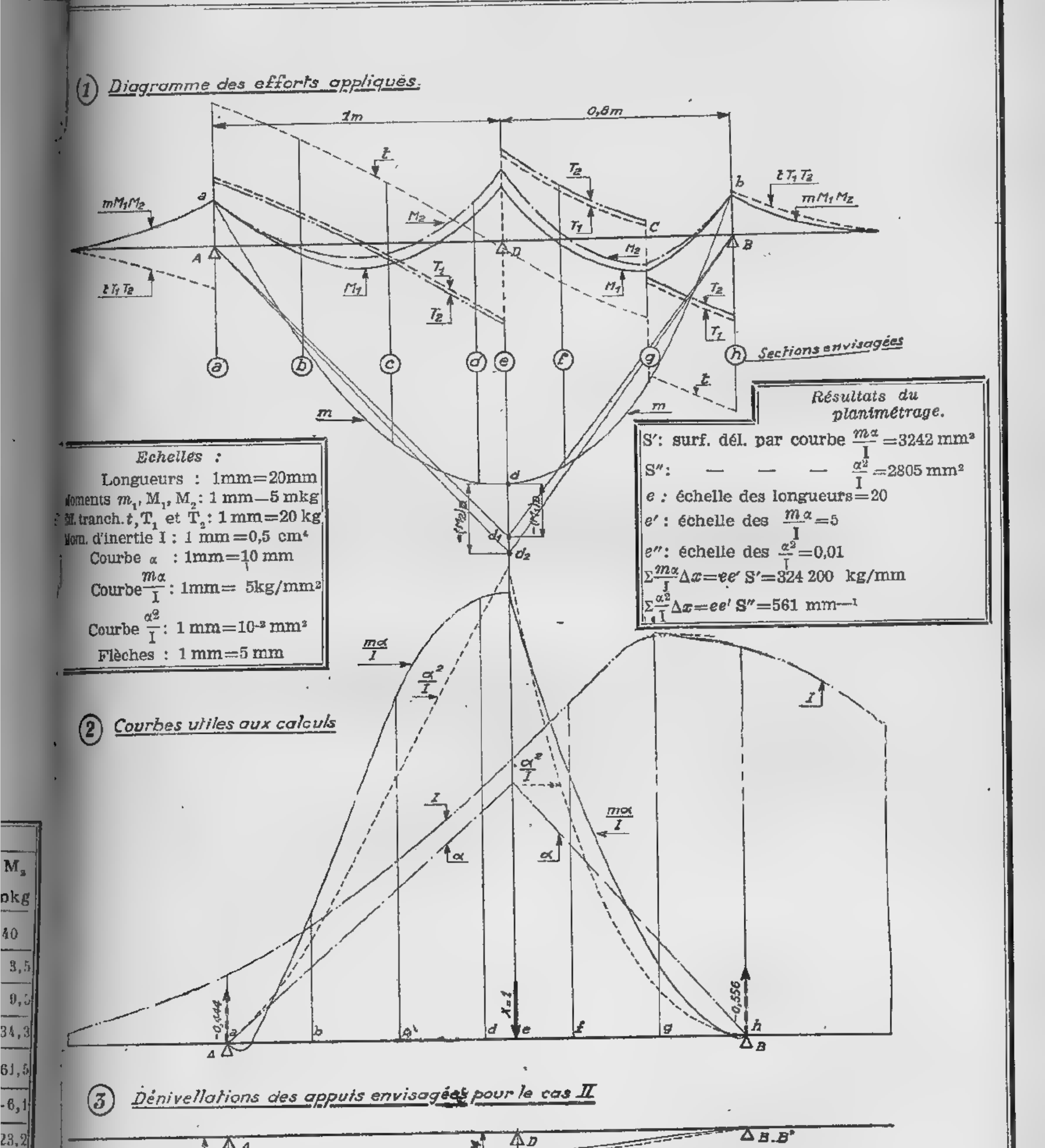
Voir tableau (colonnes 13 à 20) et diagramme (1) (redressements courbe m par rapport à Ad_1 Bd_1 et Ad_2 Bd_2 ; décalages $\alpha' X_1$ et $\alpha' X_2$ de t).

TABLEAU DE CALCULS

Sections			Efforts		Paramèt.		Courbes		Produits partiels			Efforts cas I				Efforts cas II			
Rep.	m x	I cm⁴	t kg	m mkg	α mm	α'	$\frac{m\alpha}{I}$ kg/mm²	$\frac{\alpha^2}{I}$ mm²	Δx mm	$\frac{m\alpha}{I}\Delta x$ kg/mm	$\frac{\alpha^2}{I}\Delta x$ mm⁻¹	αX_1 mkg	$\alpha' X_1$ kg	T_1 kg	M_1 mkg	αX_2 mkg	$\alpha' X_2$ kg	T_2 kg	M_2 mkg
a	0	5,77	494	-40	0	0,444	0	0	300	16950	26,55	0	257	-237	-40	0	271,3	-222,7	-40
b	0,3	10,02	-366	85	133,3	»	113,0	0,177	300	61560	95,40	-77	»	-109	8	-81,5	»	-94,7	3,5
c	0,6	15,47	-213	172,5	266,6	»	297,4	0,459	300	101610	177,45	154,1	»	44	18,4	-163	»	58,3	0,5
d	0,9	22,10	-39	210	399,9	»	380,0	0,724	100	38275	77	-231,1	»	217	-21,1	-244,3	»	232,3	-34,3
e	1,0	24,21	21	210	444,4	0,444 / 0,556	385,5	0,816	200	61470	120,3	-256,9	-257 / -321	278 / -300	-46,9	-271,5	-271,3 / -339,7	292,3 / 318,7	-61,5
f	1,2	28,72	147	197,5	333,3	»	229,2	0,387	300	43320	69,9	-192,6	»	-174	4,9	-203,6	»	-192,7	-6,1
g	1,5	34,92	280 / 480	125	166,6	»	59,6	0,079	300	8945	11,85	-96,3	»	-41 / 159	28,7	-101,8	»	59,7 / 140,3	23,2
h	1,8	33,63	615	-34	0	0,556	0	0				0	-321	294	-34	0	-339,7	275,3	-34
									Σ=	332130	578,45								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

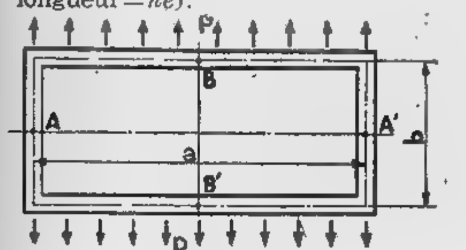
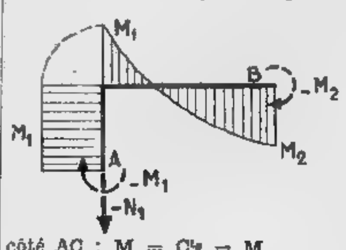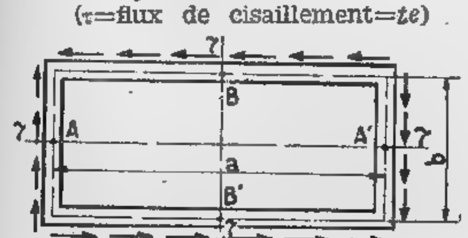
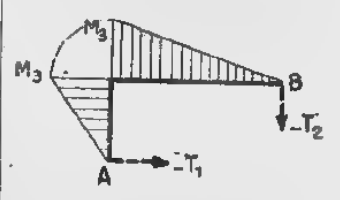
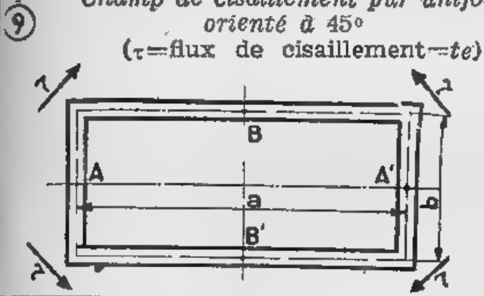
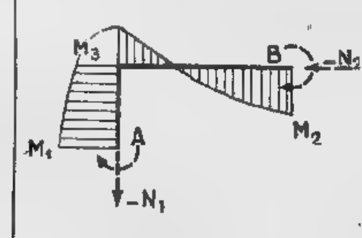
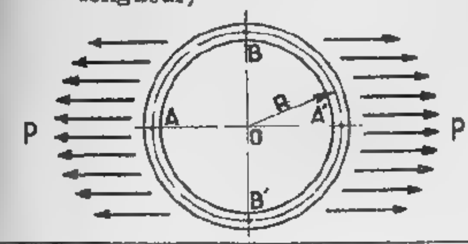
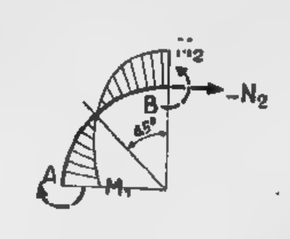
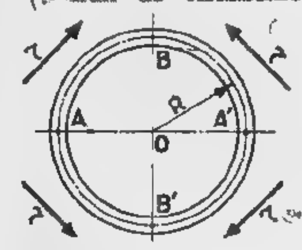
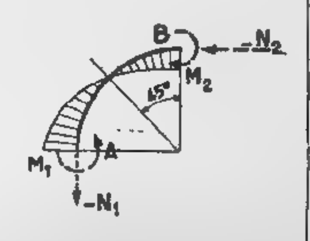
sur tro|appuis par la méthode du potentiel interne.

PLANCHE N° **34**



Cas de charge	Réactions	Moments fléchissants
(1) a, b, P, I_0, C, E, D, I_1, $K=\frac{I_1}{I_0}$, h, A, X, R_A, B, R_B, l	$R_A = -P\frac{b}{l}$ $R_B = -P\frac{a}{l}$ $X = \frac{3}{2}P\frac{ab}{h(2Kh+3l)}$	$M_C = M_D = -Xh$ $= -\frac{3}{2}P\frac{ab}{2Kh+3l}$ $M_E = Xh + P\frac{ab}{l}$
(2) a, b, P, I_0, C, E, D, I_1, $K=\frac{I_1}{I_0}$, h, Y, X, Z, A, R_A, B, R_B, l	$R_A = -P\frac{b}{l}\left[1+\frac{a(l-2a)}{l(l+6Kh)}\right]$ $R_B = -P\frac{a}{l}\left[1-\frac{b(l-2a)}{l(l+6Kh)}\right]$ $X = \frac{3P}{2}\frac{ab}{h(Kh+2l)}$ $Y = -M_A$; $Z = -M_B$	$M_A = Pba\left[\frac{1}{2l+Kh} - \frac{1-2a}{l(l+6Kh)}\right]$ $M_B = \frac{Pba}{2l+Kh}$ $M_C = M_A - Xh$ $M_D = +\frac{Pab}{2(Kh+2l)}$ $M_E = M_C - R_A a$
(3) $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$, I_0, C, E, D, $K=\frac{I_1}{I_0}$, A, X, R_A, B, R_B, l	$R_A = R_B = -\frac{pl}{2}$ $X = \frac{pl^3}{4h(2Kh+3l)}$	$M_C = M_D = -Xh$ $M_E = -Xh + \frac{pl^2}{8}$
(4) $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$, p, I_0, C, E, D, I_1, $K=\frac{I_1}{I_0}$, h, Y, X, Z, A, R_A, B, R_B, l	$R_A = R_B = -\frac{pl}{2}$ $X = \frac{pl^3}{4h(Kh+2l)}$ $Y = Z = -M_A$	$M_A = M_B = \frac{pl^3}{12(Kh+2l)}$ $M_C = M_D = \frac{pl^3}{6(Kh+2l)}$ $M_E = \frac{pl^3(3Kh+2l)}{24(Kh+2l)}$
(5) P, I = const^{te}, S, C, R_A, R_B, θ, R, X, A, D, B	$R_A = R_B = -\frac{P}{2}$ $X = \frac{P}{\pi} = 0{,}3183\,P$	$M = PR\left[\frac{1-\cos\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{\pi}\right]$ de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et symétrique $M_C = 0{,}182\,PR$
(6) P, I = const^{te}, S, C, R_B, R_A, θ, R, X, A, Y, B	$R_A = R_B = -\frac{P}{2}$ $X = P\frac{4-\pi}{\pi^2-8} = 0{,}4591\,P$ $Y = -M_A = -M_B$	$M = PR\left[\frac{1-\cos\theta}{2} - 0{,}4591\sin\theta\right]$ de $\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et symétrique $M_C = 0{,}0409\,PR$ $M_A = M_B =$ $= \frac{PR}{2}\,\frac{4+2\pi-\pi^2}{\pi^2-8} = 0{,}1106\,PR$

Encadrements d'ouvertures dans les parois minces

Gas de charge	Equilibre d'un quart de cadre ou d'anneau	Efforts de liaison
(7) *Champ de traction* (ou compression) uniforme (p=charge par unité de longueur=ne). 	Système bi-symétrique  côté AC : $M = C^{te} = M_1$ côté CB : variation parabolique de M	en A et A' $\begin{cases} T_1 = 0 \\ N_1 = \frac{pa}{2} \\ M_1 = \frac{pa^3}{12(a+b)} \end{cases}$ en B et B' $\begin{cases} T_2 = 0 \\ N_2 = 0 \\ M_2 = M_1 - \frac{pa^2}{8} \end{cases}$
(8) *Champ de cisaillement pur uniforme parallèle aux côtés.* (τ=flux de cisaillement=te) 	Système bi-antisymétrique  Variations linéaires de M.	en A et A' $\begin{cases} T_1 = \pm \frac{\tau a}{2} \\ N_1 = 0 \; ; \; M_1 = 0 \end{cases}$ en B et B' $\begin{cases} T_2 = \pm \frac{\tau b}{2} \\ N_2 = 0 \; ; \; M_2 = 0 \end{cases}$ $M_3 = \frac{\tau ab}{4}$
(9) *Champ de cisaillement pur uniforme orienté à 45°* (τ=flux de cisaillement=te) 	Système bi-symétrique 	en A et A' $\begin{cases} T_1 = 0 \\ N_1 = -\frac{\tau}{2} \\ M_1 = M_3 + \frac{\tau b^2}{8} \end{cases}$ en B et B' $\begin{cases} T_2 = 0 \\ N_2 = \frac{\tau b}{2} \\ M_2 = M_3 - \frac{\tau a^2}{8} \end{cases}$ $M_3 = \frac{\tau}{12} \frac{a^3 - b^3}{a+b}$
(10) *Champ de traction ou compression uniforme* (p=ne=charge par unité de longueur) 	Système bi-symétrique 	en A et A $\begin{cases} T_1 = 0 \\ N_1 = 0 \\ M_1 = -\frac{pR^2}{4} \end{cases}$ en B et B' $\begin{cases} T_2 = 0 \\ N_2 = -pR \\ M_2 = -M_1 = \frac{pR^2}{4} \end{cases}$
(11) *Champ de cisaillement pur uniforme* (τ=flux de cisaillement=te) 	Système bi-symétrique 	en A et A' $\begin{cases} T_1 = 0 \\ N_1 = -\tau R \\ M_1 = \frac{\tau R^2}{2} \end{cases}$ en B et B' $\begin{cases} T_2 = 0 \\ N_2 = -N_1 = \tau R \\ M_2 = M_1 = \frac{\tau R^2}{2} \end{cases}$

Référence : Précis d'aérotechnique (Rc 5) par M. Robin.
Ces formules sont établies dans le cas d'encadrements de section constante (EI=constante) et supposent ces encadrements infiniment rigides vis-à-vis des parois.

Calcul d'un encadrement d'ouverture circulaire dans une paroi soumis à

NOTATIONS

τ : flux de cisaillement appliqué à la paroi ($\tau = te$ = constante)

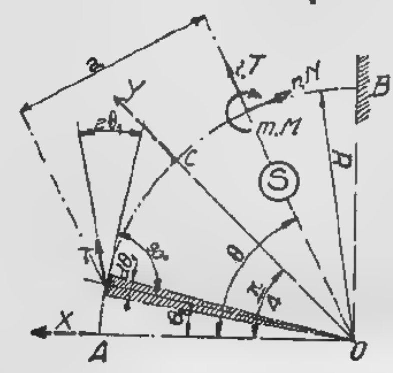
R : Rayon du cadre compté sur l'axe neutre.

E'S : constante de rigidité en flexion du cadre (EI = constante).

E'S : constante de rigidité axiale des diagonales (E'S = const.).

$K = \dfrac{EI}{R^2 E'S}$: rapport de rigidités.

θ, θ_1 : variables (angles à partir de OA).



MÉTHODE DE RÉSOLUTION

Calculs sur 1/4 de système AB (bi-antisymétrie des charges)
Coupures en A (cadre) et C (diagonale)
Inconnues hyperstatiques :

X = effort tranchant en A
Y = effort axial dans diagonale (+ en traction)

Résolution par méthode du potentiel interne : $\dfrac{\partial U}{\partial X} = 0$; $\dfrac{\partial U}{\partial Y} = 0$.

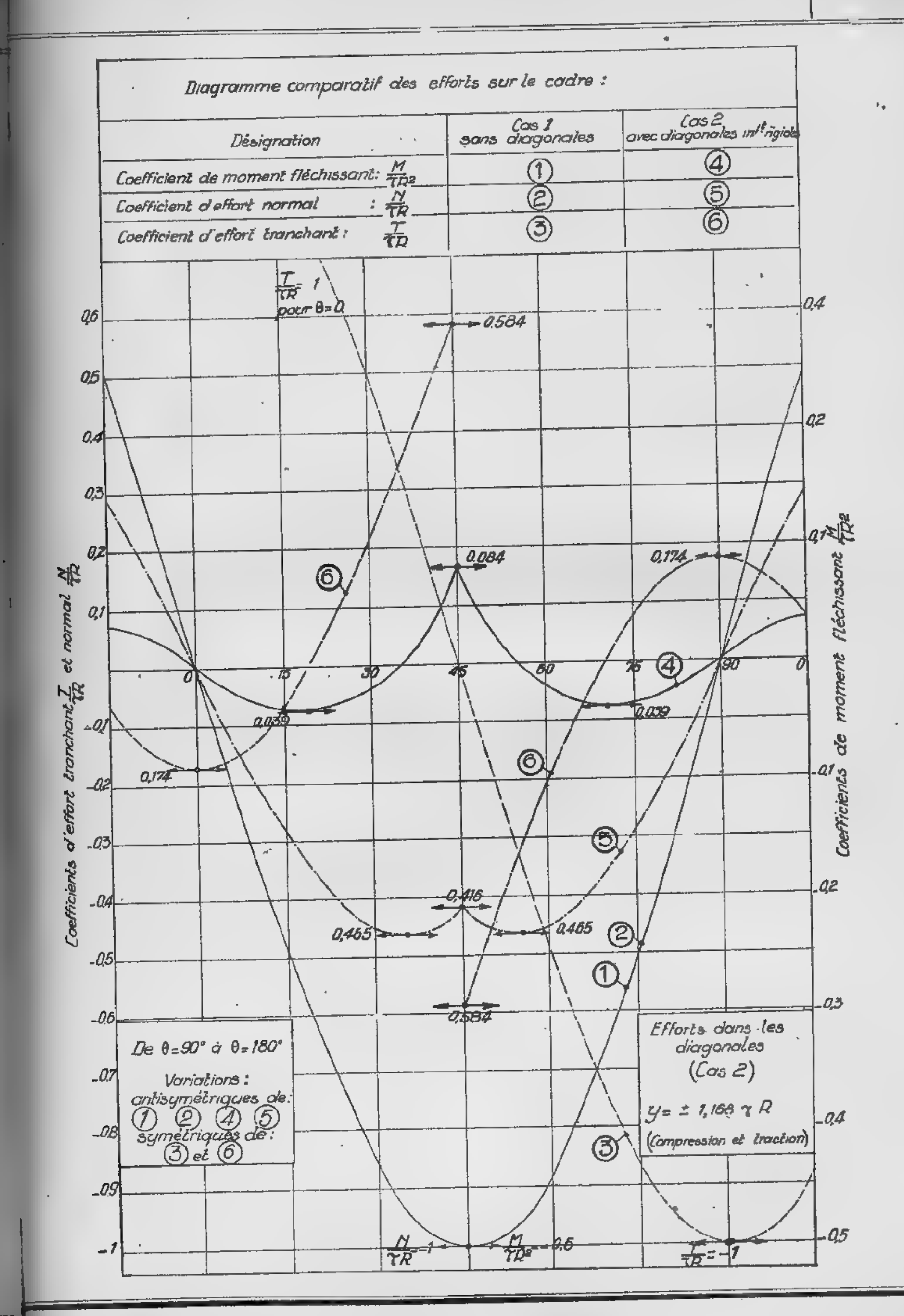
EXPRESSIONS INTERMÉDIAIRES ET RÉSULTATS ALGÉBRIQUES

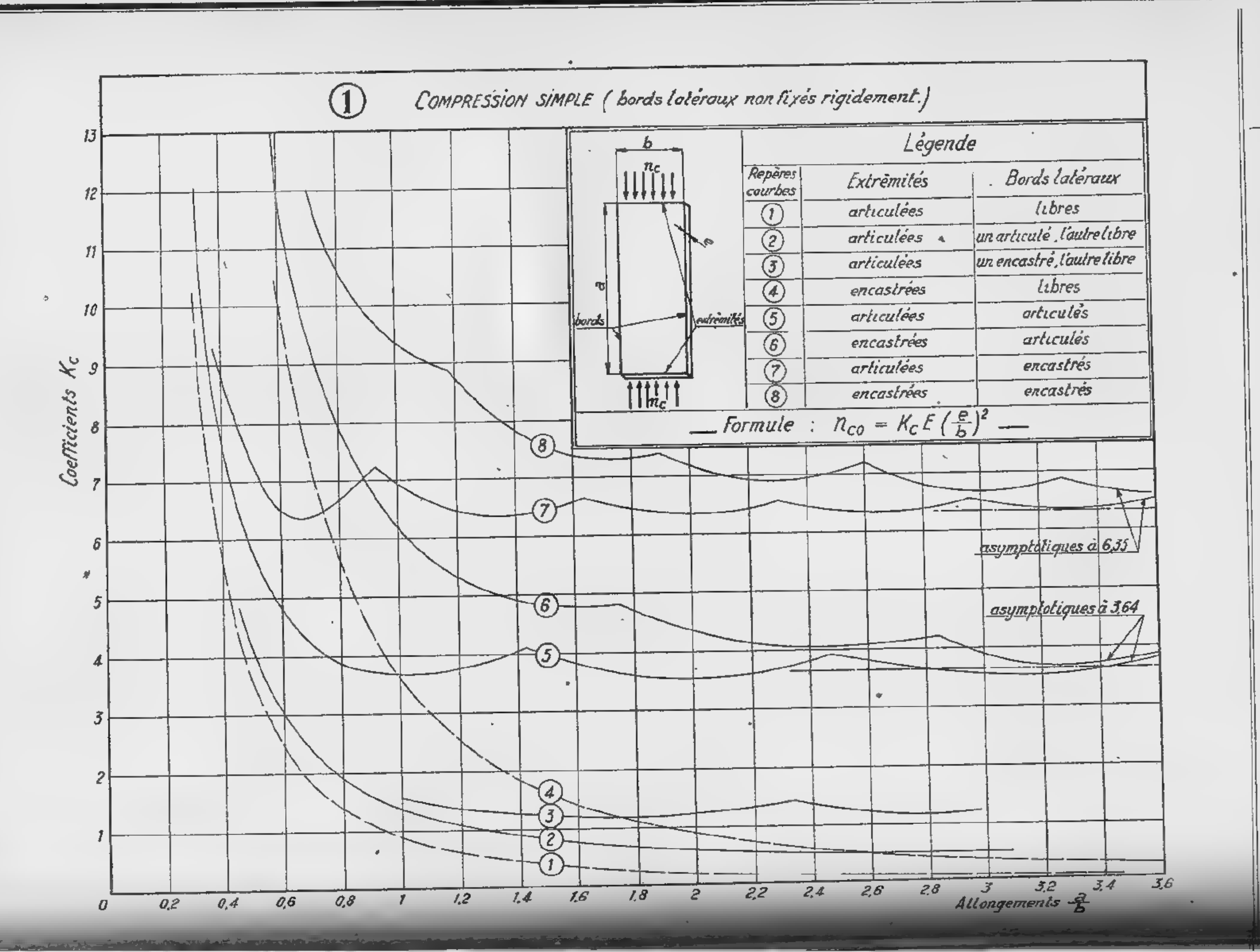
Désignation			Cas 1 Cadre sans diagon. (pour comparaison)	Cadre avec diagonales — Cas 2. — Compte non tenu de l'allongement des diagonales	Cadre avec diagonales — Cas 3. — Compte tenu de l'allongement des diagonales
Efforts (section *S*) système coupé (*Voir figure*)			$m = \tau R \int_0^{\theta} a\, d\theta_1 = \tau R^2 (\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)$		
			$n = \tau R \int_0^{\theta} \cos(\theta_1 + \theta)\, d\theta_1 = \tau R (\sin 2\theta - \sin\theta)$		
			$t = \tau R \int_0^{\theta} \sin(\theta_1 + \theta)\, d\theta_1 = \tau R (\cos\theta - \cos 2\theta)$		
Efforts réels section S	$\theta = 0$ à $\theta = \frac{\pi}{4}$	M	$m + XR\sin\theta$		
		N	$n - X\sin\theta$		
		T	$t + X\cos\theta$		
	$\theta = \frac{\pi}{4}$ à $\theta = \frac{\pi}{2}$	M	$m + XR\sin\theta$	$m + XR\sin\theta + YR\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$	
		N	$n - X\sin\theta$	$n - X\sin\theta - Y\sin(\theta - \frac{\pi}{4})$	
		T	$t + X\cos\theta$	$t + X\cos\theta + Y\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$	
Potentiel interne U			$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2}{2EI} R\, d\theta$		$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M^2}{2EI} R\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Y^2}{2E'S}\, dR$
Inconnues	X		$-\tau R$	$-\tau R \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{3(\frac{\pi}{2} - 1)}\right] = -0{,}174\, \tau R$	$-\tau R \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{3(2K + \frac{\pi}{2} - 1)}\right]$
	Y		0	$-\tau R \frac{2}{3(\frac{\pi}{2} - 1)} = -1{,}168\, \tau R$	$-\tau R \frac{2}{3(2K + \frac{\pi}{2} - 1)}$

mise

… un champ de cisaillement (encadrement renforcé par deux diagonales).

PLANCHE N° 36




1
COMPRESSION SIMPLE (bords latéraux non fixés rigidement.)
Légende
Repères courbes
Extrémités
Bords latéraux
1 articulées libres
2 articulées un articulé, l'autre libre
3 articulées un encastré, l'autre libre
4 encastrées libres
5 articulées articulés
6 encastrées articulés
7 articulées encastrés
8 encastrées encastrés
Formule : $n_{co} = K_c E \left(\frac{e}{b}\right)^2$
b
a
e
n_c
extrémités
bords
asymptotiques à 6,35
asymptotiques à 3,64
Allongements $\frac{a}{b}$
Coefficients K_c

Allongements $\frac{a}{b}$
② PLAQUES DE GRAND ALLONGEMENT SOLLICITÉES SUR LEURS QUATRE COTÉS.
n_{c1}
$n_{t2} = \alpha\, n_{c1}$
n_{t2}
b
e
n_{c2}
$n_{c2} = \alpha\, n_{c1}$
K_c^2
13
12
11
10
9
8
7
6,35
6
5
4
3,64
3
2
1
Formule : $(n_{c1})_o = K_c^2 E \left(\frac{e}{b}\right)^2$
4 côtés encastrés
Courbe moyenne
4 cotés articulés
$\alpha = \frac{n_{t2}}{n_{c1}}$ (Compression et traction.)
$\alpha = \frac{n_{c2}}{n_{c1}}$ (2 compressions)
-1 -0,9 -0,8 -0,7 -0,6 -0,5 -0,4 -0,3 -0,2 -0,1 0 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 1

Flambage des plaques cylindriques comprimées.

Demi-longueurs d'ondes théoriques $\frac{\lambda}{2}$ (mm)

300 290 280 270 260 250 240 230 220 210 200 190 180 170 160 150 140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 48 46 44 42 40 38 36 34 32 30 29 28 27 26 25 24 23 22 21 20

Formules

$n_{co} = 3E\left(\frac{e}{R}\right)^{1,42}$ (avec E = 7000 kg/mm²)

$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{0,91}\sqrt{Re}$

Référence: Lundquist : Rapport N.A.C.A. n° 473

Epaisseur e (mm) pour $\frac{\lambda}{2}$: 5 4 3,2 2,5 2 1,6 1,25 1 0,8 0,63 0,5

Epaisseurs e (mm) pour n_{co} : 5 4 3,2 2,5 2 1,6 1,25 1 0,8 0,63 0,5

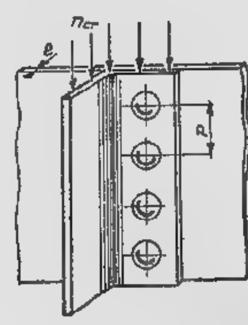
Rayons de courbure R (mm)

2500 2000 1800 1600 1400 1300 1200 1100 1000 900 800 700 600 500 400 300 200 190 180 170 160 150 140 130 120 110 100 90 80

30 29 28 27 26 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3,8 3,6 3,4 3,2 3 2,9 2,8 2,7 2,6 2,5 2,4 2,3 2,2 2,1 2

Contraintes critiques n_{co} (kg/mm²)

Rivetage des raidisseurs comprimés sur les tôles de duralumin (Abaque de NEWELL)



n_{cr} = taux de compression du raidisseur (kg/mm²).
e = épaisseur de la tôle (mm).
n_e = limite élastique du dural employé.
(n_e = 26 pour AU4G et 28 pour AU4G1.).
P — pas maximum admissible (mm).

Taux de compression n_{cr}: 30, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2

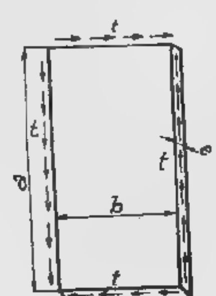
Pas P (mm.): 150, 140, 130, 120, 110, 100, 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10, 0

n_e = 30; n_e = 28; n_e = 26; n_e = 24

e = 3,2; e = 2,5; e = 2; e = 1,6; e = 1,25; e = 1; e = 0,8; e = 0,65; e = 0,5

0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100

Rapports $\frac{P}{e}$



Contrainte critique : $t_0 = K_s E \left(\frac{e}{b}\right)^2$
avec b=petit côté de la plaque.

① Coefficients théoriques K_s.

K_s

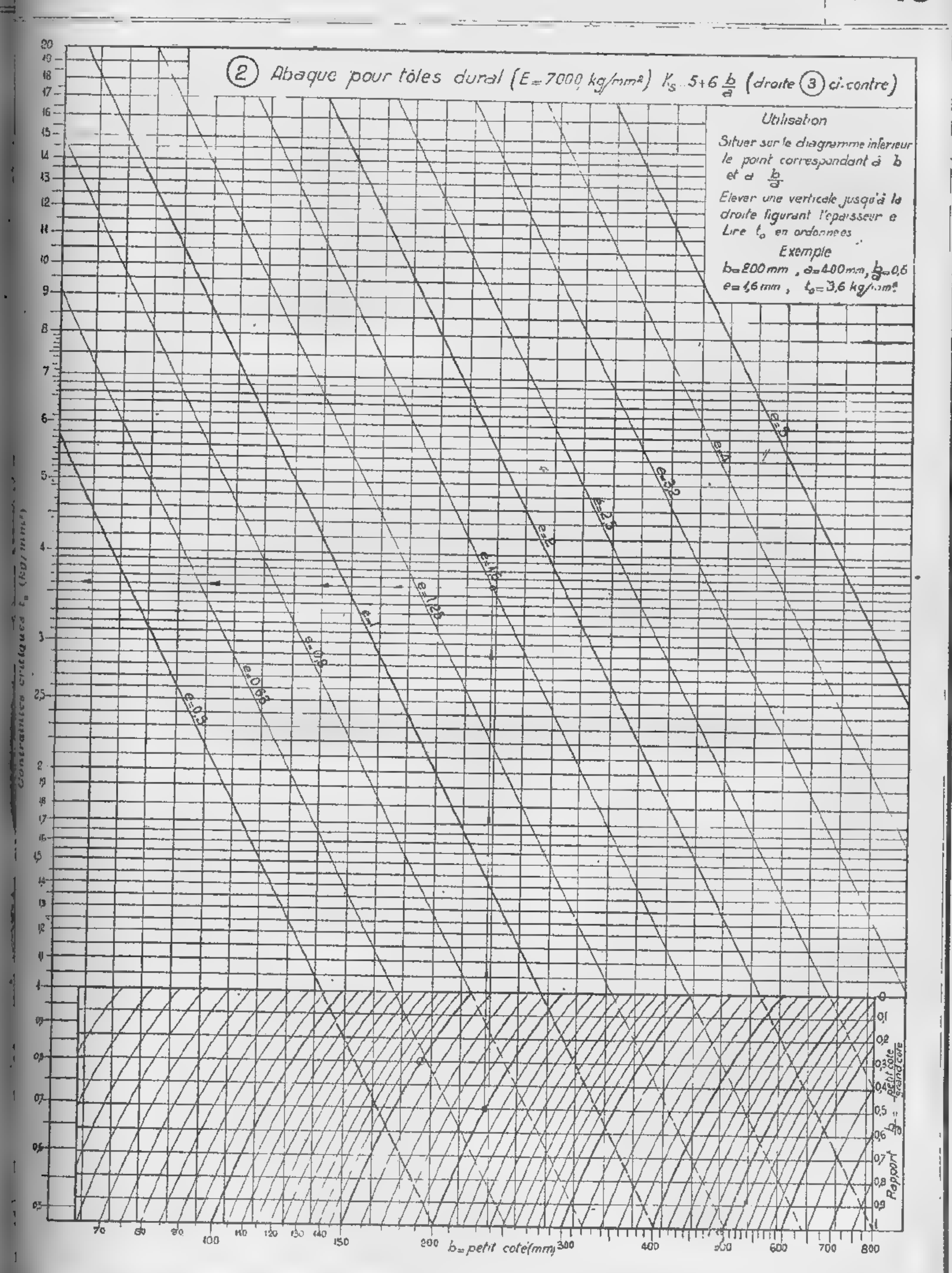
Légende

① 4 cotés articulés.

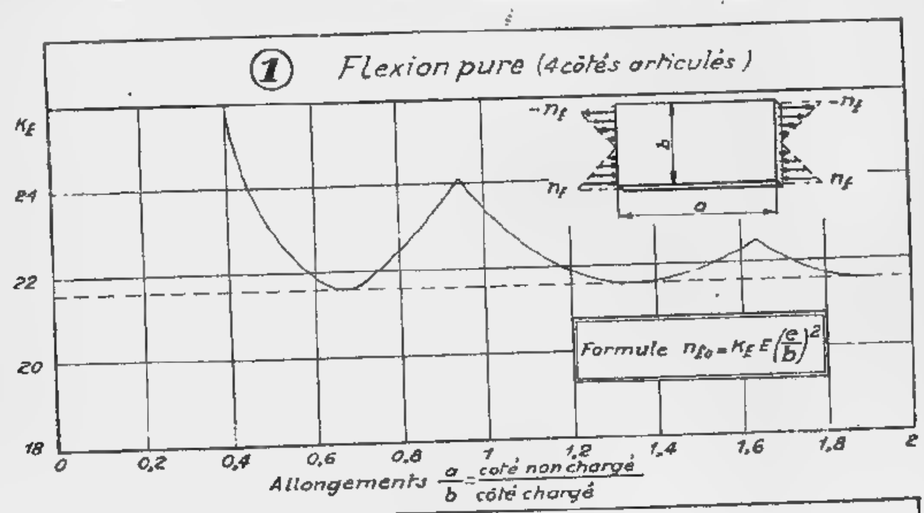
② 4 cotés encastrés

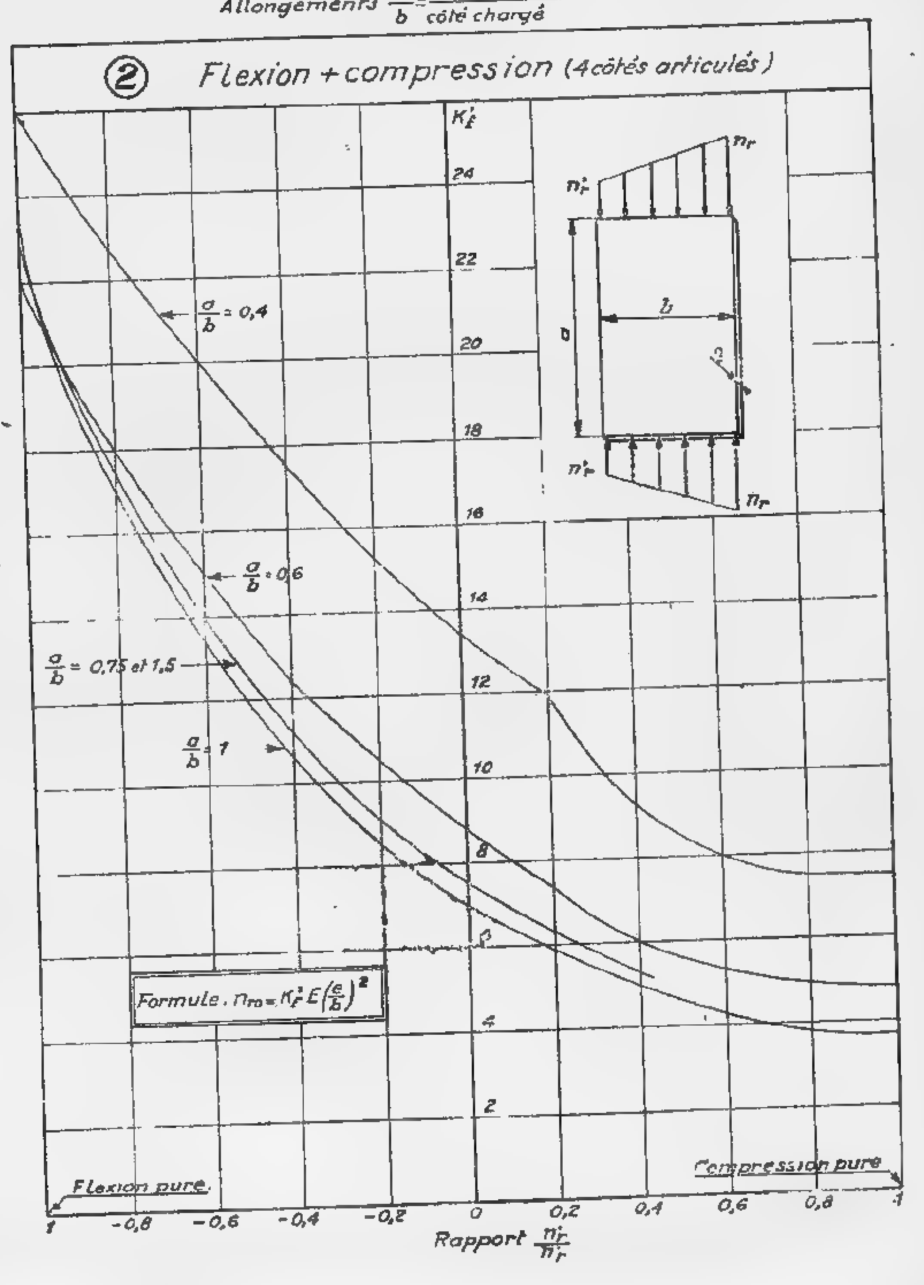
③ droite moyenne d'équation: $K_s = 5 + 6\frac{b}{a}$

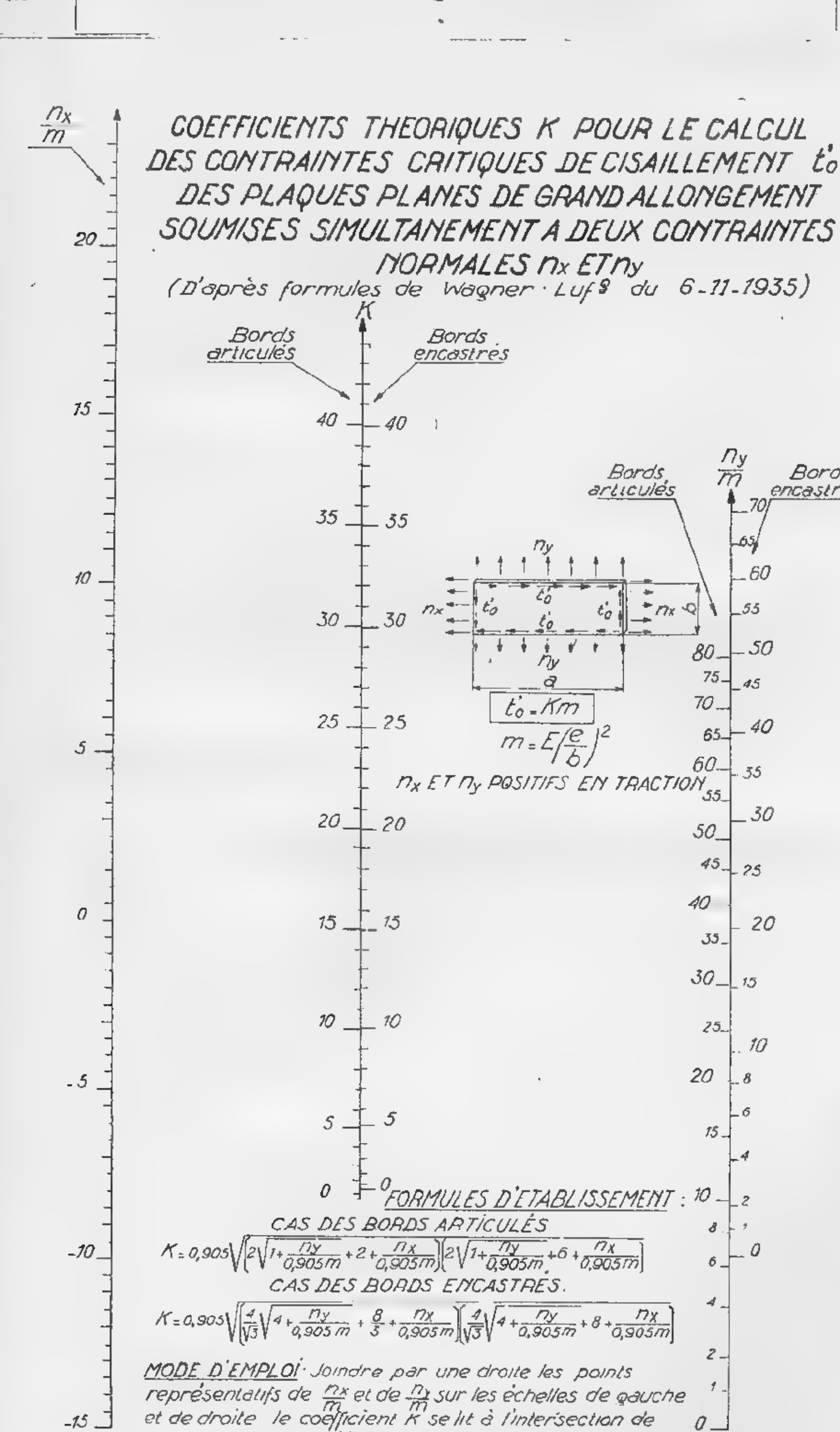
Rapports $\frac{b}{a} = \frac{\text{petit coté}}{\text{grand coté}}$


② Abaque pour tôles dural (E = 7000 kg/mm²) $K_s = 5+6\frac{b}{a}$ (droite ③ ci-contre)
Utilisation
Situer sur le diagramme inférieur le point correspondant à b et à $\frac{b}{a}$
Elever une verticale jusqu'à la droite figurant l'épaisseur e
Lire t_o en ordonnées
Exemple
b = 200 mm , a = 400 mm, $\frac{b}{a}$ = 0,5
e = 1,6 mm , t_o = 3,6 kg/mm²
e = 0,5
e = 0,63
e = 0,8
e = 1
e = 1,25
e = 1,6
e = 2
e = 2,5
e = 3,2
e = 4
e = 5
Contraintes critiques t_o (kg/mm²)
b = petit coté (mm)
Rapport $\frac{b}{a}$ = $\frac{\text{petit coté}}{\text{grand coté}}$
70
80
90
100
110
120
130
140
150
200
300
400
500
600
700
800

Coefficients théoriques pour le calcul des plaques planes fléchies.

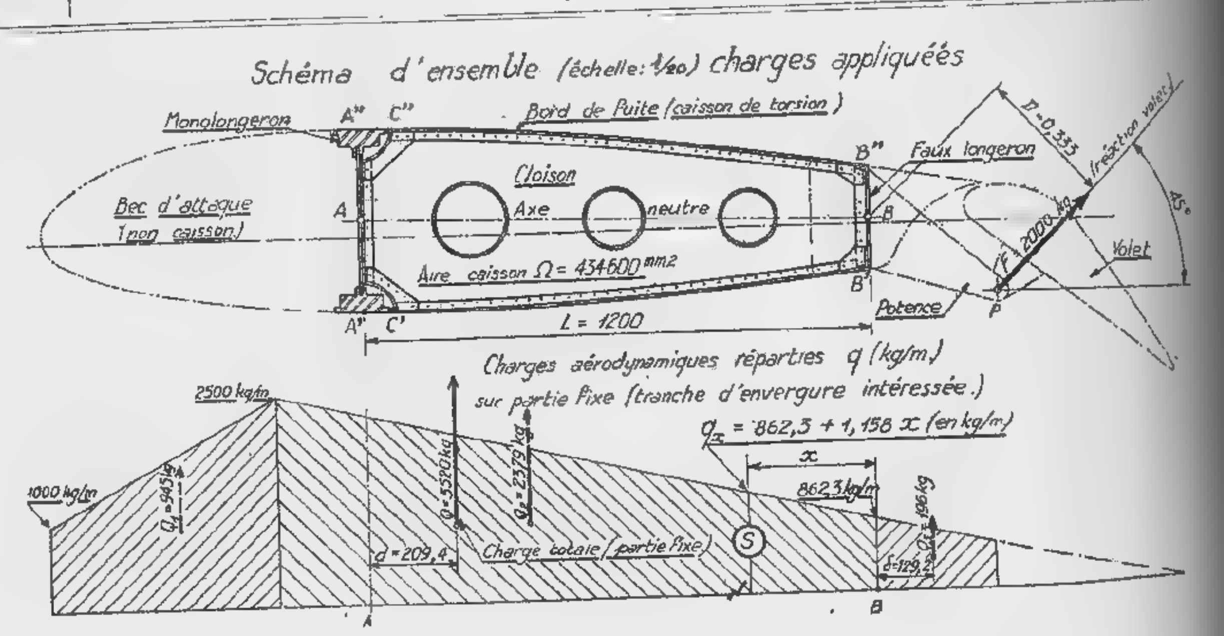






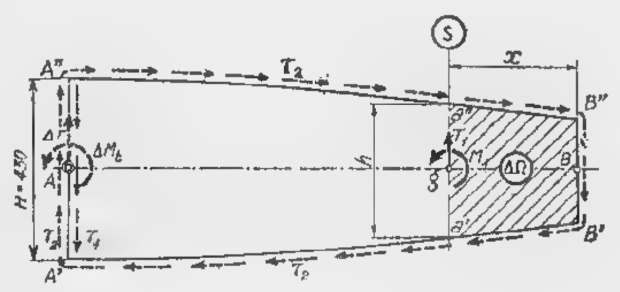
$$K = 0{,}905\sqrt{\left[2\sqrt{1+\frac{n_y}{0{,}905m}}+2+\frac{n_x}{0{,}905m}\right]\left[2\sqrt{1+\frac{n_y}{0{,}905m}}+6+\frac{n_x}{0{,}905m}\right]}$$

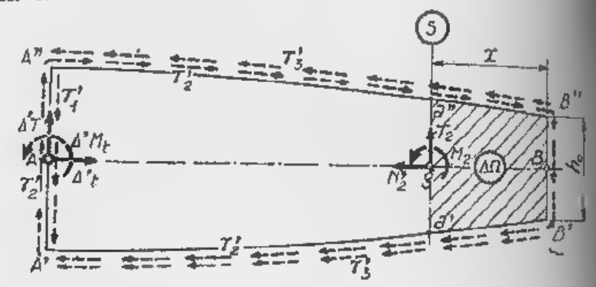
$$K = 0{,}905\sqrt{\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{4+\frac{n_y}{0{,}905\,m}}+\frac{8}{3}+\frac{n_x}{0{,}905m}\right]\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{4+\frac{n_y}{0{,}905m}}+8+\frac{n_x}{0{,}905m}\right]}$$



Cas A : Efforts dus aux charges réparties | *Cas B* : Efforts dus à la charge F

Equilibre de la cloison





Introductions de charges (en A)

$\Delta T - Q = 3520$ kg ; $\Delta M_t = Qd = 736\,960$ mmkg | $\Delta T = F\frac{\sqrt{2}}{2} - 1414$ kg ; $\Delta' M_t - 2000.1{,}182 = 2364$ mkg
$\Delta' t = 1414$ kg

Réactions des parois (variations de flux) en kg/mm

$\tau_1 = \frac{\Delta T}{H} = 8{,}19$; $\tau_2 = \frac{\Delta M_t}{2\,\Omega} = \frac{736960}{2 \cdot 434600} = 0{,}848$ | $\tau_1' = \frac{\Delta' T}{H} = 3{,}29$; $\tau_2' - \frac{\Delta' M_t}{2\,\Omega} = 2{,}72$; $\tau_3' = \frac{\Delta' t}{2L} = 0{,}589$

Expressions des efforts agissants dans une section courante S (*abscisse x en mm.*)

1. — Cloison assimilée à une console encastrée en A'A'' (sans réactions des parois)

$T'_1 = Q_3 + \int_0^x q_x dx \; 0{,}579\, x^2 + 862{,}3\, x + 196$ | $T_2' = \frac{F\sqrt{2}}{2} = 1414$ kg ; $N_2' = -\frac{F\sqrt{2}}{2} = -1414$ kg

$M_1' = Q_3\delta + \int_0^x T_1' dx = 0{,}193\, x^3 + 431{,}15\, x^2 + 196\, x + 25320$ | $M'_2 = FD + 1414\, x = 667 + 1414\, x$

2. — Efforts complémentaires dus aux réactions des parois

$T_1'' - -\tau_2 h = -0{,}848\, h$ | $T_2'' = -\tau'_2 h = -2{,}72\, h$

$M_1'' = -2\tau_2 \Delta\Omega - -1{,}696 \Delta\Omega$ | $N_2'' = 2\tau_3' x = -1{,}178\, x$

(« âme » a' a'' B'' B' soumise au flux τ_2.) | $M_2'' = -2\tau_2' \Delta\Omega = -5{,}44 \Delta\Omega$

3. — Efforts réels (voir diagramme ci-contre)

$T_1 = T_1' + T_1''$; $M_1 = M_1' + M_1''$ | $T_2 = T_2' + T_2''$; $N_2 = N_2' + N_2''$; $M_2 = M_2' + M_2''$

Caractéristiques des sections

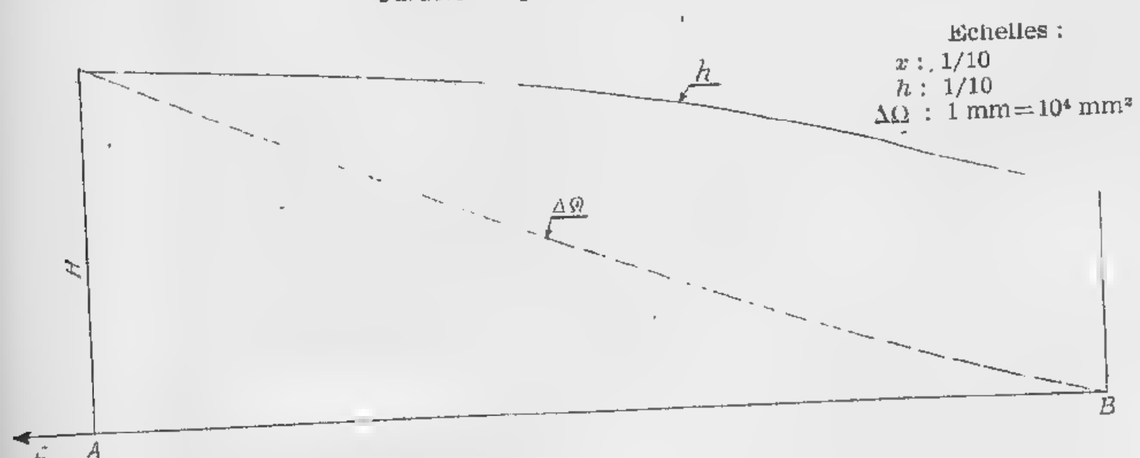
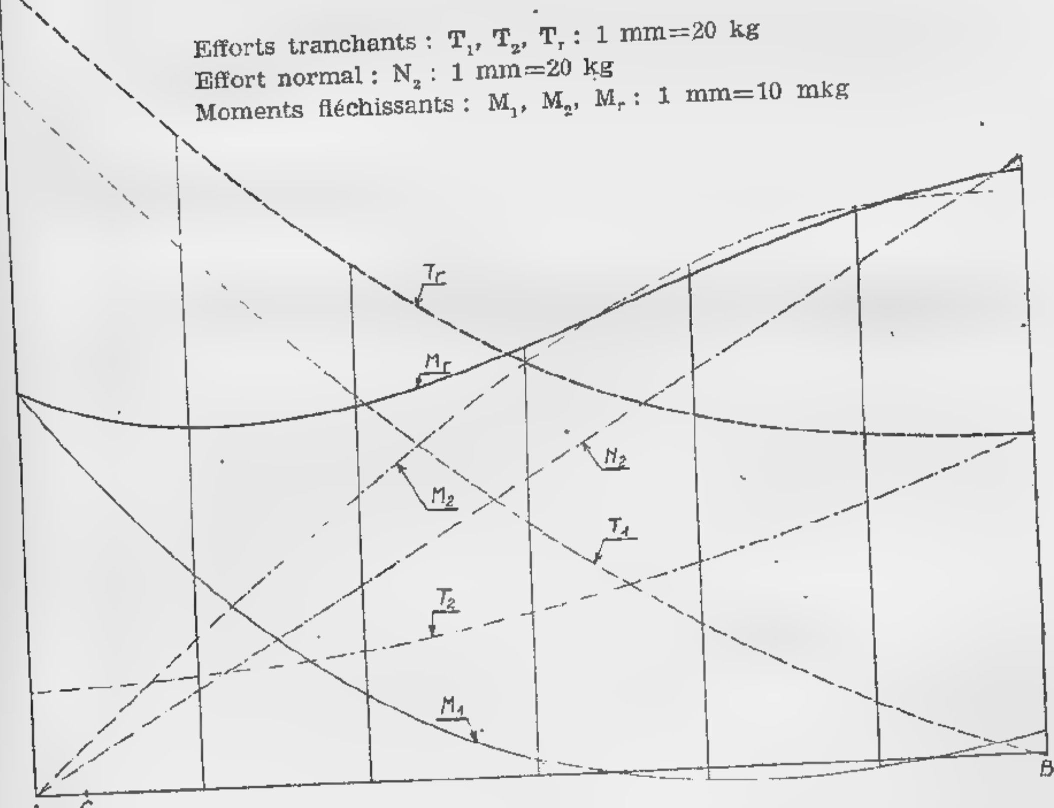


Diagramme des efforts cas A et B
et efforts résultants (cas A + cas B)

Echelles :

Efforts tranchants : T_1, T_2, T_r : 1 mm=20 kg
Effort normal : N_2 : 1 mm=20 kg
Moments fléchissants : M_1, M_2, M_r : 1 mm=10 mkg



Efforts aux attaches :

C' et C'' (charnières) : composantes horizontales $\varphi = \pm \frac{M_{rc}}{H} = \pm \frac{455}{0{,}430} = \pm 1058$ kg

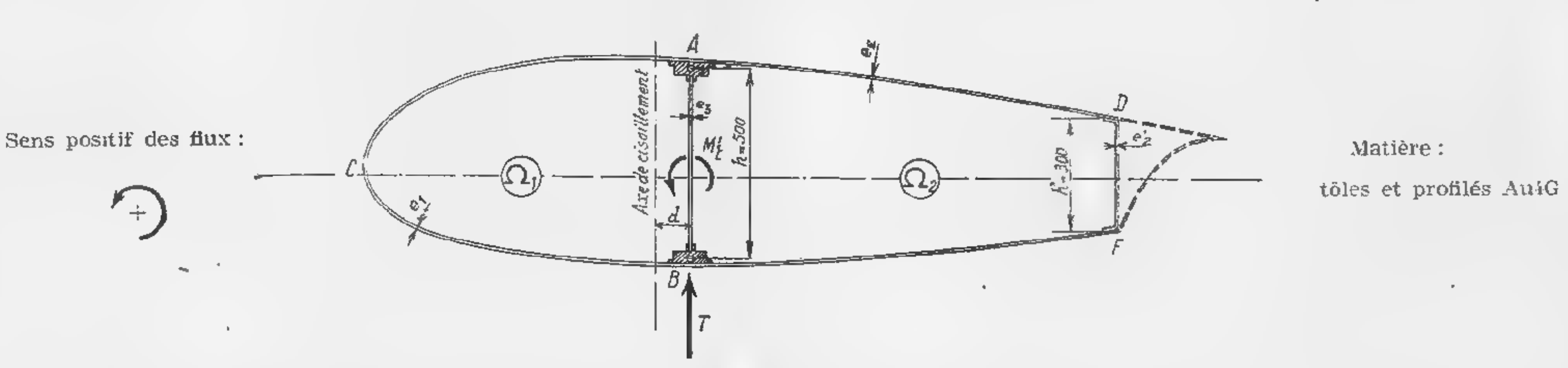
Rivetage sur l'âme : T_{rA}=1944 kg

Rivetage sur faux longeron : T_{rB}=754 kg

Schéma de la section

Echelle 1/20

Sens positif des flux :



Matière :
tôles et profilés AU4G

Caractéristiques de forme de la section

Désignation	Unités	Ame 1 (bord d'attaque ACB)	Ame 2 (bord de fuite ADE B)	Ame 3 (longeron AB)
Epaisseurs des parois	mm	$e_1=2$	$e_2=0{,}8$; $e'_2=1$	$e_3=2$
Longueurs développées des parois	mm	2080	AD + BE = 2130, DE = 300 } 2430	$h=500$
Surfaces des caissons de torsion	dm²	$\Omega_1=41{,}5$	$\Omega_2=48{,}6$	
Section de chaque semelle A et B	mm²	$s=2680$ mm²		
Convergence longitudinale des semelles		$\beta=2°30$, $\mathrm{tg}\,\beta=0{,}0437=k$		

Caractéristiques de résistance de la section

Paramètres $\alpha = \Sigma \frac{\Delta l}{e}$	$\alpha_1 = \frac{2080}{2} = 1040$	$\alpha_2 = \frac{2130}{0,8} + \frac{300}{1} = 2963$	$\alpha_3 = \frac{500}{2} = 250$
Coefficient A	$\frac{1}{A} = \frac{1}{1040} + \frac{1}{2963} + \frac{1}{250} = 5{,}296 \cdot 10^{-3}$; d'ou : A = 188,71		
Coefficient K	$K = \frac{\frac{48,6}{41,6}(1040 + 250) + 250}{2963 + 250 + \frac{48,6}{41,6} 250} = 0{,}501$		
Décalage de l'axe de cisaillement	$d = \frac{188,71}{500}\left(\frac{41,6 \cdot 10^4}{1040} - \frac{48,6 \cdot 10^4}{2963}\right) = 88$ mm (en avant de AB)		

Efforts appliqués à la section (flexion normale positive)

Effort tranchant normal brut : T=1800 kg Moment de flexion normale : M=40000 mkg Moment de transport de T en AB : $M'_t = -8000$ mkg.	Effort tranchant réduit : $T' = 18000 - \frac{0{,}0437 \cdot 40 \cdot 10^6}{500} = 14500$ k Moment de torsion réel : $M_t = -8000 - 14500 \cdot 0{,}088 = -9280$ mkg

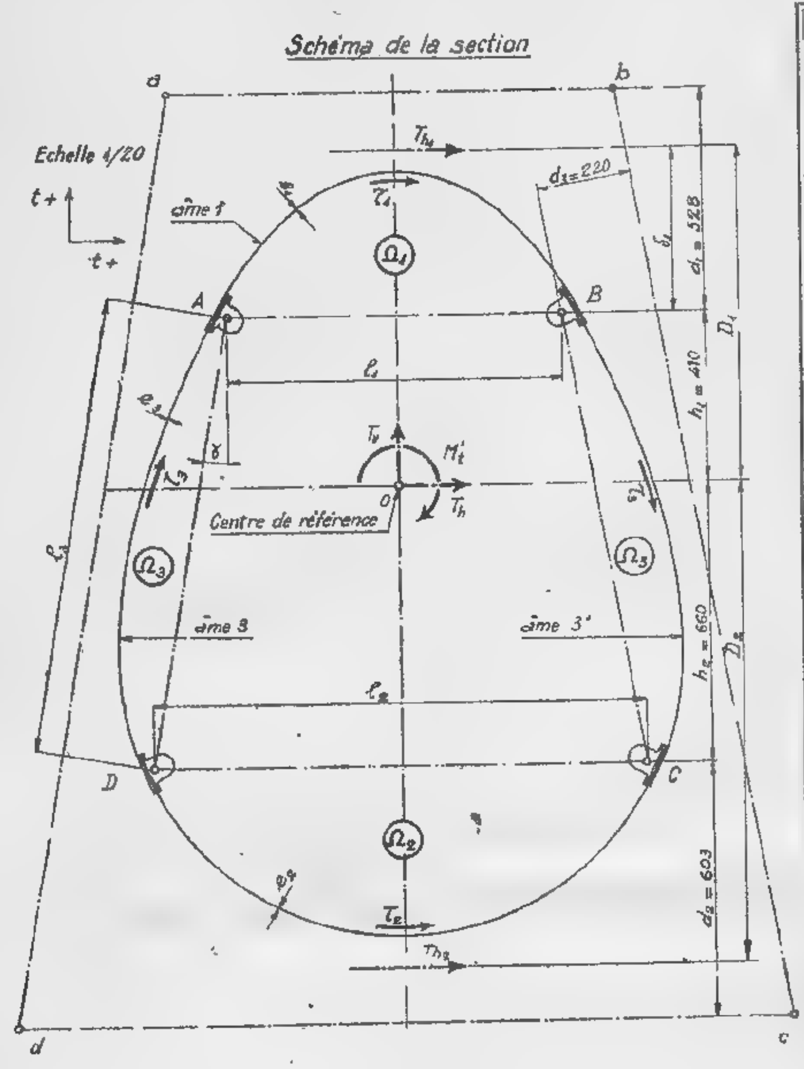
Flux et contraintes de cisaillement des âmes

Désignation	Unités	Ame 1	Ame 2	Ame 3
Flux de flexion pure	kg/mm	$\tau_1 = -\frac{14500 \cdot 188,71}{500 \cdot 1040} = -5{,}26$	$\tau_2 = \frac{14500 \cdot 188,71}{500 \cdot 2936} = 1{,}87$	$\tau_3 = \frac{14500 \cdot 188,71}{500 \cdot 250} = -21{,}9$
Flux de torsion pure	kg/mm	$\tau'_1 = -\frac{9280 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^4(41{,}6 + 0{,}501 \cdot 48{,}6)} = -7{,}04$	$\tau'_2 = -0{,}501 \cdot 7{,}04 = -3{,}54$	$\tau'_3 = -7{,}04 + 3{,}54 = -3{,}5$
Flux résultant	kg/mm	$\tau''_1 = -5{,}26 - 7{,}04 = -12{,}30$	$\tau''_2 = -1{,}87 - 3{,}54 = -1{,}67$	$\tau''_3 = -21{,}9 - 3{,}5 = -18{,}4$
Contraintes de cisaillement	kg/mm²	$t_1 = \frac{12,3}{2} = 6{,}15$	AD et BE : $t_2 = \frac{1,67}{0,8} = 2{,}09$ DE : $t'_2 = \frac{1,67}{1} = 1{,}67$	$t_3 = \frac{18,4}{2} = 9{,}2$

Contraintes normales des semelles : $n \approx \mp \frac{M}{h\,s} = \frac{40 \cdot 10^6}{500 \cdot 2680} = \mp 29{,}8$ kg/mm²

CARACTERISTIQUES DE FORME ET DE DIMENSIONS

Schéma de la section



Caractéristiques géométriques				
Désignation	unités	âme 1	âme 2	âmes 3 et 3'
épaisseurs	mm.	1	0,6	1,25
aires Ω	dm^2	$\Omega_1 = 21$	$\Omega_2 = 35$	$\Omega_3 = 12$
hauteurs	mm	$\ell_1 = 795$	$\ell_2 = 1160$	$\ell_3 = 1090$
distances axes de cisaillement	mm	$d_1 = \frac{2.210000}{795}$ $d_1 = 528$	$d_2 = \frac{2.350000}{1160}$ $d_2 = 603$	$d_3 = \frac{2.120000}{1090}$ $d_3 = 220$

Pentes des longerons
(Fig. 29 *a* et *b*, chap. XXI)

Désignation	En Projection verticale	En projection horizontale
A et B	$\alpha_1 = 0$	$\beta_1 = 2°;\ tg\beta_1 = 0{,}0349$
C et D	$\alpha_2 = 3°;\ tg3° = 0{,}05241$	$\beta_2 = 1°40,\ tg\beta_2 = 0{,}029$

Inerties des poutres horizontales

Poutre supérieure AB	Poutre inférieure CD
$I_1 = \frac{13{,}73 \cdot 79{,}5^2}{2}$ 43400 cm^4	$I_2 = \frac{9{,}45 \cdot 116^2}{2}$ = 63500 cm^4

Aire totale limitée : par les parois ; $\Omega = 173$ dm^2.

Matière : tôles et profilés AU4G,

Détails des longerons (Echelle 1/2)

Longerons supérieurs A et B

100
84
$15e = 18{,}75$
$15e = 15$
tôle 1
tôle 1,25
Profilé 2,5
Renfort 2,5
Semelle: 3,2
R = 30
Section $S_1 = 1373$ mm^2

Longerons inférieurs C et D

100
84
$15e = 18{,}75$
$15e = 9$
tôle 1,25
tôle: 0,6
Profilé: 2,5
Semelle: 2,5
R = 30
Section $S_2 = 945$ mm^2

CALCUL DES EFFORTS ET DES CONTRAINTES

Efforts appliqués à la section

Flexion verticale	Flexion horizontale	Torsion
$M_v = 50 \cdot 10^3$ mkg $T_v = 21{,}45 \cdot 10^3$ kg $T'_v = 21{,}45 \cdot 10^3 - \frac{0{,}05241 \cdot 40000}{1{,}07}$ $T'_v = 19000$ kg	$M_h = 30 \cdot 10^3$ mkg $T_h = 10^4$ mkg	$M'_t = 5 \cdot 10^3$ mkg

Partage des efforts de flexion horizontale et correction de torsion

		Désignation	Unités	Poutre supérieure	Poutre inférieure
Flexion horizontale		Mt fléchiss.	mkg	$M_{h_1} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 43{,}4}{106{,}9} = 12{,}2 \cdot 10^3$	$M_{h_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 63{,}5}{106{,}9} = 17{,}8 \cdot 10^3$
	Eff. tranch.	Brut	kg	$T_{h_1} = \frac{10^4 \cdot 43{,}4}{106{,}9} = 4{,}05 \cdot 10^3$	$T_{h_2} = \frac{10^4 \cdot 63{,}5}{106{,}9} = 5{,}94 \cdot 10^3$
		Correct.	kg	$T''_{h_1} = \frac{2 \cdot 0{,}03492 \cdot 12{,}2 \cdot 10^3}{0{,}795} = 1{,}07 \cdot 10^3$	$T''_{h_2} = \frac{2 \cdot 0{,}0291 \cdot 17{,}8 \cdot 10^3}{0{,}795} = 1{,}3 \cdot 10^3$
		Corrigé	kg	$T'_{h_1} = (4{,}05 - 1{,}07) \cdot 10^3 = 2{,}98 \cdot 10^3$	$T'_{h_2} = 4{,}64 \cdot 10^3$
Correction de torsion	Calcul des dist. δ et D	δ	mm	$\delta_1 = \frac{528 \cdot 2{,}98 \cdot 10^3}{4{,}05 \cdot 10^3} = 390$	$\delta_2 = \frac{603 \cdot 4{,}64 \cdot 10^3}{5{,}94 \cdot 10^3} = 470$
		D	mm	$D_1 = 410 + 390 = 800$	$D_2 = 660 + 470 = 1130$
	Moments de torsion	Correct.	mkg	$T_{h_1} \cdot D_1 = 4{,}05 \cdot 10^3 \cdot 800 \cdot 10^{-3} = 3{,}24 \cdot 10^3$	$T_{h_2} \cdot D_2 = 5{,}94 \cdot 10^3 \cdot 1130 \cdot 10^{-3} = 6{,}7 \cdot 10^3$
		Corrigé	mkg	$M_t = 10^3\ (5 + 3{,}24 - 6{,}7) = 1{,}54 \cdot 10^3$	

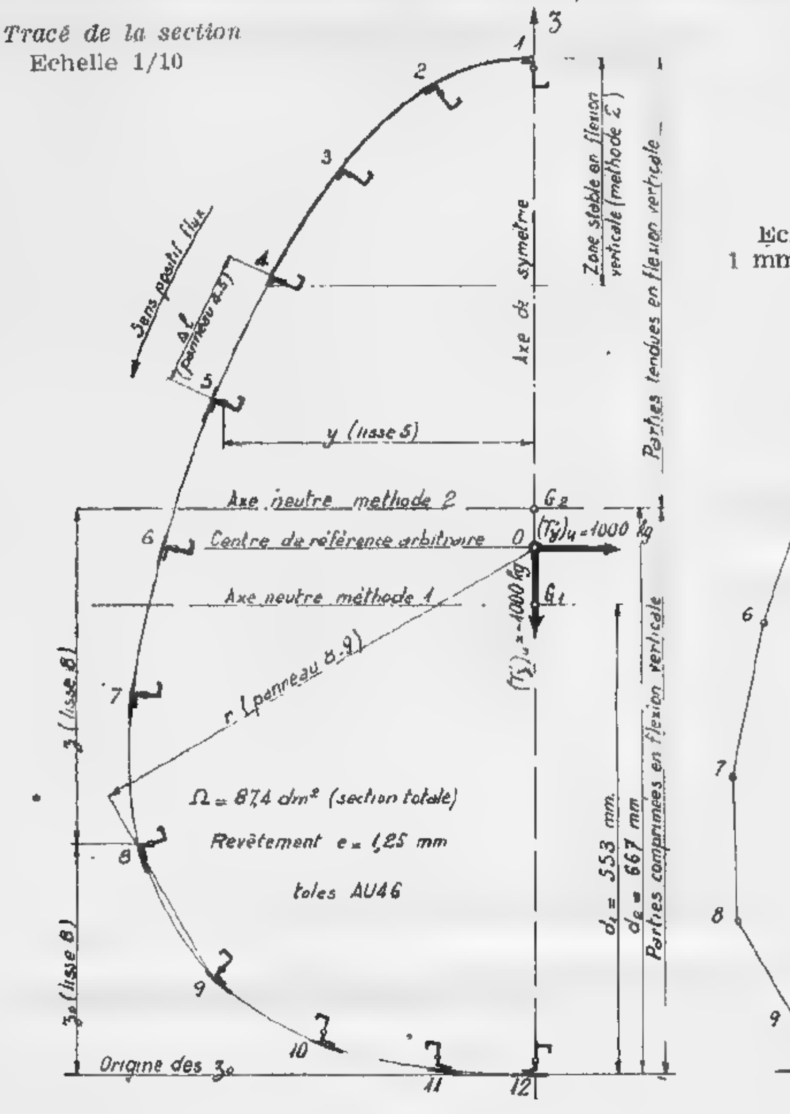
Contraintes normales des longerons (kg/mm²)

Désignation	Longerons supérieurs		Longerons inférieurs	
	A	B	C	D
Flexion verticale	$n_1 = \frac{50 \cdot 10^6}{2 \cdot 1070 \cdot 1373} = 17$	$n_1 = 17$	$n_2 = \frac{-50 \cdot 10^6}{2 \cdot 1070 \cdot 945} = -24{,}8$	$n_2 = -24{,}8$
Flexion horizon.	$n'_1 = \frac{12{,}2 \cdot 10^6}{2 \cdot 795 \cdot 1373} = 5{,}6$	$n'_1 = -5{,}6$	$n'_2 = \frac{17{,}8 \cdot 10^6}{2 \cdot 1160 \cdot 945} = 8{,}1$	$n'_2 = -8{,}1$
Résultantes	$n'_{r_1} = 17 + 5{,}6 = 22{,}6$	$n'_{r_1} = 11{,}4$	$n_{r_2} = -24{,}8 + 8{,}1 = -16{,}7$	$n'_{r_2} = -32{,}9$

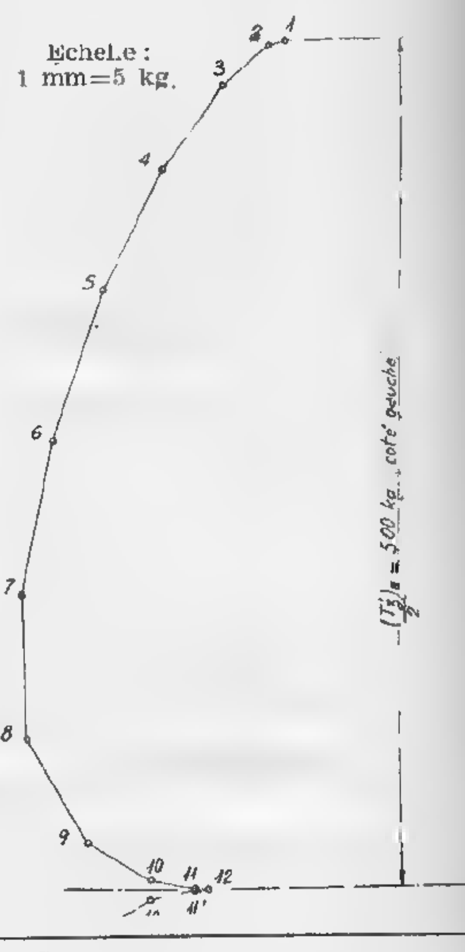
Flux et contraintes de cisaillement des parois

Désignation	Unités	Ame 1	Ame 2	Ame 3	Ame 3′
Flux du à T'_v	kg/mm	0	0	$\tau_3 = \frac{19000}{2 \cdot 1070} = 8{,}9$	$\tau'_3 = +8{,}9$
Flux du à T'_h	kg/mm	$\tau_1 = \frac{2{,}98 \cdot 10^3}{795} = 3{,}75$	$\tau_2 = \frac{4{,}64 \cdot 10^3}{1160} = 4$	0	0
Flux du à M_t	kg/mm	$\tau = \frac{1{,}54 \cdot 10^3}{2 \cdot 173 \cdot 10^4} = 0{,}45$	$\tau = -0{,}45$	$\tau = 0{,}45$	$\tau = -0{,}45$
Flux résult.	kg/mm	$\tau_{r1} = 3{,}75 + 0{,}45 = 4{,}2$	$\tau_{r_2} = 4 - 0{,}45 = 3{,}55$	$\tau_{r_3} = 8{,}9 + 0{,}45 = 9.35$	$\tau_{r_3} = 8{,}9 - 0{,}45 = 8{,}45$
contraintes résult.	kg/mm²	$t_1 = \frac{4{,}2}{1} = 4{,}2$	$t_2 = 4{,}44$	$t_3 = 7{,}5$	$t'_3 = 6{,}75$

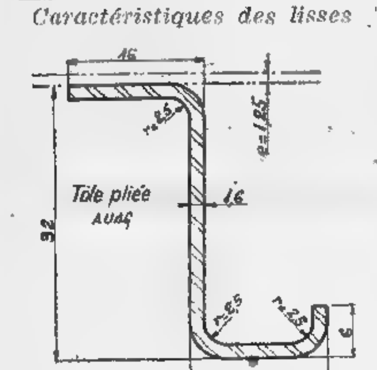
Tracé de la section
Echelle 1/10



Vérification graphique du flux de cisaillement unitaire $(\tau_1)_u$ *dû à* $(T'_z)_u = -1000$ *kg*
(dynamique des forces tangentielles f_1 colonne 14 tableau 1.)



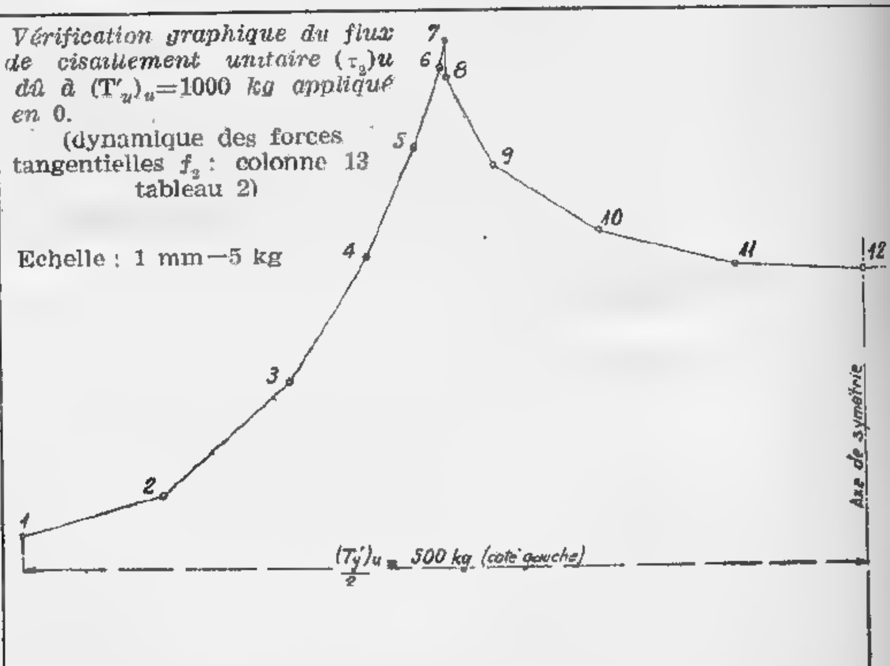
Caractéristiques des lisses



Section lisse seule :
$s = 97,6$ mm².
Section lisse avec revêtement instable :
$\Delta S = s + 30e^2 = 144,6$ mm².
Section lisse avec revêtement stable
$\Delta S' = s + e\Delta l'$.
avec $\Delta l'$ = intervalle moyen entre lisses adjacentes.

Vérification graphique du flux de cisaillement unitaire $(\tau_2)u$ *dû à* $(T'_y)_u = 1000$ *kg appliqué en 0.*
(dynamique des forces tangentielles f_2 : colonne 13 tableau 2)

Echelle : 1 mm = 5 kg



ite
les

d'un fuselage-coque multi-lisses
paramètres unitaires.

PLANCHE
N° **46** A

TABLEAUX DE CALCULS (flux unitaires)

1 Caractéristiques en flexion verticale (flexion négative : $(T'_z)_u = -1000$ kg)

N° lisses	z_0 mm	Recherche axe neutre – méth. 1 (ess.) ΔS_1 mm²	méth. 1 $z_0 \Delta S_1$ 10²mm³	méth. 2 (adop.) ΔS_2 mm²	méth. 2 $z_0 \Delta S_2$ 10²mm³	Calcul de I_y – z mm	$z^2 \Delta S_2$ cm⁴	Moments statiques – ΔW_y 10²mm³	N° panneaux	W_y 10²mm³	Flux unit. dû à $(T'_z)_u$ – $(\tau_1)_u$ kg/mm	Vérif. graph. – Δl mm	$F_1 = (\tau_1)_u \Delta l$ kg
1	1188	72,3*	858,9	126,3*	1500,4	521	3428	658	1-2	658	0,085	120	10,2
2	1157	144,6	1673	266,6	3084,6	490	6401	1306	2-3	1964	0,253	150	38
3	1062	»	1535,6	285,1	3027,8	395	4448	1126	3-4	3090	0,398	150	59,7
4	940	»	1359,2	285,1	2680	273	2124	778	4-5	3868	0,498	160	79,7
5	795	»	1149,6	144,6	1149,6	128	237	185	5-6	4053	0,522	180	94
6	627	»	909,6	»	906,6	-40	23	-58	6-7	3995	0,515	180	92,7
7	450	»	650,7	»	650,7	217	681	-314	7-8	3681	0,401	180	85,4
8	275	»	397,7	»	397,7	-392	2222	-567	8-9	3114	0,474	180	72,2
9	115	»	166,3	»	166,3	-552	4406	-799	9-10	2315	0,299	150	44,8
10	45	»	65,1	»	65,1	-622	5595	-899	10-11	1416	0,183	140	25,6
11	15	144,6	21,7	144,6	21,7	-652	6147	-943	11-12	473	0,061	120	7,3
12	12	72,3*	8,7	72,3*	8,7	-655	3102	-473					
Totaux utiles		1590,6	8793,1	2047,6	13659,2		38814						
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Notes :
- $\Delta S_1 = \Delta S$; $d_1 = \frac{879310}{1590,0} = 553$ mm
- $\Delta S_2 = \begin{cases} \Delta S' \text{ lisses 1 à 4} \\ \Delta S \text{ lisses 5 à 12} \end{cases}$; $d_2 = \frac{1365920}{2047,6} = 667$
- $z = z_0 - d_2$; $I_y = 2 \cdot 38814$ cm⁴ $= 77628$ cm⁴
- $W_y = z \Delta S_2$; $W_y = \Sigma \Delta W_y$ à partir de 1
- $(T_1)_u = \frac{(T'_z)_u}{I_y} W_y = 1,288 \cdot 10^{-6} W_y$

2 Caractéristiques en flexion horizontale : $(T_y)_u = 1000$ kg appliqué à O

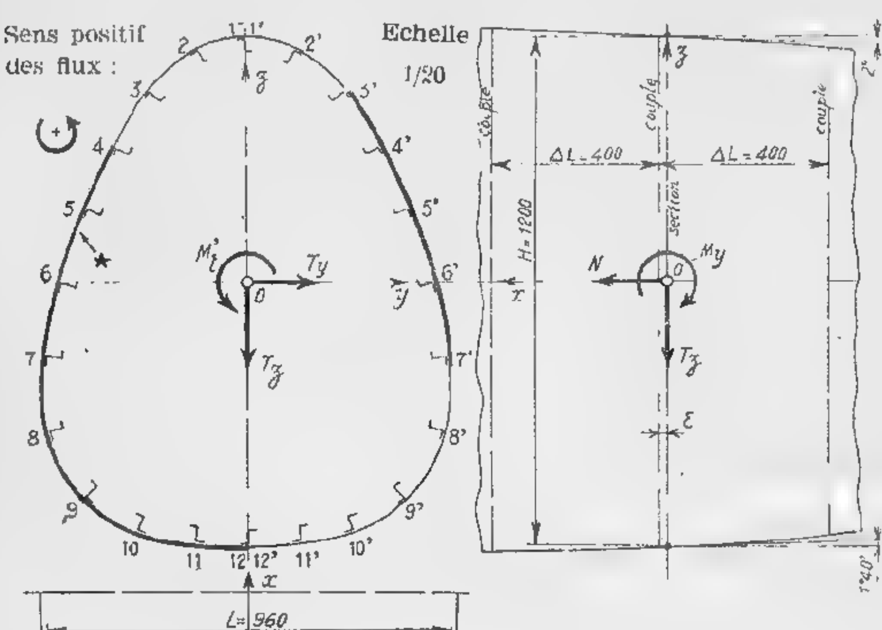
N° lisses	Calcul de I_z – ΔS_1 mm²	y mm	$y^2 \Delta S_1$ cm⁴	Calcul de W_z – ΔW_z 10²mm³	N° panneaux	W_z 10²mm³	Flux arbitr. $(\tau'_2)_u$ kg/mm	Correction de torsion – $f' = (\tau'_2)_u \Delta l$ kg	r mm	$f'r$ mkg	Flux unit $(\tau_2)_u$ kg/mm	Vérifications – gr. $f_2 = (\tau_2)_u \Delta l$ kg	mom. $f_2 r$ mkg
1	72,3*	0	0	0	1-2	0	0	0	560	0	-0,724	-86,9	-48,7
2	144,6	115	191	166	2-3	166	0,051	7,6	486	3,7	-0,674	-101	-49 1
3	»	225	732	325	3-4	491	0,150	22,5	435	9,8	-0,575	-86 2	-37,5
4	»	306	1354	443	4-5	934	0,284	45,5	420	19,1	-0,440	-70,4	-29,5
5	»	375	2033	542	5-6	1476	0,450	80,9	418	33 8	-0,275	-49,5	-20,7
6	»	432	2690	625	6-7	2101	0,640	115,2	430	49,5	-0,085	-15,2	-6,5
7	»	469	3180	678	7-8	2779	0,846	152,3	483	73,6	0,122	22	-10,4
8	»	462	3086	668	8 9	3447	1,050	189	583	110,2	0,325	58,5	-34,2
9	»	375	2034	542	9-10	3989	1,215	182,2	630	114,8	0,491	73,6	46,3
10	»	252	918	365	10-11	4354	1,326	185,6	626	116,2	0,601	84.2	52,7
11	144,6	115	191	166	11-12	4520	1,376	165,2	620	102,4	0,652	78,3	48,4
12	72,3*	0	0	0									
Totaux utiles			16418							633,1			Σ −0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Notes :
- $I_z = 2 \cdot 16418 = 32836$ cm⁴
- $\Delta W_z = y \Delta S_1$; $W_z = \Sigma \Delta W_z$; $(\tau'_2)_u = \frac{1.000}{32836 \cdot 10^4} W_z = 3,045 \cdot 10^{-6} W_z$
- Flux correcteur : $\tau'' = \frac{\Sigma f'r}{2\Omega} = \frac{2 \cdot 633,1 \cdot 10^3}{174,8\ 10^4} = -0,724$ kg/mm
- $(\tau_2)_u = (\tau'_2)_u + \tau''$

* Pour les lisses 1 et 12 situées sur axe de symétrie ΔS_1 et ΔS_2 — demi-section.

Position de la section dans la structure

Section envisagée (voir Pl. 46A) — Vue de profil



Vue en plan

$l = 960$

M_z — T_y — O — y — x

1°30' — 1°30'

Distance entre couples
$\Delta L = 400$ mm

* Les parois renforcées ci-dessus indiquent les panneaux travaillant au plissement diagonal ($t > t_0$ colonnes 13 et 14 tableau 4, et colonne 7 tableau 3).

Efforts appliqués
(évalués par rapport à 0)

Flexion verticale
$T_z = -8790$ kg
$M_y = -23000$ mkg

Flexion horizontale
$T_y = 3245$ kg
$M_z = 9000$ mkg

Moment de transport
$M'_t = +1000$ mkg

Effort normal :
$N = 1800$ kg

Correction des efforts tranchants
(Voir § 6.33)

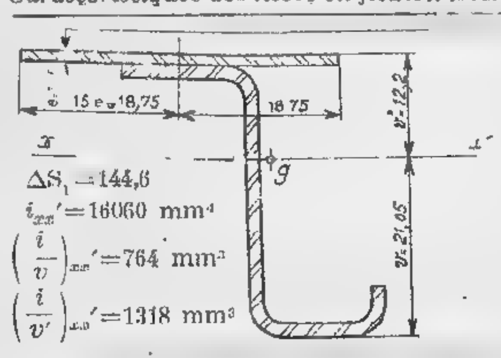
Flexion verticale
$\alpha_1 = 2° + 1°40' - 3°40'$
$\text{tg}\ \beta_1 = 0{,}064$

$$T'_z = -\left(8790 - \frac{0{,}064 \cdot 23000}{1{,}2}\right) = -7560 \text{ kg}$$

Flexion horizontale
$\beta_1 = 2 \times 1°30' = 3°$
$\text{tg}\ \alpha_1 = 0{,}052$

$$T'_y = 3245 - \frac{0{,}052 \cdot 9000}{0{,}960} = 3000 \text{ kg}$$

Caractéristiques des lisses en flexion isolée



$\Delta S_1 = 144{,}6$
$i_{xx}' = 16060$ mm⁴
$\left(\frac{i}{v}\right)_{xx}' = 764$ mm³
$\left(\frac{i}{v'}\right)_{xx}' = 1318$ mm³

Formules pour calcul t_0 des panneaux
(tabl. 3) $e = 1{,}25$ mm

$$t_0 = \frac{t'_0}{2} + \sqrt{t''^2_0 + \left(\frac{t'_0}{2}\right)^2}$$
(Chap. XIX, § 4.422)

t'_0 (plaque plane) Planche 41 (abaque 2)
avec $b = \Delta l$ (petit côté)
$a = \Delta L = 400$ mm (distance entre couples.)

$$t''_0 = K'_s\, E\left(\frac{e}{l}\right)^2 + 0{,}1\, E\,\frac{e}{R}$$ (Chap. XIX § 4421)
avec $K'_s = 7{,}05$; $l = \Delta L = 400$.
R = rayon de courbure des panneaux (en mm)

$$t''_0 = 0{,}482 + \frac{875}{R} \quad \text{(en kg/mm}^2\text{)}$$

3 | Calcul des contraintes critiques t_0 (cisaillement pur) des panneaux (Voir formules ci-contre)

Nos pann. G et D	$\frac{b}{a} = \frac{\Delta l}{400}$	t'_0 kg/mm²	R mm	$\frac{875}{R}$ kg/mm²	t''_0 kg/mm²	t_0 kg/mm²	$t_0 = 1{,}25\, t_0$ kg/mm
1-2	0,3	0,466	235	3,725	4,207	4,44	5,55
2-3	0,375	0,496	425	2,06	2,542	2,8	3,5
3-4	0,375	0,496	790	1,108	1,590	1,85	2,32
4-5	0,4	0,506	1380	0,634	1,116	1,39	1,74
5-6	0,45	0,512	1545	0,566	1,048	1,34	1,67
6-7	0,45	0,512	1070	0,819	1,301	1,58	1,97
7-8	0,45	0,512	495	1,768	2,250	2,52	3,15
8-9	0,45	0,512	345	2,535	3,017	3,28	4,1
9-10	0,375	0,496	345	2,535	3,017	3,27	4,09
10-11	0,35	0,486	620	1,411	1,893	2,15	2,68
11-12	0,3	0,465	865	1,011	1,493	1,74	2,18
1	2	3	4	5	6	7	8

4 | Calcul des contraintes dues aux efforts généraux (ch. XXII, § 6.41)

Contraintes normales des lisses (kg/mm²)						Contraintes tangentielles du revêtement							
	Flexion		Eff. N	totale : n		Nº pan-neaux	Flux (kg/mm)					Contraintes (kg/mm²)	
							Flexion		Torsion	Totaux : τ			
Nº lisses	n_1	n_2	n_4	côté G	côté D		τ_1	τ_2	τ_3	côté G	côté D	côté G	côté D
1	—15,42	0	0,57	—14,85	—14,85	1-2	±0,64	—2,17	0,57	—0,96	-2,24	0,77	1,79
2	—14,5	∓ 1,58	»	**—15,51**	—12,35	2-3	±1,91	—2,02	»	0,46	—3,36	0,37	2,69
3	—11,69	∓ 3,08	»	—14,20	—8,04	3-4	±3,01	—1,73	»	1,85	—4,17	1,48	3,34
4	—8,08	∓ 4,19	»	—11,70	—3,32	4-5	±3,76	—1,32	»	3,01	—4,51	2,41	3,61
5	—3,79	∓ 5,14	»	—8,36	—1,92	5-6	±3,95	—0,83	»	3,69	—4,21	2,96	3,37
6	1,18	∓ 5 92	»	—4,17	7,67	6-7	±3,89	0,25	»	4,21	—3,57	3,37	2,86
7	6 42	∓ 6,43	»	0,56	13,42	7-8	±3,59	0 37	»	4,53	—2,65	3,63	2,12
8	11,6	∓ 6,33	»	5,84	18,50	8-9	±3,35	0,98	»	4,90	—1,8	**3,92**	1,44
9	16,34	∓ 5,14	»	11,77	22,05	9-10	±2,26	1,47	»	4,30	—0,22	3,44	0,18
10	18,41	∓ 3,45	»	15,53	**22,43**	10-11	±1,38	1,81	»	3 76	1	3,01	0,8
11	19,30	∓ 1,58	»	18,29	21,45	11-12	±0,46	1,96	0,57	2,99	2,07	2,39	1,66
12	19,39	0	0,57	19,39	19,39								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

$n_1 = \frac{M_y}{I_y} z = 0{,}0296\ z$; $n_2 = \pm \frac{M_z}{I_z} y = \pm 0{,}0137 y$

$n_4 = \frac{N}{\Sigma \Delta S_1} = 0{,}57$ kg/mm².

$\tau_1 = \pm 7{,}56\ (\tau_1)_u$; $\tau_2 = 3\ (\tau_2)_u$

$\tau_3 = \frac{M'_t}{2} = \frac{1000 \cdot 10^3}{174{,}8 \cdot 10^4} = 0{,}57$ kg/mm.

5 | Contraintes supplémentaires dues au plissement des parois (ch. XXII, § 6.42)

	Nº pann. plissés ($t > t_0$)	Δl	$\Delta \tau = \tau - \tau_0$	Nº lisses corresp.	Compres sup. (§ 6.425)			Flexion suppl. (§ 6.426)					Contr. résultᵗᵉ max. n_r des lisses
					Δl_m	$\Delta \tau_m$	n_{s_1}	$\Delta \gamma$	φ	m_1	Coté revêt n'_{s_2}	Coté intʳ n_{s_2}	
		mm	kg/mm		mm	kg/mm	kg/mm	degrés	kg/mm	mmkg	kg/mm²	kg/mm²	kg/mm²
Côté gauche	4-5	160	1,27	5	170	1,645	0,96	4°14′	0,061	814	0,62	-1,07	-8,47
	5-6	180	2,02	6	180	2,13	1,33	5°22′	0,1	1335	1,01	-1,75	-4,59
	6-7	180	2,24	7	180	1,81	1,13	11°14′	0,177	2360	1,79	-3,1	-3,48
	7-8	180	1,38	8	180	1,09	0,68	27°48′	0,262	3500	2,66	-4,59	9,18
	8-9	180	0,8	9	165	0,505	0,29	26°54′	0,118	1575	1,2	-2,07	13,26
	9-10	150	0,21	10	145	0,645	0,32	19°46′	0,111	1480	1,12	-1,94	16,97
	10-11	140	1,08	11	130	0,945	0,42	10°36′	0,087	1160	0,83	-1,52	19,54
	11-12	120	0,81										
Côté droit	3'-4'	150	1,02	4′	155	1 445	0,77	8°52′	0,112	1492	1,13	-1,96	-4,51
	4'-5'	160	1,87	5′	170	1,785	1,05	4°14′	0,066	880	0,67	-1,15	3,64
	5'-6'	180	1,70	6′	180	1,295	0,81	5°22′	0,061	814	0,62	-1,07	9,10
	6-7'	180	0,89										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

$n_{s_1} = \frac{\Delta \tau_m \cdot \Delta l_m}{2 \Delta S_1}$; $\varphi = \Delta \tau_m \sin \frac{\Delta \gamma}{2}$; $m_1 = \varphi \frac{400^2}{12} = 13330\,\varphi$; $n'_{s_2} = \frac{m_1}{\frac{i}{v'}} = 0{,}759 \cdot 10^{-3} m_1$; $n_{s_2} = \frac{m_1}{\frac{i}{v}} = 1{,}31 \cdot 10^{-3} m_1$

Tracé de la section
Echelle : 1/10

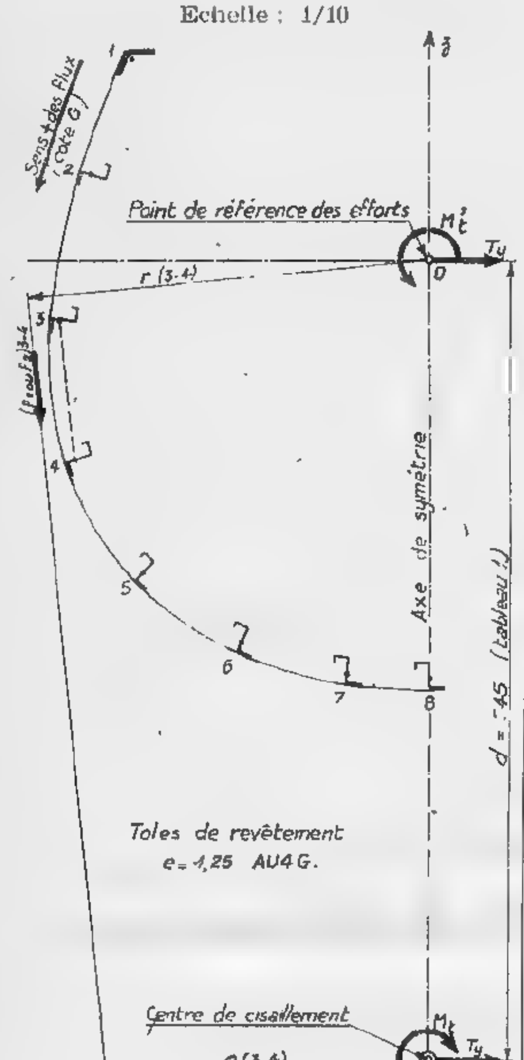
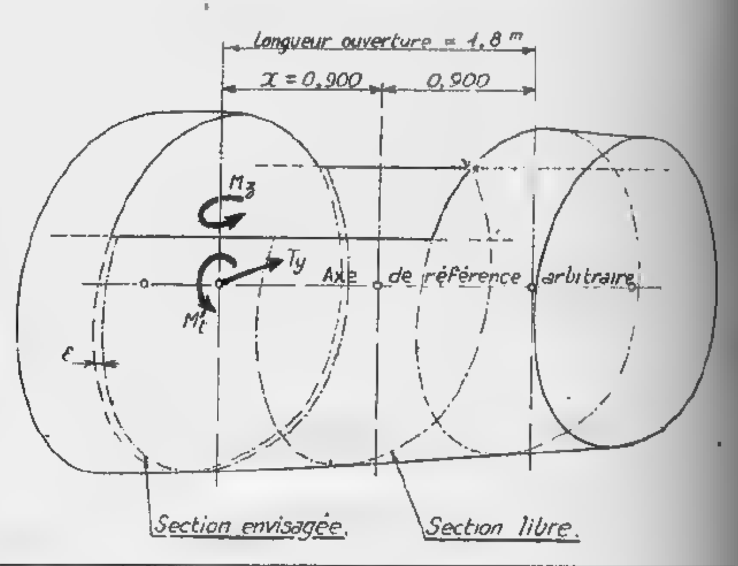


Schéma de position de la section dans la structure



Efforts appliqués en O

Effort tranchant $T_y = 4000$ kg; Moment fléchiss. $M_z = 6000$ mkg
Moment de transport $M'_t = 1000$ mkg
(sensiblement constant le long de l'ouverture)
On négligera la correction d'effort tranchant (parois sensiblement cylindriques) d'où $T'_y = T_y$

Transport des efforts en C_c

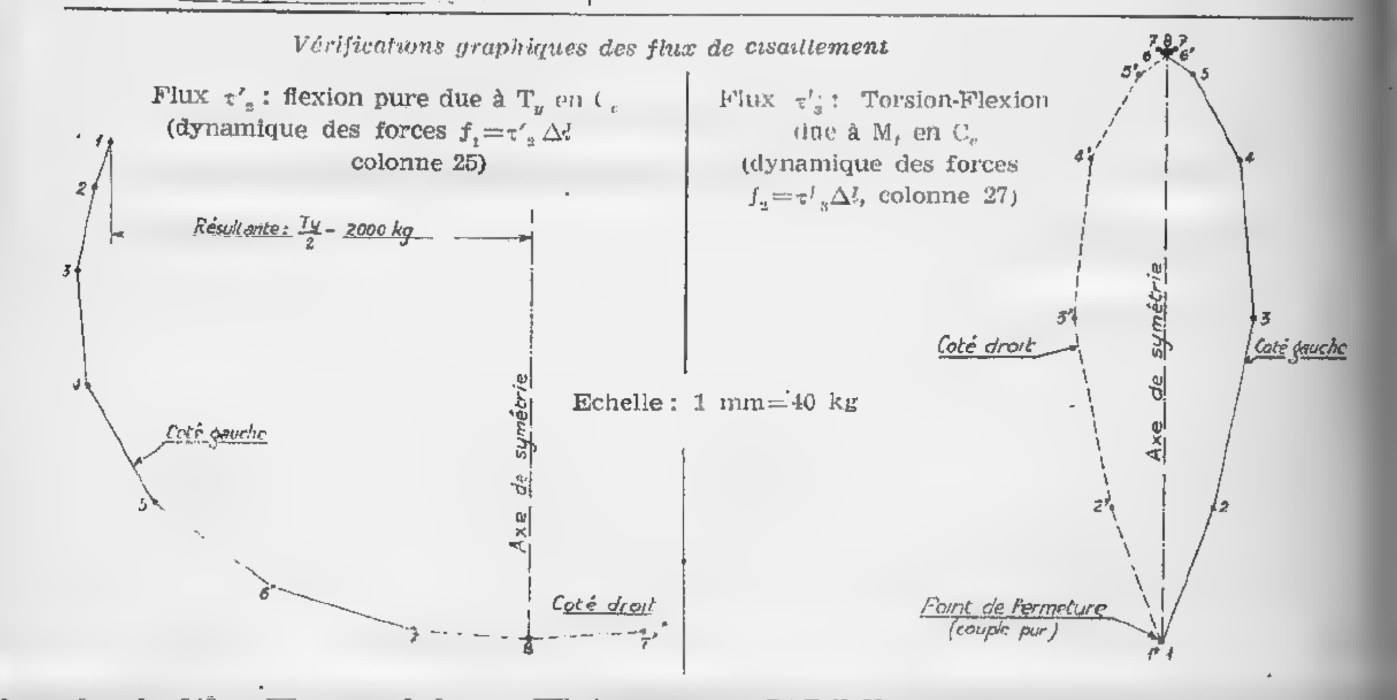
(Voir détermination de la position de C_c tableau 1)
$T_y' = 4000$ kg (flexion pure)
$M_t = M'_t - T_y \cdot d = 1000 - 3780 = -2780$ mkg (torsion pure)

Caractéristiques des lisses (AU4G)

Lisses courantes 2 à 9 : voir planche 46 $\Delta S_1 = 144{,}6$ mm²	Lisse 1 (bordure ouverture) L 40 × 40 × 3,2; $\Delta S = 310$ mm² (avec 15 e^2 de tôle)

On supposera tout le revêtement instable (méthode 1 § 6.22)

Vérifications graphiques des flux de cisaillement



TABLEAUX DE CALCULS

1 | Détermination des caractéristiques de résistance de la section

N° lisses	Calcul de I_z : ΔS mm²	y mm	$y^2\Delta S$ cm⁴	Mom. stat. ΔW_z cm³	Calcul de C (§ 4.12) : u cm²	$u^2\Delta S$ dm⁶
1	310	349	3776	108,2	1648	8,42
2	144,6	400	2314	57,8	521	0,393
3	»	435	2736	62,9	—575	0,478
4	»	418	2527	60,4	—1205	2,098
5	»	340	1671	49,2	—1253	2,270
6	»	225	732	32,5	—919	1,221
7	»	100	145	14,5	—425	0,261
8	72,3*	0	0			
Totaux utiles			**13900**			**5,141**
1	2	3	4	5	13	14

N° des panneaux	Position de C_r (§ 2.41) : Δl mm	r mm	W_z cm³	$W_z r\Delta l$ dm⁵	Calcul de C (§ 4.12) : d mm	Δu cm²
1-2	145	435	108,2	0,682	777	1127
2-3	172	440	166	1,257	637	1096
3-4	165	475	228,9	1,794	382	630
4-5	155	515	289,3	2,31	31	48
5-6	142	530	338,6	2,548	-235	-334
6-7	130	528	371,1	2,547	-380	-494
7-8	100	517	385,5	1,993	-425	-425
Totaux utiles				**13,131**		
6	7	8	9	10	11	12

$I_z = 2\times 13900 = 27800$ cm⁴
*ΔS lisse 8 — demi-section de cette lisse (axe symétrie)

$\Delta W_z = y\Delta S$

$W_z = \Sigma\Delta W_z$ à partir de 1

$a = \frac{2\Sigma W_z r\Delta l}{I_z} = 945$ mm.

$\Delta u = \rho\Delta l$; $u = \Sigma\Delta u$ à partir de 8

$C = 2\cdot 15{,}141 = 30{,}282$ dm⁶

2 | Détermination des contraintes (flexion et torsion générales)

N°	Contr. norm. des lisses (kg/mm²) : flexion n'_2	torsion flexion n'_3	résult^te n'	Torsion-flex. $\Delta\tau'_3$
1	∓7,52	∓13,62	∓**21,14**	—4,69
2	∓8,63	∓ 4,3	∓13,93	-0,69
3	∓9 39	± 4,75	∓ 4,64	0,76
4	∓9,01	±10,7	± 1,69	1,60
5	∓7,35	±11,12	± 5,48	1,66
6	∓4,85	± 8,55	± 3,70	1,22
7	∓2,16	± 3,77	± 1,61	0,57
8	0	0	0	
Totaux utiles				
15	16	17	18	21

N° panneaux	Flux (kg/mm) et contr. (kg/mm²) du revêt^t : Flex. pure τ'_2	Torsion-flex. τ'_3	flux total τ	contr. t	Vérification des flux — Flexion pure : f_1 kg	$f_1\rho$ mkg	Torsion flex. : f_2 kg	$f_2\rho$ mkg
1-2	1,56	—4,69	—3,13	2,5	226	175	—680	—528
2-3	2,39	—5,38	—3,01	2,41	411	262	-926	—590
3-4	3,29	—4,62	—1,32	1,06	542	207	—762	—291
4-5	4,16	—3,02	1,14	0,92	645	20	—468	—15
5-6	4,87	—1,36	3,51	2,81	691	—164	—193	45
6-7	5,34	—0,14	5,20	4,16	694	—264	—18	7
7-8	5,54	0,43	5,11	4,1	554	—236	43	—18
Totaux utiles						0		**—1390**
19	20	22	23	24	25	26	27	28

$n'_2 = \frac{M_z}{I_z}y = \frac{6000\ 10^3}{37800\cdot 10^4}y = 2{,}1583\cdot 10^{-2}y$

$n'_3 = \frac{M}{C}2u = \frac{2780\cdot 10^3\ 900}{30{,}282\cdot 10^{12}}u = 82{,}62\cdot 10^{-6}u$

$\tau'_2 = \frac{T_y}{I_z}W_z = 0{,}1439\cdot 10^{-4}W_z$

$\Delta\tau'_3 = \frac{M_t}{C}u\Delta S = 0{,}0918\cdot 10^{-5}u\Delta S$

$\tau'_3 = \Sigma\Delta\tau'_3$ à partir de 1

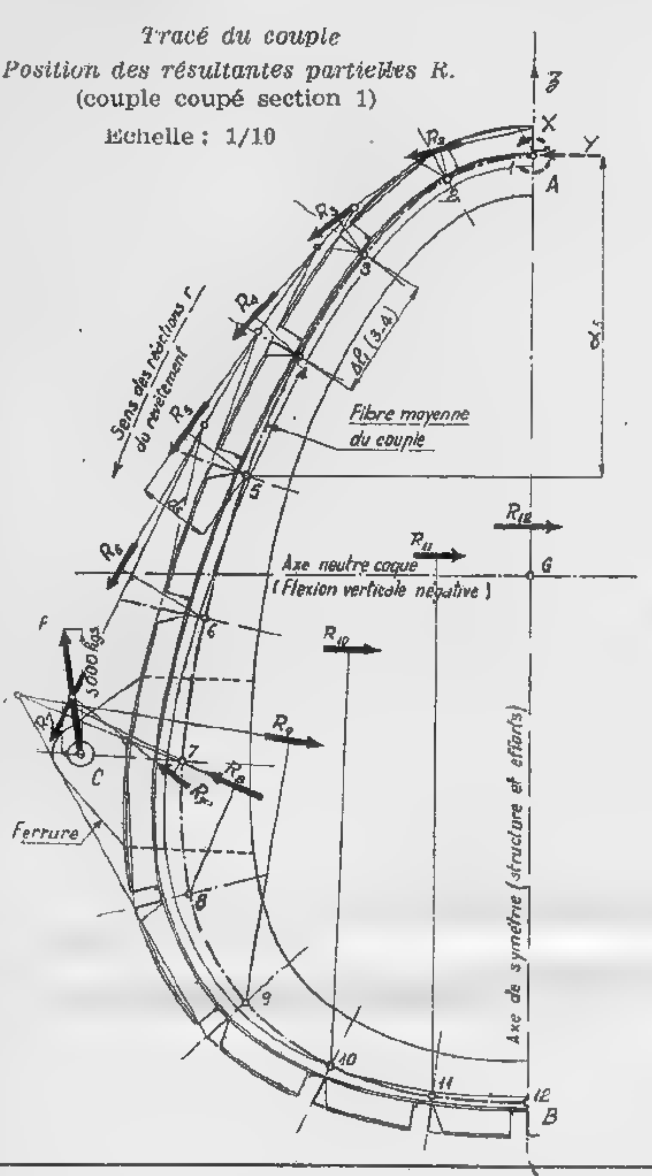
$f_1 = \tau'_2\Delta l$; $f_2 = \tau'_3\Delta l$

$\Sigma f_1\rho = 0$ (Vérif. flexion pure)

$2\Sigma f_2\rho = -2780 = M_t$

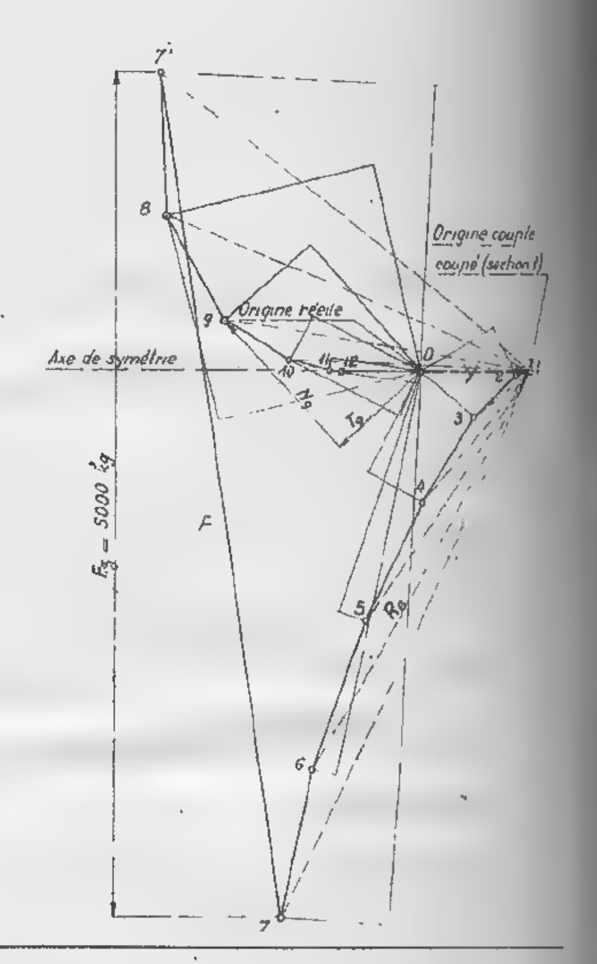
Calcul d'un couple d'introduction de charges
A) Détermination des

Tracé du couple
Position des résultantes partielles R.
(couple coupé section 1)
Echelle : 1/10



Dynamique des forces extérieures
Détermination de N et de T.

Echelle : 1 mm=50 kg



Données

Charges appliquées

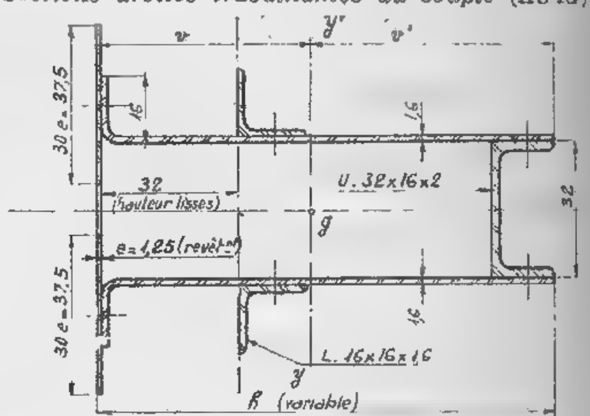
Deux forces F symétriques agissant sur deux ferrures C et C′ solidaires du couple, et donnant une introduction d'effort tranchant vertical dans la coque :

$$\Delta T_z = 10000 \text{ kg}$$

Section de la coque

Section étudiée planches 46A et 46B (soumise au niveau du couple à une flexion verticale générale négative).

Sections droites travaillantes du couple (AU4G)



Section totale	Section âmes	Moments d'inert.
$S=359+3{,}2\ h$	$S_a=3{,}2\ h$	$I_{yy'}$: voir courbe planche 48B

On suppose ces caractéristiques rétablies au passage des lisses.

harges us un fuselage-coque
on des rts et des contraintes.

PLANCHE N° **48** A

TABLEAUX DE CALCULS (Voir chap. XXII, § 7.4)

1 . Caractéristiques (moyen.) ; Réact. revêtt

N° inter-valles	Δl_1 mm	I cm⁴	$\frac{\Delta l_1}{I}$ 10^{-4}mm⁻³	r_1 kg
1-2	110	48,1	2,287	200
2-3	140	48,1	2,911	760
3-4	145	48,5	2,990	1195
4-5	155	61	2,541	1595
5-6	175	98,5	1,777	1880
6-7	175	165,5	1,057	1855
7-8	165	215,6	0,765	1710
8-9	150	189,3	0,792	1445
9-10	130	125,8	1,033	896
10-11	130	83,3	1,561	505
11-12	115	63,7	1,805	145
1	2	3	4	5

N° sections	Calcul de m: R kg	d mm	m mkg	Calcul incon. (Pl. 48B): α mm	$m\alpha$ m²kg	α^2 dm²	Moment complem.: αy mkg
1	0		0	0	0		0
2	100	36	3,6	28	0,10	0,08	—20
3	470	52	24,50	116	2,8	1,35	—82,5
4	1040	70	73	238	17,4	5,66	—169
5	1800	89	162	378	61,3	14,3	—269
6	2720	118	321	546	175,1	29,8	—388
7	3595 —2885	152 22	547 —64	716	391,1 —45,5	51,3	—509
8	—2425	—141	342	876	299,5	76,7	—623
9	—1920	—317	609	1002	610	100,4	—712
10	—1515	—493	747	1077	804,4	116	—765
11	—1260	—642	808	1114	900,5	124,1	—792
12	—1200	—683	822	1120	920,6	125,4	—796
6	7	8	9	10	11	12	13

2 | Efforts internes (pl. 48B) ; Caractéristiques des sections ; Contraintes

N° sections	M mkg	N kg	T kg	S mm²	S_a mm²	ext^r $\left(\frac{I}{v}\right)_y$ cm³	int^r $\left(\frac{I}{v'}\right)_y$ cm³	Normales dues à M ext^r n_1	dues à M int^r n_2	dues à N n_3	Résultantes ext^r n	Résultantes int^r n'	Tangent. t
								kg/mm²					
1	66,5	—710	0	623	264	12,6	10,62	5,28	—6,26	—1,14	4,14	—7,40	0
2	50,1	—525	—312	628	269	12,91	10,86	3,88	—4,61	—0,84	—3,04	—5,45	1,16
3	8,5	0	—430	623	264	12,6	10,62	0,68	—0,8	0	0,68	—0,8	1,63
4	—29,5	675	—375	629	270	13,05	10,96	—2,26	2,70	1,07	—1,19	3,77	1,39
5	—40,5	1510	—175	669	310	16,29	13,58	2,49	2,98	2,26	—0,23	5,24	0,57
6	—0,5	2450	150	743	384	23,2	19,2	—0,02	0,03	3,3	—3,28	3,33	0,39
7	+104,5 —506,5	3285 —1680	655 1665	823	464	31,22	25,78	3,35 —16,2	—4,05 19,66	3,99 —2,04	7,34 —18,24	—0,06 17,62	1,41 3,59
8	—214,5	—1285	1265	839	480	32,88	27,2	—6,53	7,90	—1,53	—8,06	6,37	2,64
9	—36,5	—975	680	775	416	26,22	21,6	—1,39	1,69	—1,26	—2,65	0,43	1,63
10	48,5	—735	300	708	349	19,74	16,4	2,46	—2,96	—1,04	1,42	—4	0,86
11	82,5	—550	70	663	304	15,79	13,12	15,22	—6,29	—0,83	4,39	—7,12	0,23
12	92,5	—485	0	647	288	14,43	12,05	6,41	—7,68	—0,75	5,66	—8,43	0
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DES INTEGRALES DU CALCUL HYPERSTATIQUE

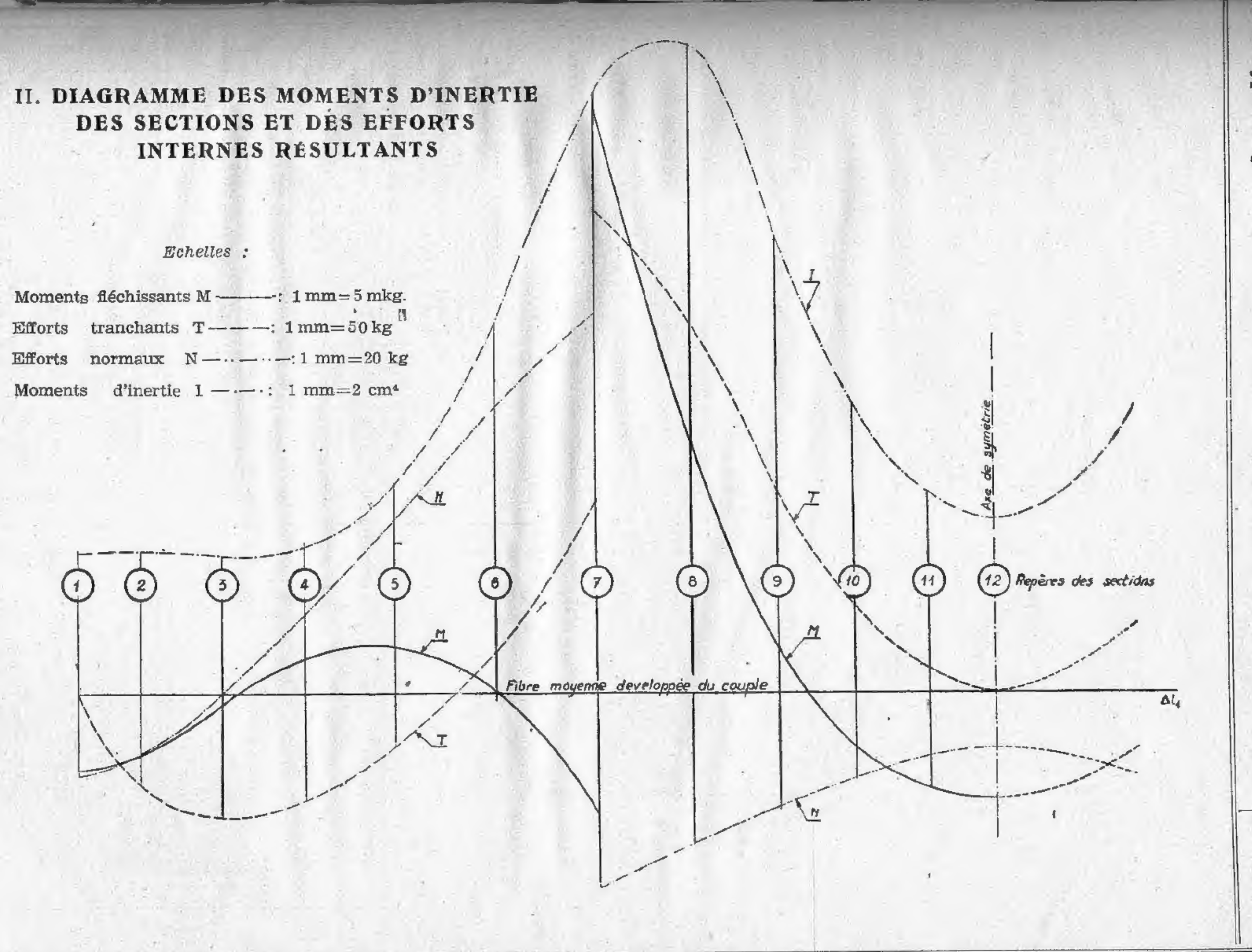
Echelles	
Abscisses	$\frac{\Delta l_1}{I}$: 1 mm = 0,1 · 10^{-4}mm^{-3} = 10^4m^{-3}
Ordonnées	α : 1 mm = 10 mm = 10^{-2}m α^2 : 1 mm = 1 dm^2 = 10^{-2}m^2 m : 1 mm = 10 mkg $m\alpha$: 1 mm = 10 m^2 kg
Surfaces	courbe α : 1mm^2 = $10^4 \cdot 10^{-2} = 10^2$ — m : 1mm^2 = $10^4 \cdot 10 = 10^5$ — $m\alpha$: 1mm^2 = $10^4 \cdot 10 = 10^5$ — α^2 : 1mm^2 = $10^4 \cdot 10^{-2} = 10^2$ (unités en m & kg)

Résultats		
Désign.	Planimétrages (mm²)	Valeurs réelles (un. en m et kg)
$\Sigma\alpha \frac{\Delta l_1}{I}$	9220	$0{,}922 \cdot 10^6$
$\Sigma\alpha^2 \frac{\Delta l_1}{I}$	7645	$0{,}7645 \cdot 10^6$
$\Sigma m \frac{\Delta l_1}{I}$	5255	$525{,}5 \cdot 10^6$
$\Sigma m\alpha \frac{\Delta l_1}{I}$	4820	$482{,}0 \cdot 10^6$
$\Sigma \frac{\Delta l_1}{I}$ = 195,2 mm (abscisses)		$= 1{,}952.10^6$

...arges dans un fuselage-coque
...es du calcul hyperstatique.

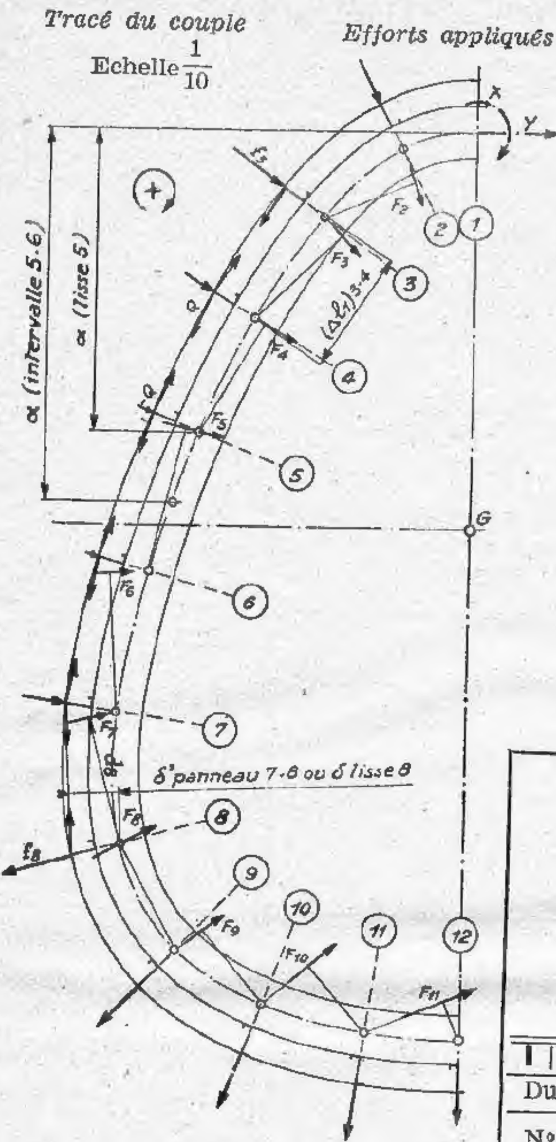
PLANCHE N° **48** B

II. DIAGRAMME DES MOMENTS D'INERTIE DES SECTIONS ET DES EFFORTS INTERNES RÉSULTANTS



Tracé du couple
Echelle $\frac{1}{10}$

Efforts appliqués



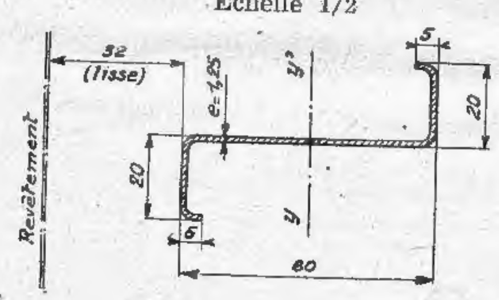
Dynamique des efforts dus au galbe longitudinal

Origine couple coupé section 1

Origine réelle

$Y = 261,1$

Echelle
1 mm = 5 kg



Caractéristiques

S = 127,2 $\left(\frac{I}{V}\right)_{yy'} = 2320$ mm³

S âme = 60 · 1,25 = 75 mm²

DONNÉES

Caractéristiques de la section de la coque :
section étudiée Planches 46 A et 46 B.

Efforts généraux appliqués à la section :
efforts envisagés Pl. 46 B en flexion verticale soit :
$T_z = -8790$ kg ↓ $M_y = -23000$ mkg

Angle de brisure (galbe longitudinal) au niveau du couple : $\Delta\alpha_1 = 2°20'$

Intervalle entre couples : $\Delta L = 400$ mm.

I Calcul des sollicitations extérieures

Dues au galbe longitudinal				Dues au plissement revêt'				
N° lisse	$z^2\Delta S_2$ cm⁴	f_z kg	Réact. r_1 kg	N° pan.	τ_0 (Voir pl. 46 B) kg/mm	τ_1 kg/mm	$\Delta\tau_1$ kg/mm	Q= $\Delta\tau_1\Delta L$ kg
1	3428	34,49		1-2	5,55	0,64		0
2	6401	64,40	7,96	2-3	3,50	1,91		0
3	4448	44,75	29,64	3-4	2,32	3,01	0,69	276
4	2124	21,37	46,63	4-5	1,74	3,76	2,02	808
5	237	2,38	62,27	5-6	1,67	3,95	2,28	912
6	23	0,23	73,4	6-7	1,97	3,89	1,92	768
7	681	6,85	72,36	7-8	3,15	3,59	0,44	176
8	2222	22,36	66,67	8-9	4,10	3,35		0
9	4406	44,33	56,39	9-10	4,09	2,26		0
10	5595	56,30	34,94	10-11	2,68	1,38		0
11	6147	61,85	19,95	11-12	2,18	0,46		0
12	3102	31,21	5,71					
Σ	38814	390,52						
1	2	3	4	5	6	7	8	9

2 Calcul des moments m (Couple supposé coupé suivant section 1)

Moments dus au galbe seul

N° sections	F kg	d mm	Fd mmkg	δ mm	$r_1\delta$ mmkg	m_1 mkg	m avant	m après
1	0	0	0		0	0	0	
2	34,5	88	3036	57	451	3,49	3,49	
3	106	114	12084	58	1719	17,29	17,29	1,27
4	175	140	24500	58	2705	44,50	28,48	—3,10
5	211	150	31650	59	3674	79,82	32,22	24,22
6	222	174	38628	61	4477	122,92	67,32	75,37
7	242,5	165	40013	62	4486	167,42	119,87	157,02
8	317	154	48818	59	3934	220,18	209,78	220,18
9	256,5	141	36167	58	3271	259,61	259,61	
10	20,05	112	2245	61	2131	264	264	
11	13,6	104	1414	61	1217	266,62	266,62	
12	8,05	50	403	61	348	267,37	267,37	
	10	11	12	13	14	15	21	22

Plissement

N° intervalles	δ' mm	Q δ'	m_1 moyen	m_m mkg
1-2		0	1,75	1,75
2-3		0	10,39	10,39
3-4	58	—16,02	30,89	14,87
4-5	59	—47,60	62,16	14,56
5-6	61	—55,60	101,37	45,77
6-7	62	—47,55	145,17	97,62
7-8	59	—10,40	193,8	183,40
8-9		0	239,89	239,89
9-10		0	261,8	261,8
10-11		0	265,31	265,31
11-12		0	267	267
16	17	18	19	20

3 Calcul des inconnues hyperstatiques

N° intervalles	α_1 mm	Δl_1 mm	$m_m \Delta l_1$ m²kg	$\alpha_1 \Delta l_1$ cm²	$\alpha_1^2 \Delta l_1$ dm³	$\frac{m_m \alpha_1}{\Delta l_1}$ m³kg
1-2	6	95	0,16	6	ε	ε
2-3	56	125	1,30	74	0,41	0,07
3-4	160	145	2,16	232	3,71	0,35
4-5	289	155	2,26	448	12,95	0,65
5-6	442	175	8,01	774	34,19	3,54
6-7	609	175	17,10	1066	64,90	10,42
7-8	770	162	29,72	1247	96,05	22,82
8-9	917	148	35,50	1357	124,45	32,56
9-10	1008	123	32,20	1240	124,97	32,46
10-11	1058	130	34,49	1375	145,52	36,49
11-12	1073	110	29,37	1180	126,65	31,52
Σ		1543	192,27	8999	733,80	170,88
23	24	25	26	27	28	29

Calcul des efforts réels

N° sections	α mm	αY	M avant (mkg)	M après (mkg)	N kg	T max kg
1	0	0	39,35		281	—34,5
2	20	—5,62	37,22		257	92
3	102	—28,67	27,97	11,95	189	130
4	223	—62,69	5,14	—26,44	518	73
5	359	—100,92	—29,35	—37,35	881	50
6	525	—147,59	—40,92	—32,87	917	45
7	691	—194,25	—35,03	2,12	685	38
8	850	—238,95	10,18	20,58	—134	—60
9	974	—273,81	25,15		—175	—62
10	1038	—291,80	11,55		—200	—75
11	1069	—300,52	5,45		—210	—66
12	1076	—302,48	—4,24		212	—31,5
30	31	32	33	34	35	36

Equations : $\begin{cases} 192,27 + 1,543\ X + 0,8999\ Y = 0 \\ 170,88 + 0,8999\ X + 0,7338\ Y = 0 \end{cases}$

Inconnues : X=39,35 mkg ; Y=—281,12 kg

Contraintes maxima du couple (Section n° 6)

Flexion : $n_1 = \mp \frac{40920}{2320} = \mp 17,7$

Compression : $n^2 = \frac{917}{127,2} = 7,2$

$n_s = 24,9$ kg/mm².

Cisaillement (moyen) $t = \frac{45}{75} = 0,6$ kg/mm².